

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Северо-Кавказский
регион*

ЕСТЕСТВЕННЫЕ

НАУКИ

2015

4

Журнал основан в 1972 г. Ю.А. Ждановым

Главная редакция:

В.И. Колесников (главный редактор),
В.Е. Закруткин, В.С. Золотарев, А.В. Павленко (заместители главного редактора),
Е.А. Шинкаренко (отв. секретарь)

Редакционный совет:

В.А. Бабешко, Б.С. Карамурзов, В.И. Колесников, Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев,
В.Г. Лобанов, Г.Г. Матишов, В.И. Минкин, М.Х. Рабаданов, Э.З. Эмирбеков

Редакционная коллегия:

В.Е. Закруткин – председатель редколлегии (д. г.-м.н., профессор), А.В. Абанин (д.ф.-м.н., профессор),
В.В. Внуков (д.б.н., профессор), Л.С. Ворович (к.ф.-м.н., доцент), Ю.М. Гуфан (д.ф.-м.н., профессор),
О.Н. Демина (д.б.н.), А.Г. Захаров (д.техн.н., профессор), Л.М. Зубов (д.ф.-м.н., профессор),
Я.М. Ерусалимский (д.техн.н., профессор), С.Б. Климентов (д.ф.-м.н., профессор),
Г.В. Куповых (д.ф.-м.н., профессор), С.В. Курбатов (д.х.н., профессор),
А.М. Лерер (д.ф.-м.н., профессор), В.А. Миноранский (д.с.-х.н., профессор),
А.Ф. Пожарский (д.х.н., профессор), З.А. Темердашев (д.х.н., профессор),
В.Н. Труфанов – зам. пред. редколлегии (д.г.-м.н., профессор),
Ю.А. Устинов (д.ф.-м.н., профессор), Ю.А. Федоров (д.г.н., профессор),
С.П. Чернышева (к.ф.-м.н., доцент), О.М. Шабанов (д.х.н., профессор)

Учредители:

Министерство образования и науки Российской Федерации, Дагестанский государственный технический университет, Дагестанский государственный университет, Донской государственный технический университет, Кабардино-Балкарский государственный университет, Кубанский государственный технологический университет, Кубанский государственный университет, Пятигорский государственный лингвистический университет, Ростовский государственный строительный университет, Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростовский государственный экономический университет, Северо-Осетинский государственный университет, Северо-Кавказский федеральный университет, Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова, Южно-Российский институт управления Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Южный федеральный университет

Над номером работали: Т.А. Ватульян, Л.С. Ворович, В.И. Литвиненко, С.П. Чернышева, М.С. Шипитко.

Подписано в печать 15.11.2015 г.
Формат 60×84/8. Гарнитура "Таймс".
Усл. печ.л. 14,11. Уч.-изд. л. 15,25
Тираж 200 экз. Заказ №

Адрес редакции и издателя: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42
Южный федеральный университет (для переписки). Тел. / факс главной редакции (863) 264-57-37
E-mail: izvestiya@sfedu.ru

Адрес в Интернете: www.izvestiya.sfedu.ru

Адрес редколлегии серии «Естественные науки»: г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 160, к. 118, тел. 264-57-37.
Адрес типографии: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 111, Центр универсальной полиграфии.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

Регистрационный номер 011019
Комитета Российской Федерации по печати
Научно-образовательный и прикладной журнал
Издается с 1973 г.
Периодичность серии 4 номера в год
№ 4 (188) 2015 г.

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКО- МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Абшаев М.Т., Меркулова И.В.</i> Оценка качества реализации российской автоматизированной технологии противорадовой защиты.....	5
<i>Акопьян В.А., Чебаненко В.А., Захаров Ю.Н., Рожков Е.В., Лутохин А.Г., Бунин М.А., Родицин Е.С., Кузнецов В.Г.</i> Электрический отклик неполяризованных пластин из горячепрессованной керамики ЦТС-19 на трехточечное механическое нагружение при нормальной температуре.....	13
<i>Аль Наджм М.Н., Прудских В.В.</i> Электродинамические свойства ударных волн непрерывного типа в запыленной плазме	18
<i>Белявский Г.И., Данилова Н.В.</i> Расчёт справедливой цены европейского опциона в модели (B,S)-рынка с барьером, основанной на случайном блуждании.....	25
<i>Ватульян А.О., Капительян Д.О.</i> Об определении локализованной зоны деструкции в упругой балке	29
<i>Галаско А.А., Зубов Л.М.</i> Нелинейная теория кручения упругих цилиндров с винтовой дислокацией	35
<i>Долгих Т.Ф., Жуков М.Ю., Ширяева Е.В.</i> Нахождение стационарных решений задачи о конвекции Рэлея – Бенара – Кармана	44
<i>Жуков М.Ю., Морад А.М.</i> Движение слоя идеальной несжимаемой жидкости на внешней поверхности вращающегося цилиндра.....	49
<i>Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М., Кэ Л.Л.</i> Неустойчивость скользящего термофрикционного контакта жесткого тела с упругим покрытием, содержащим пьезокерамическую прослойку	56
<i>Климентов Д.С.</i> Стохастический критерий k -движения регулярной поверхности положительной гауссовой кривизны в трёхмерном евклидовом пространстве	63
<i>Куракин Л.Г., Мелехов А.П., Островская И.В.</i> Об устойчивости стационарного вращения системы точечных вихрей внутри круговой области.....	68
<i>Потетюнко Э.Н.</i> Высокочастотная асимптотика волнового движения жидкости, вызванного вибрацией пластины, лежащей на поверхности жидкости....	74
<i>Сметанин Б.И.</i> Горизонтальный удар вертикальной пластинки, полностью погруженной в несжимаемую жидкость	80
<i>Ханин Д.И.</i> Решение дискретных двумерных уравнений типа свёртки на больших прямоугольниках	84

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ	<i>Леонтьева Д.В., Смирнова Н.В.</i> О кинетике электрохимического окисления 5-гидроксиметилфурфуrolа и 2,5-диформилфурана на платиновом электроде в водной среде 91
БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ	<i>Кравченко В.А., Малай Н.Ф., Шурупов В.Г.</i> Продуктивность подсолнечника в зависимости от норм минерального питания..... 96 <i>Луданова Е.В., Малай Н.Ф., Шурупов В.Г.</i> Влияние густоты стояния растений на продуктивность подсолнечника..... 101 <i>Миноранский В.А.</i> Ситуация с Красными книгами Российской Федерации и регионов 104 <i>Миноранский В.А., Тихонов А.В., Малиновская Ю.В.</i> Мониторинг гнездящихся околотовных птиц на острове Прибрежном заповедника «Ростовский» 107 <i>Сибиль И.В., Малай Н.Ф., Шурупов В.Г.</i> Десикация подсолнечника 110 <i>Шмараева А.Н., Федяева В.В., Шишлова Ж.Н.</i> Таксономическая структура флоры памятника природы Ростовской области «Сальская степь» 113
НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ	<i>Миноранский В.А.</i> Первый Международный экологический форум «У нас одна Земля. В гармонии с природой» 117 <i>Узденский А.Б.</i> V съезд биофизиков России 120
ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ	<i>Чернышева С.П.</i> К 70-летию Юрия Александровича Федорова..... 123 Наши юбиляры..... 124 Указатель материалов, опубликованных в журнале «Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Естественные науки» в 2015 г. 125

IZVESTIYA VUZOV. SEVERO-KAVKAZSKII REGION

Reg. No. 011019

Of the Committee of the Press of the Russian Federation

Scientifically educational and applied magazine

Was founded in 1973.

Period is 4 numbers per a year

№ 4 (188) 2015.

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4

NATURAL SCIENCE

CONTENTS

PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Abshaev M.T., Merkulova I.V. Estimation of Realization Quality of the Russian Automated Hail Suppression Technology	5
Akopyan V.A., Chebanenko V.A., Zakharov Yu.N., Rozhkov E.V., Lutokhin A.G., Bunin M.A., Rodinin E.S., Kuznetsov V.G. Electric Response Unpolarized Plates from Hot-Pressed Ceramics PZT-19 at Three-Point Mechanical Loading at Normal Temperature.....	13
Al Najm M.N., Prudskikh V.V. The Electrodynamical Properties of Shock Waves Continuous Type in Collisional Plasma	18
Belyavskii G.I., Danilova N.V. The European Fair Price Calculation in the (B,S)-Market Model with Barrier Based on the Random Walk.....	25
Vatulyan A.O., Kashtalyan D.O. About Certain Localized Areas of Degradation in Elastic Beam.....	29
Galasko A.A., Zubov L.M. Nonlinear Theory of Torsion of Elastic Cylinder with a Screw Dislocation	35
Dolgikh T.F., Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. Stationary Solutions of the Rayleigh-Benard-Karman Convection Problem	44
Zhukov M.Yu., Morad A.M. The Movement of an Ideal Incompressible Fluid Layer on the Outer Surface of the Rotating Cylinder	49
Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Aizikovich S.M., Ke L.L. Instability of Sliding Thermoelastic Contact of a Rigid Body with an Elastic Coating Containing a Piezoceramic Interlayer...56	
Klimentov D.S. Stochastic Criterion to the K-Motion of a Regular Surface of Positive Gaussian Curvature in Three-Dimensional Euclidean Space	63
Kurakin L.G., Melekhov A.P., Ostrovskaya I.V. On the Stability of Stationary Rotation of a Point Vortices System in a Circular Domain.....	68
Potetyunko E.N. High-Frequency Asymptotic Behavior of the Wave Motion of the Jewbones, Due to the Vibration Plate, Lying on the Surface of the Liquid.....	74
Smetanin B.I. Horizontal Impact of the Vertical Plate, Fully Submerged in an Incompressible Fluid.	80
Khanin D.I. The Solution to Two-Dimensional Discrete Equations of Convolution Type in Large Rectangles	84

CHEMISTRY SCIENCES

Leontyeva D.V., Smirnova N.V. The Kinetics of Electrochemical Oxidation 5-Hydroxymethylfurfural and 2,5-Diformylfuran on a Platinum Electrode in an Aqueous Media.....	91
---	----

BIOLOGICAL SCIENCE	<i>Kravchenko V.A., Malai N.F., Shurupov V.G.</i> Productivity of Sunflower Depending on Mineral Nutrition Standards 96
	<i>Ludanova E.V., Malai N.F., Shurupov V.G.</i> Plant Density Influence on Productivity of Sunflower 101
	<i>Minoranskii V.A.</i> Red Books of Russian Federation and Regions 104
	<i>Minoranskii V.A., Tikhonov A.V., Malinovskaya Yu.V.</i> Monitoring of Wading Birds Nesting on Pribrezhny Island in the “Rostovsky” Reserve 107
	<i>Sibil I.V., Malai N.F., Shurupov V.G.</i> Desiccation of Sunflower 110
	<i>Shmaraeva A.N., Fedyaeva V.V., Shishlova Zh.N.</i> Taxonomical Structure of Flora of the Nature Sanctuary “Salsk Steppe” of the Rostov Region.....113
SCIENTIFIC LIFE	<i>Minoranskii V.A.</i> First International Ecological Forum “We Have One Earth. In Harmony with Nature” 117
	<i>Uzdenskii A.B.</i> V Congress of Russian Biophysicists.....120
TOUCHES TO THE PORTRAIT	<i>Chernysheva S.P.</i> On the 70th Anniversary of Yurii Aleksandrovich Fedorov 123
	Our persons..... 124
	Index of articles published in the journal “Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedenii. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki” in 2015.....125

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 551.509.616

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-5-12

**ОЦЕНКА КАЧЕСТВА РЕАЛИЗАЦИИ РОССИЙСКОЙ
АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ ТЕХНОЛОГИИ ПРОТИВОГРАДОВОЙ ЗАЩИТЫ**

© 2015 г. М.Т. Абшаев, И.В. Меркулова

Абшаев Магомед Тахирович – доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по активным воздействиям на метеорологические и другие геофизические процессы, Высокогорный геофизический институт, пр. Ленина, 2, г. Нальчик, КБР, 360030, e-mail: abshaev@mail.ru

Abshaev Magomet Takhirovich – Doctor of Physical and Mathematic Science, Professor, Deputy Director on Weather Modification, High-Mountain Geophysical Institute, Lenin Ave, 2, Nalchik, KBR, 360030, e-mail: abshaev@mail.ru

Меркулова Инна Васильевна – соискатель, Высокогорный геофизический институт, пр. Ленина, 2, г. Нальчик, КБР, 360030, e-mail: gerasimenkoin@yandex.ru

Merkulova Inna Vasilievna – Competitor, High-Mountain Geophysical Institute, Lenin Ave, 2, Nalchik, KBR, 360030, e-mail: gerasimenkoin@yandex.ru

Приводятся результаты анализа качества реализации российской автоматизированной ракетной технологии противоградовой защиты в реальных условиях на основе изучения воздействия на градовые процессы, проведенного Ставропольской противоградской службой в период с 2005 по 2013 г. Показано, что при воздействии на сверхмощные градовые облака применяемая организационно-техническая система не в полной мере обеспечивает реализацию требований технологии и физической концепции предотвращения града. Выявлены основные проблемы, снижающие эффективность противоградовых операций, их повторяемость и даны рекомендации по совершенствованию системы защиты и дальнейшему повышению ее эффективности.

Ключевые слова: технология противоградовой защиты, реализация, анализ, качество выполнения противоградовых операций, эффективность, организационно-технические проблемы.

On the basis of the analysis of realization quality of the Russian automated rocket antihail technology it is shown, that the applied organizational-technical hail suppression system not to the full provides performance of requirements technology (especially in cases of supercell storms). The basic problems, their repeatability are revealed and recommendations about perfection of hail suppression system for increase of its efficiency are given.

Keywords: hail suppression technology, realization, analysis, quality of antihail operations performance, efficiency, organizational-technical problems.

Производственные работы по защите сельхозкультур от градобития в Российской Федерации осуществляются в наиболее градоопасных районах Северного Кавказа с 1964 г. с применением российской автоматизированной ракетной технологии [1]. Эффективность защиты повышается по мере развития представлений о механизме образования града, совершенствования технологии и технических средств активного воздействия (АВ) на градовые процессы и в последние годы обеспечивает сокращение ущерба от града на 85–90 % [2], что превышает эффективность технологий с применением авиации, артиллерии и наземных генераторов.

Однако и эта технология не может гарантировать 100-процентной эффективности защиты. Это в

первую очередь связано со сложностью и недостаточной изученностью градовых процессов и возможностью того, что технология АВ не учитывает неизвестных особенностей строения и динамики развития градовых облаков и их кластеров.

Вместе с тем, как будет показано ниже, недостаточная эффективность предотвращения града и случаи его выпадения на защищаемой территории (ЗТ) отмечаются из-за неполной реализации требований технологии воздействия на градовые процессы. Наиболее часто эти требования нарушаются при воздействии на сверхмощные градовые облака, относящиеся к объектам воздействия (ОВ) IV категории, которые вторгаются на ЗТ в стадии квазистационарного состояния, а иногда развиваются над ней даже в процессе воздействия.

Целью настоящей работы является оценка качества реализации требований технологии воздействия на градовые процессы в реальных условиях противоградовой защиты (ПГЗ).

Оценка приведена на основе анализа материалов воздействия на градовые процессы Ставропольской военизированной службой (ВС) по АВ на метеорологические и другие геофизические процессы в период с 2005 по 2013 г., с применением российской технологии ПГЗ, которая предусматривает ракетный засев кристаллизующим реагентом (на основе AgI) четырех категорий объектов воздействия (ОВ):

- потенциально градоопасных облаков (ОВ I категории);
- градоопасных развивающихся облаков (ОВ II категории);
- градовых облаков (ОВ III категории);
- сверхмощных градовых облаков (ОВ IV категории).

Распознавание категорий ОВ осуществляется по критериальным значениям одномерных, двумерных и трехмерных радиолокационных параметров облаков, приведенных в табл. 1 и характеризующих

степень их градоопасности, а также тенденцию развития:

- высота максимума радиоэха над уровнем изотермы 0°C (ΔH_{Z_m} , км);
- максимальная отражаемость на длине волны $\lambda = 10$ см (Z_m , dBZ);
- высота над уровнем изотермы 0°C верхней границы объемов радиоэха с $Z_{10} = 25, 35$ и 45 dBZ соответственно ($\Delta H_{25}, \Delta H_{35}$ и ΔH_{45} , км);
- максимальное значение водосодержания вертикального столба облака в слое выше уровня изотермы 0°C (Δq_m , кг/м²);
- интегральное водосодержание объемов облака в слое выше уровня изотермы 0°C , ограниченных изолиниями $Z_{10} = 25, 35, 45$ и 55 dBZ соответственно ($\Delta M_{25}, \Delta M_{35}, \Delta M_{45}$ и ΔM_{55} , Кт);
- скорость прироста во времени значений Δq_m ($d\Delta q_m/dt$, кг/м²·мин);
- скорость прироста во времени значений $\Delta M_{25}, \Delta M_{35}$ (dM_{25}/dt и dM_{35}/dt , т/мин).

При этом значения $\Delta H_{Z_m}, Z_m, \Delta H_{Z_i}, \Delta q_m$ и ΔM_{Z_i} характеризуют степень градоопасности облаков, а значения $d\Delta q_m/dt$ и dM_{Z_i}/dt – их тенденцию развития (или ослабления).

Таблица 1

Критерии распознавания ОВ различных категорий

Категория ОВ	Критериальные значения параметров облаков					
I	$0 < \Delta H_{Z_m} < 5$	$15 < Z_m < 45$	$\Delta q_m \geq 0,5$	$\Delta M_{25} > 10^3$	$d\Delta q_m/dt > 0,2$	$d\Delta M_{25} > 0$
II	$\Delta H_{35} > 3$	$Z_m \geq 45$	$\Delta q_m \geq 2$	$\Delta M_{35} > 2 \cdot 10^4$	$d\Delta q_m/dt > 0,2$	$d\Delta M_{35} > 0$
III	$\Delta H_{45} \geq 3$	$Z_m \geq 55$	$\Delta q_m > 8$	$\Delta M_{45} > 2 \cdot 10^4$	$d\Delta q_m/dt \geq 0$	$d\Delta M_{35} \geq 0$
IV	$\Delta H_{45} > 4$	$Z_m > 65$	$\Delta q_m > 16$	$\Delta M_{55} > 2 \cdot 10^5$	–	–

Засев ОВ осуществлялся противоградовыми изделиями (ПГИ) «Алазань-6», вносимыми в области нового роста с момента их обнаружения до тех пор, пока их параметры соответствовали критериям засева. При этом в большинстве случаев воздействия на ОВ I категории достаточно однократного засева, на ОВ II категории – двукратного, на ОВ III категории – трехкратного, а на ОВ IV категории – четырехкратного.

Однако в некоторых случаях при воздействии на ОВ IV категории и близкие к ним по мощности ОВ III категории прерывание града достигается только в результате многократного засева, а в некоторых случаях достигается лишь уменьшение его интенсивности. Для выяснения возможных причин недостаточной эффективности предотвращения града рассмотрим детали реализации технологии ПГЗ в реальных условиях.

Анализ экспериментального материала

В табл. 2 приведены статистические данные о числе засеянных ОВ различных категорий и расход противоградовых изделий (ПГИ).

Из табл. 2 следует, что с 2005 по 2013 г. отмечается тенденция увеличения числа засеваемых ОВ III и IV категорий, обусловленная повышением частоты и интенсивности градовых процессов в Ставропольском крае [3, 4]. Доля расхода ПГИ, приходящаяся на проведение АВ по предотвращению развития облаков в градовое состояние, т.е. для засева ОВ I и II категорий, составляет около 20 % от суммарного годового расхода ПГИ, из них на засев ОВ I категории тратится не более 2 %. Не менее 80 % расхода ПГИ приходится на засев ОВ III и IV категорий с целью прерывания выпадения града из градовых и сверхмощных градовых облаков.

Таблица 2

Число засеянных ОБ в 2005–2013 гг.

Годы защиты	Число засеянных ОБ различной категории					Расход ракет, шт.		
	I	II	III	IV	Всего	Всего	На 1 ОБ	На 100 тыс. га
2005	1	158	94	5	258	3517	14	515
2006	–	78	74	21	173	3057	18	450
2007	–	179	235	27	441	5375	12	790
2008	–	275	289	50	614	6843	11	925
2009	–	333	217	22	572	6316	11	855
2010	–	247	144	7	398	4119	10	557
2011	147	317	165	7	636	4668	7	556
2012	83	344	250	11	688	6850	10	816
2013	17	194	317	56	584	7642	13	910
Среднее	62	236	198	23	485	5376	12	708

Воздействия на ОБ IV категории в Ставропольском крае дают около 60–70 % ущерба. Прерывание града из них требует максимально быстрого и точного выполнения противоградовых операций, зависит от способности организационно-технической системы выполнить требования технологии воздействия и выявляет нарушения требований технологии ПГЗ. Поэтому оценку качества выполнения противоградовых операций целесообразно провести именно на случаях воздействия на ОБ IV категории. Такая оценка может установить основные причины пропусков градобитий на ЗТ с целью их устранения и повышения эффективности ПГЗ.

Оценка качества воздействия на ОБ IV категории была проведена на основе анализа трансформации во времени их параметров в процессе засева.

При этом ОБ были разделены на две группы (табл. 3):

- ОБ, которые в начале засева относились к IV категории;
- ОБ, которые переросли в эту категорию в процессе воздействия.

Из табл. 3 следует, что из 1333 засеянных за 5 лет в среднем 18,2 % ОБ II категории в процессе воздействия перерастали в ОБ III категории, а 1,5 % – в ОБ IV категории. Из 1050 засеянных за 5 лет ОБ III категории 10,7 % переросли в ОБ IV категории в процессе воздействия. Это свидетельствует о том, что воздействие на указанные доли ОБ II и III категорий было неэффективным или недостаточно эффективным из-за причин, приведенных в табл. 4, которые лучше выделяются при воздействии на ОБ IV категории.

Таблица 3

Количество засеянных ОБ в сезонах 2007–2011 гг., категория которых изменялась в процессе воздействия

ОБ, переросшие в более высокую категорию в процессе АВ	2007		2008		2009		2010		2011	
	Число ОБ	%	Число ОБ	%	Число ОБ	%	Число ОБ	%	Число ОБ	%
ОБ II категории:										
– всего засеяно ОБ;	179	100	275	100	333	100	247	100	317	100
– переросли в ОБ III категории;	53	29,6	53	19,3	67	20,1	50	20,2	64	20,2
– переросли в ОБ IV категории	4	2,2	5	1,8	7	2,1	2	0,8	3	0,9
ОБ III категории:										
– всего засеяно ОБ;	235	100	289	100	217	100	144	100	165	100
– переросли в ОБ IV категории	13	5,5	43	14,9	29	13,4	23	16	6	3,6
ОБ IV категории	27	100	50	100	22	100	7	100	7	100

Оценка основных нарушений технологии

Для проведения оценки были выбраны по два года с примерно одинаковыми показателями градоопасности года – это 2007 и 2008, 2010 и 2011 гг. Всего отобрано по параметрам в момент начала воздействия и в момент максимального развития 191 ОБ IV категории, в том числе в 2007 г. – 44 ОБ, в 2008 г. – 99, в 2010 г. – 32 и в 2011 г. – 16 ОБ. По этим ОБ были проанализированы имевшие место

нарушения технологии проведения противоградовых операций, могущие привести к снижению эффективности воздействия. Перечень этих нарушений представлен в табл. 4 с учетом перехода ОБ из III в IV категорию. Следует отметить, что может быть несколько нарушений при засеве одного ОБ.

Из рис. 1 и табл. 4 следует, что наиболее часто повторяющимися нарушениями при проведении противоградовых операций являются:

- недостаточный засев или отсутствие массированного засева из-за экономии ПГИ (22 % случаев);
- отсутствие или недостаточная ширина зоны предзащиты (18,8 %);
- недостаточная скорострельность ПВ (14,7 %), связанная с применением ракетных пусковых установок (ПУ) с ручным управлением и 12 направляющими, что приводило к перерывам (до 8 мин) в проведении засева в периоды перезарядки ПУ;
- недостаточное упреждение на перемещение ОВ (11 %);

– большие мертвые зоны засева применяемых ПГИ «Алазань-6» (4,0–4,5 км), которые не перекрывались соседними ПВ (10,2 % случаев).

В совокупности эти нарушения отмечаются в 77 % случаев АВ и являются основными причинами снижения эффективности ПГЗ не только в Ставропольской, но и в других ВС Росгидромета. Это показывают ежегодные анализы пропусков града на ЗТ, выполняемые научно-методическим руководителем противоградовых работ (ФГБУ «ВГИ»).

Таблица 4

Основные нарушения требований технологии воздействия

Характерные нарушения в выполнении требований технологии воздействия, имевшие место в процессе проведения противоградовых операций	Число засеянных ОВ, отнесенных к ОВ IV категории по значениям параметров			
	в момент начала АВ	в момент максимального развития	Всего ОВ	% от числа засеянных ОВ
1. Нарушения технологии АВ:				
– опоздание с началом АВ	6	11	17	2,3
– неточное выделение зоны засева	20	33	53	7,2
– недостаточный засев	71	91	162	22
– ошибка выбора высоты засева	0	0	0	0
– отсутствие или недостаточное упреждение на перемещение ОВ	40	41	81	11
2. Нехватка ПГИ на засев:				
– закончился запас ПГИ на ПВ	3	4	7	0,9
– перерывы засева из-за перезарядки ракетных установок	59	49	108	14,7
3. Отказ технических средств	14	12	26	3,5
4. Запретные сектора для пуска ПГИ	20	24	44	6
5. Отсутствие зоны предзащиты	63	75	138	18,8
6. Другие причины:				
– множество одновременно засеваемых ОВ	3	5	8	1,1
– мертвые зоны или недостаточное перекрытие ПВ	39	36	75	10,2
– засев другого ОВ	9	4	13	1,8
– засев ОВ не проведен	1	3	4	0,5
Итого нарушений	348	388	736	100
Количество ОВ	92	99	191	

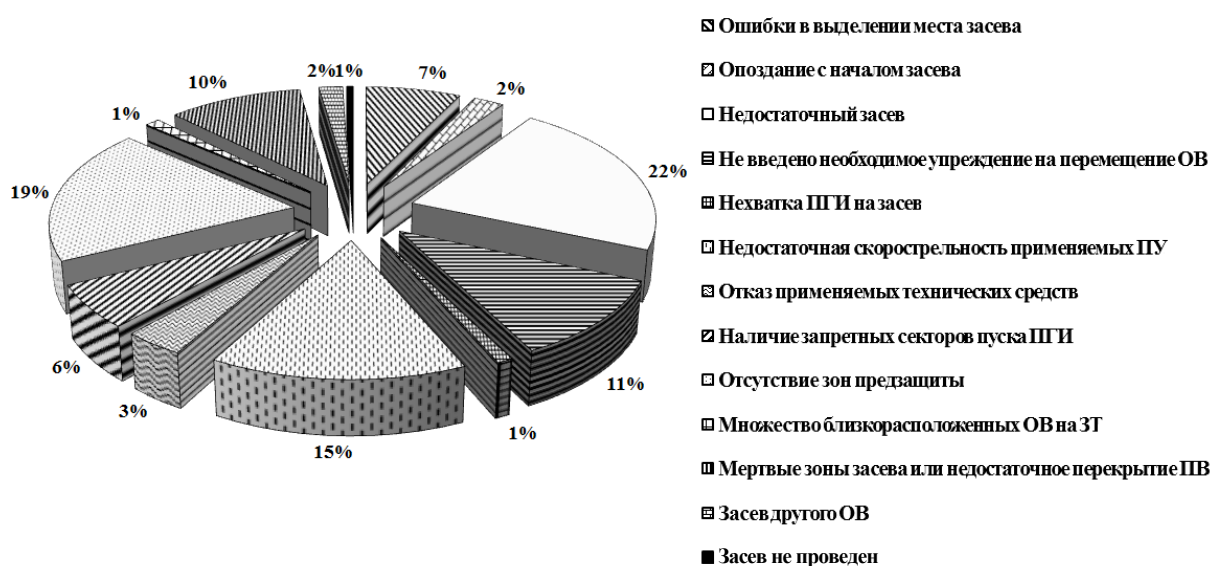


Рис. 1. Повторяемость основных нарушений технологии АВ на градовые процессы

Недостаточное упреждение в дальнейшей работе было устранено за счет автоматизации, предусмотренной в программном обеспечении применяемой системы управления противогололедными операциями АСУ-МРЛ. Мертвые зоны засева и недостаточное их перекрытие соседними ПВ могут быть устранены за счет перехода на применение ПГИ «Ас». Поэтому рассмотрим более подробно 3 других наиболее часто встречающихся нарушения технологии АВ, доля повторяемости которых составляет более 50 % в общем количестве нарушений.

Недостаточный засев

Нормы расхода ПГИ на засев одного ОВ регламентированы в действующем руководящем документе по организации и проведению ПГЗ [5] и находятся в прямой зависимости от площади проекции объема засева на горизонтальную поверхность. В связи с этим корректное построение площадок засева и полное перекрытие этих площадок трассами ПГИ является необходимым условием успешного воздействия. Однако на практике засева это требование, как правило, не выполнялось (рис. 2).

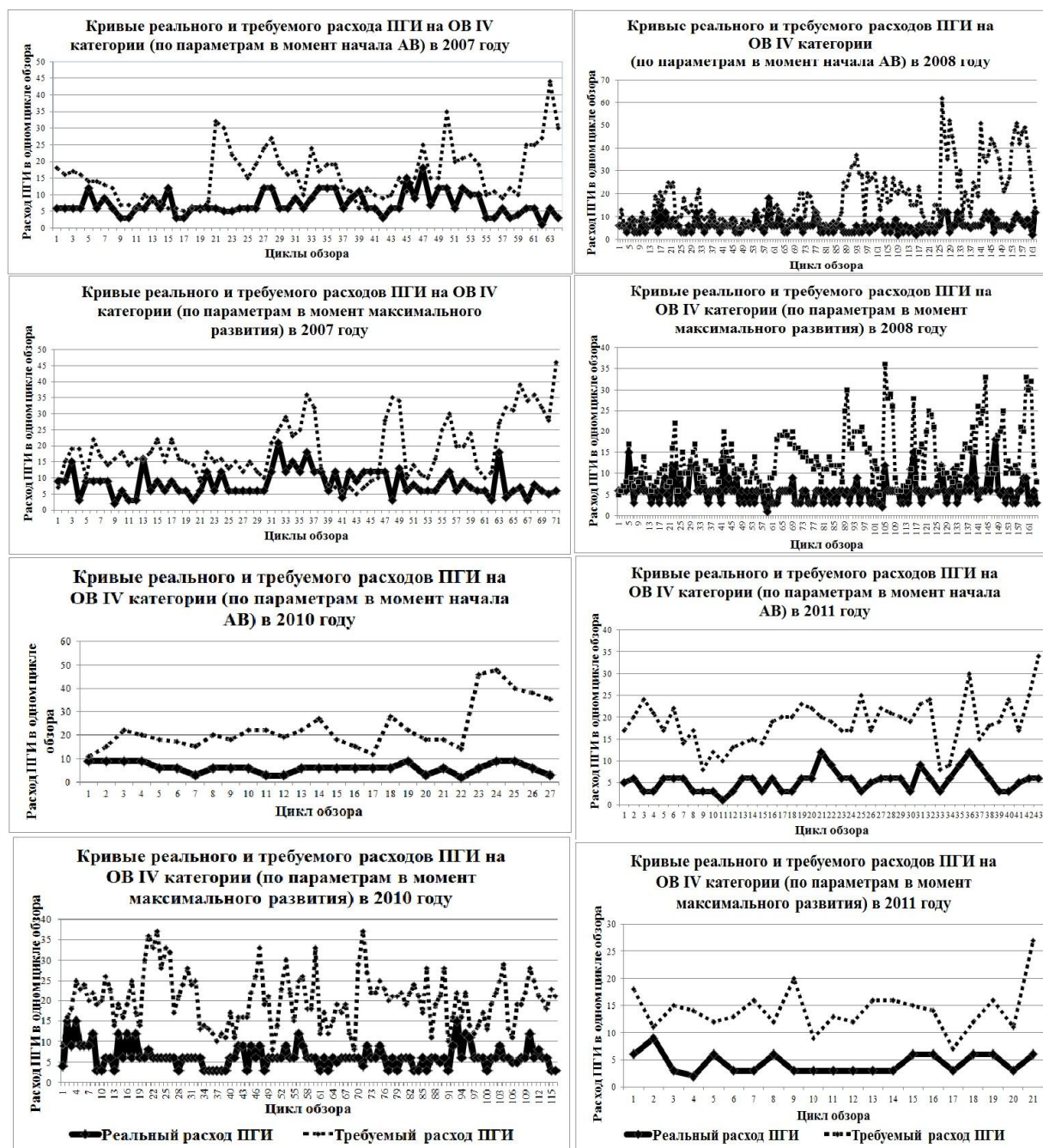


Рис. 2. Реальный и требуемый расход ПГИ в каждом фрагменте засева, следующем через 3,5 мин, в указанные годы

Отмечается систематический недозасев ОВ IV категории вместо массированного (перекрестного) засева, что приводило к недостаточной эффективности АВ и, как следствие, к многократному повтору засева и перерасходу ПГИ.

Из рис. 2 следует, что коэффициент засева ОВ не достигал даже 50 % требуемого. Особенно низкий коэффициент засева отмечался в 2010–2011 г. как для ОВ, которые были IV категории в момент начала засева, так и переросших в IV категорию в процессе засева. Среди 668 рассмотренных фрагментов засева встречаются только 23 фрагмента (3 %), в которых реальный расход ПГИ равен или превышает требуемый по технологии расход, из них 12 – в 2007 г. и 11 – в 2008 г.

Таким образом, в подавляющем числе фрагментов засева ОВ имеет место недозасев, обусловленный недостаточной скорострельностью применяемых ПУ, запретными секторами, непротреливаемыми участками на ЗТ, нехваткой ПГИ, отсутствием или недостаточной шириной зоны предзащиты. Недозасев ОВ не обеспечивает достижения желаемого эффекта, приводит к необходимости многократного повтора засева и лишнему расходу ПГИ. Несмотря на большой суммарный расход ПГИ, не удается добиться прерывания выпадения града, а возможны лишь некоторое ослабление градобития, сужение полосы града и его интенсивности.

Отсутствие зон предзащиты

Зоны предзащиты создаются со стороны преимущественного вторжения градовых облаков на ЗТ. Ее протяженность должна быть не менее 10 км, чтобы обеспечить нормальный засев наветренного и правого фланга навеса радиоэха градовых облаков до начала выпадения града на ЗТ. В облаках с правосторонним развитием зона засева располагается с правой стороны относительно перемещения ОВ, а в облаках с левосторонним – с левой. Создание такой зоны предзащиты требует размещения ПВ за границами ЗТ со стороны преимущественного вторжения градовых облаков.

В ВС Росгидромета это требование технологии практически не соблюдается, в результате чего наиболее ответственный наветренный фланг ОВ не удается засеять, так как он находится за пределами доставания ракетных пунктов. Это наглядно показано на рис. 3, где представлен пример фрагмента засева суперячейкового градового облака 30.08.2008 г.

К сожалению, это далеко не единичный случай. За 5 рассматриваемых лет он встречается на 188 фрагментах засева.

Недостаточная оперативность засева

Одним из наиболее частых случаев невыполнения требований технологии АВ является недостаточная оперативность засева мощных крупномасштабных и быстротечных градовых процессов. Это связано с несоответствием применяемого ракетного комплекса «Алазань-6» требованиям технологии ПГЗ. Ракетные пусковые установки (ПУ) с ручным наведением и 12 направляющими не обеспечивают требуемый темп засева из-за низкой скорострельности. Кроме того, вопреки требованиям технологии, зачастую на ракетных пунктах вместо двух ПУ используется одна. После пуска двух серий ПГИ по 6 шт. в ПУ не остается ПГИ. В период их перезарядки в течение 7–8 мин ракетный пункт не может выполнять команды, а соседние пункты не могут это компенсировать из-за их редкой сети и малого перекрытия зон засева. В результате этого иногда не удается обеспечить требуемый темп засева даже ОВ средней мощности.

Частой помехой (в 14,7 % случаях) в выполнении требований технологии АВ является систематическая нехватка ПГИ и вынужденная их экономия, связанная с недостаточным объемом финансирования для закупки необходимого количества.

Выводы и рекомендации

Проведенная оценка показывает, что причиной недостаточной эффективности воздействия на мощные градовые процессы является не только возможное несовершенство применяемой технологии ПГЗ, но и низкое качество реализации противоградовых операций, связанное с организационно-техническими причинами, приводящими к недозасеву ОВ.

Недозасев приводит к неполной реализации физического принципа предотвращения града, основанного на ускорении осадкообразования в областях будущего градообразования, расположенных в фидерных облаках, питающих основное градовое облако [5]. Для реализации этого принципа в объемах будущего градообразования (в объемах засева) следует создавать концентрацию кристаллизующих частиц порядка 10^7 м^{-3} .

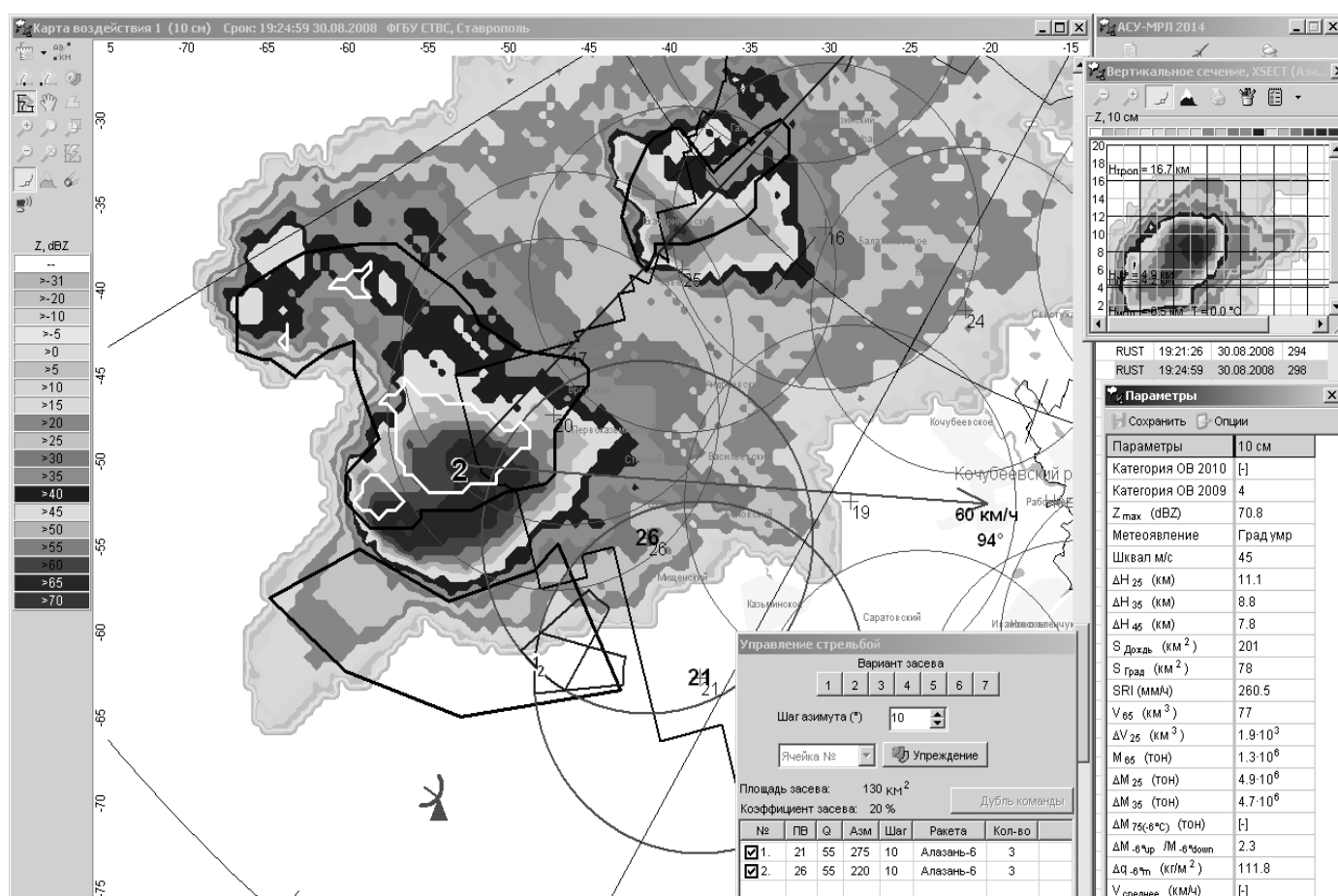


Рис. 3. Пример фрагмента засева, когда из-за недостаточной ширины зоны предзащиты не удается засеять большую часть площади засева суперячейкового градового процесса 30.08.2008 г. 19²⁵, вторгающегося на ЗТ со скоростью 60 км/ч

Применяемый противоградовый комплекс «Алазань-6» обеспечивает создание такой концентрации при засеве ОВ I, II и локальных ОВ III категории с небольшими объемами засева. В случае ОВ IV категории, имеющих объем засева в среднем около 40 км³, требуется внести не менее 4·10¹⁷ льдообразующих частиц. Это означает, что для гарантированного успеха при каждом из четырехкратных засевов ОВ IV категории, выполняемом с интервалом 3,5 мин, требуется вносить не менее 60 ПГИ «Алазань-6», имеющих выход льдообразующих частиц 6,7·10¹⁵. К сожалению, это требование, как видно из приведенного анализа, зачастую не выполнялось. Оно может быть выполнено в случае применения противоградового комплекса «Ас-Элия», в котором автоматизированная ракетная установка «Элия-2» имеет скорострельность в 3–4 раза выше, чем у приме-

нявшихся установок с ручным управлением, а ПГИ «Ас» имеет выход льдообразующих частиц не менее 1,6·10¹⁶.

В связи с этим дальнейшее повышение эффективности ПГЗ требует усовершенствования и комплексной автоматизации системы ПГЗ с целью устранения вышеперечисленных нарушений технологии АВ, включая:

- техническое переоснащение ВС Росгидромета на новые технические средства с заменой физически изношенных и морально устаревших радиолокаторов, ракетных установок и систем управления противоградовыми операциями;
- внедрение автоматизированного противоградового комплекса «Ас-Элия», который может обеспечить необходимый темп засева ОВ любой категории и мощности, имеет малый радиус мертвой зоны;

– расширение зоны предзащиты и решения вопроса взаимодействия соседних ВС при проведении воздействия на смежных территориях.

Литература

1. Абшаев А.М., Абшаев М.Т., Барекова М.В., Малкарова А.М. Руководство по организации и проведению противогорадовых работ. Нальчик, 2014. 508 с.
2. Абшаев М.Т., Малкарова А.М. Оценка эффективности предотвращения града. СПб., 2006. 279 с.
3. Абшаев М.Т., Малкарова А.М. О тенденции изменения климата на Северном Кавказе // Обзорные прикладной и промышленной математики. 2005. Т. 12, вып. 2. С. 282–283.
4. Абшаев М.Т., Герасименко И.В., Лозовой В.И., Малкарова А.М. О состоянии противогорадовой защиты в Ставропольском крае // Тр. ВГИ. Нальчик, 2014. Вып. 99. С. 31–40.
5. РД 52.37.731-2010. Организация и проведение противогорадовой защиты / М.Т. Абшаев, А.М. Абшаев, А.М. Малкарова. Нальчик, 2010. 84 с.

References

1. Abshaev A.M., Abshaev M.T., Barekova M.V., Malkarova A.M. *Rukovodstvo po organizatsii i provedeniyu protivogradovykh rabot* [Guide to the organization and conduct of anti-hail works]. Nalchik, 2014, 508 p.
2. Abshaev M.T., Malkarova A.M. *Otsenka effektivnosti predotvrashcheniya grada* [Evaluating the effectiveness of the prevention of hail]. Saint Petersburg, 2006, 279 p.
3. Abshaev M.T., Malkarova A.M. O tendentsii izmeneniya klimata na Severnom Kavkaze [On the trend of climate change in the North Caucasus]. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*, 2005, vol. 12, no 2, pp. 282-283.
4. Abshaev M.T., Gerasimenko I.V., Lozovoi V.I., Malkarova A.M. [On the state of antihail protection in the Stavropol region]. *Trudy VGI* [Proceedings of WGI]. Nalchik, 2014, vol. 99, pp. 31-40.
5. Abshaev M.T., Abshaev A.M., Malkarova A.M. *Organizatsiya i provedenie protivogradovoi zashchity* [Organization and carrying out antihail protection]. Certificate, no 52.37.731-2010. Nalchik, 2010, 84 p.

Поступила в редакцию

2 октября 2015 г.

УДК 537.9, 538.956, 534-16

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-13-17

ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ОТКЛИК НЕПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПЛАСТИН ИЗ ГОРЯЧЕПРЕССОВАННОЙ КЕРАМИКИ ЦТС-19 НА ТРЕХТОЧЕЧНОЕ МЕХАНИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ ПРИ НОРМАЛЬНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ*

© 2015 г. **В.А. Акопьян**, В.А. Чебаненко, Ю.Н. Захаров,
Е.В. Рожков, А.Г. Лутохин, М.А. Бунин, Е.С. Родинин, В.Г. Кузнецов

Акопьян Владимир Акович – кандидат технических наук, ведущий научный сотрудник, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, пр. Стачки, 200/1, г. Ростов-на-Дону, 344090.

Akopyan Vladimir Akovich – Candidate of Technical Science, Leading Researcher, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Stachki St., 200/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia.

Чебаненко Валерий Александрович – аспирант, младший научный сотрудник, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, пр. Стачки, 200/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: vchebanenko@sfned.ru

Chebanenko Valerii Aleksandrovich – Post-Graduate Student, Junior Researcher, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Stachki St., 200/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: vchebanenko@sfned.ru

Захаров Юрий Николаевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, руководитель лаборатории, Научно-исследовательский институт физики Южного федерального университета, пр. Стачки, 194, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: delta-46@mail.ru

Zakharov Yurii Nikolaevich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Senior Researcher, Head of Laboratory, Research Institute of Physics of the Southern Federal University, Stachki St., 194, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: delta-46@mail.ru

Рожков Евгений Васильевич – научный сотрудник, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, пр. Стачки, 200/1, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: rozhkov@math.sfned.ru

Rozhkov Evgenii Vasilievich – Researcher, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Stachki St., 200/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: rozhkov@math.sfned.ru

Лутохин Александр Геннадиевич – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, руководитель лаборатории, Научно-исследовательский институт физики Южного федерального университета, пр. Стачки, 194, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: lag1828@mail.ru

Lutokhin Aleksandr Gennadievich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Senior Researcher, Head of Laboratory, Research Institute of Physics of the Southern Federal University, Stachki St., 194, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: lag1828@mail.ru

Бунин Михаил Алексеевич – кандидат физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник, физический факультет, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 5, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: bunin@ip.sfned.ru

Bunin Mikhail Alekseevich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Senior Researcher, Physical Faculty, Southern Federal University, Zorge St., 5, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: bunin@ip.sfned.ru

Родинин Егор Сергеевич – студент, физический факультет, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 5, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: egorfomenko2009@yandex.ru

Rodinin Egor Sergeevich – Student, Physical Faculty, Southern Federal University, Zorge St., 5, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: egorfomenko2009@yandex.ru

Кузнецов Владислав Георгиевич – кандидат физико-математических наук, доцент, физический факультет, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 5, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: delta-46@mail.ru

Kuznetsov Vladislav Georgievich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Faculty of Physics, Southern Federal University, Zorge St., 5, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: delta-46@mail.ru

Исследованы неполяризованные сегнетокерамические пластины с различной степенью дефектности противоположных поверхностей. Установлено, что при воздействии гармонического трехточечного механического нагружения, создаваемого присоединенной массой 3,1 г по центру пластины на резонансной частоте, все без исключения образцы генерируют напряжение от 0,2 до 0,55 В на нагрузочном сопротивлении 360 кОм. Максимальное напряжение достигается в образцах при воздействии растягивающего механического напряжения на более дефектную сторону (присоединенная масса сверху – дефектная сторона внизу).

*Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части государственного задания, проект 1880, в части разработки и изготовления образцов для исследования. При частичной поддержке РФФИ (грант № 13-08-00754) и Южного федерального университета (тема № 213.01-2014/03ВГ) в части разработки и создания измерительного стенда параметров генератора осевого типа при трехточечном механическом нагружении.

Ключевые слова: *градиент деформации, пьезокерамика, трёхточечное нагружение, присоединённая масса, колебания, измерительный стенд.*

In this study unpolarized segnetoceramic plates with varying degree of imperfection of their opposite surfaces were investigated. It was found that under the influence of harmonic three-point mechanical loading at the resonant frequency, generated by the proof mass of 3.1 grams placed in the middle of the plate, all samples, without exception, generate a voltage of 0,2 to 0,55 V at load resistance of 360 ohms. The maximum voltage is reached in the samples under the influence of tensile stress in defective side (proof mass at upper surface – a defective side at lower surface).

Keywords: *deformation gradient, piezoelectric ceramics, three-point loading, proof mass, vibrations, test stand.*

Во второй половине XX и начале XXI в. были проведены исследования, посвященные оценке влияния различных электрофизических и геометрических факторов на характеристики и энергоэффективность пьезоэлектрических генераторов (ПЭГ). В основном эти работы касались ПЭГ кантилеверного типа [1–4].

Нами для исследования была выбрана трехточечная модель возбуждения активного элемента ПЭГ с присоединенной массой по его центру, занимающая промежуточное место между ПЭГ кантилеверного и осевого типов. Такая конструкция позволяет исследовать выходные параметры активного элемента ПЭГ с присоединенной массой в импульсном и гармоническом режимах нагружения. Осевое воздействие присоединенной массы по центру пластины приводит ее к упругому прогибу, который приводит к сжатию верхнего и растяжению нижнего приэлектродных слоев, а также созданию в них (либо изменению уже существующих стационарных) встречно-направленных градиентов деформации. На возможность возникновения поляризации под действием градиента деформации впервые указали В.С. Машкевич и К.Б. Толпыго [5, 6]. Ими было получено математическое выражение для связи между амплитудами поляризации и градиента деформации в акустической волне для структур типа алмаза. Первый шаг в построении феноменологического описания явления был предпринят Ш.М. Коганом [7]. Некоторые симметричные аспекты описания в рамках схемы, предложенной в [7], обсуждались в работе В.Л. Инденбома, Е.Б. Логинова и М.А. Осипова [8], где была предпринята попытка микроскопического описания флексоэлектрического эффекта для случая статического градиента деформации. Экспериментально этот эффект исследовался И.С. Желудевым [9]. Полученное на опыте значение коэффициента пропорциональности между поляриза-

цией и градиентом деформации оказалось на 4 порядка больше грубой теоретической оценки.

Целью настоящей работы является экспериментальное исследование влияния механического нагружения по трехточечной схеме на возможность получения электрического отклика от неполяризованных сегнетокерамических пластин, имеющих стационарный градиент деформаций и тангенциальные сжимающие напряжения в подэлектродном пространстве.

Образцы для исследования и методика эксперимента

Исследованы 4 партии пластин керамики ЦТС-19 размером $50 \times 4 \times 0,7$ мм³ с электродами на больших поверхностях из вожженного серебра. Перед нанесением электродов образцы были приведены в размер по толщине единым технологическим режимом механической обработки противоположных поверхностей. Затем в партиях 2–4 по 10 шт. одна из сторон дополнительно повреждалась обработкой шлифпорошками с размерами зерна 5, 10 и 20 мкм соответственно. Этим приемом достигались различная глубина диффузии Ag при вжигании в поверхность керамики и, соответственно, создание у противоположных сторон таких пластин металлокерамических слоев различной толщины. На границах этих слоев с массивом керамики в пластинах партий 2–4 формировались градиенты механических деформаций, а также тангенциальные сжимающие напряжения в приэлектродных слоях. Сжимающие напряжения обусловлены разницей температурных коэффициентов линейного расширения для Ag и сегнетокерамики при охлаждении от 730 °C после вжигания. На рис. 1 приведена гипотетическая схема распределения градиентов деформации в поверхностных слоях и объеме образцов, на рис. 2 – вид устройства трехточечного механического нагружения.

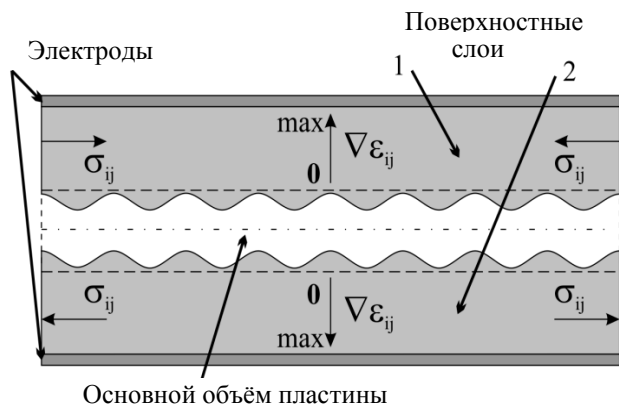


Рис. 1. Гипотетическая схема распределения градиента статической деформации $\nabla \varepsilon_{ij}$ на границах металлокерамических слоев с массивом керамики (1 – верхний слой; 2 – нижний), а также тангенциальных сжимающих напряжений σ_{ij} в приэлектродных слоях

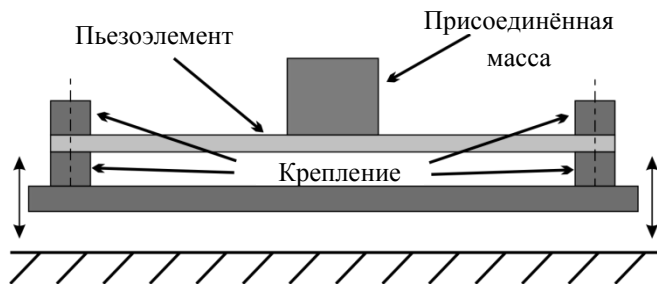


Рис. 2. Эскизный вид устройства трехточечного механического нагружения

На рис. 3 представлены структурная схема и фотография измерительного стенда.

Измерительный стенд состоит из возбуждителя механических колебаний – электромагнитного вибратора VEB Robotron 11077 6, на рабочем столе 5 которого устанавливается устройство трехточечного механического нагружения с пьезопластиной 1 и присоединенной массой 2 (M_n) на верхней стороне пьезопластины 1; оптического датчика механических перемещений 7; контроллера оптического датчика 8; датчика ускорения 9 заделки 3; согласующего устройства датчика ускорения 10; внешнего модуля АЦП/ЦАП E14-440D фирмы L-Card 11; усилителя мощности LV-102 на 50W 12; задающего генератора сигналов AFG 3022B Tektronix 13; компьютера 14 и сопротивления нагрузки R_n . Электрический отклик на механическое нагружение, выходное напряжение которого на резисторе нагрузки R_n , подается на вход АЦП. Оптический датчик 7 бесконтактным способом производит измерение механических перемещений поверхности присоединенной массы 2. Согласующим

устройством оптического датчика является его контроллер 8. Ускорение опоры измеряется датчиком ускорения ADXL-103 9.

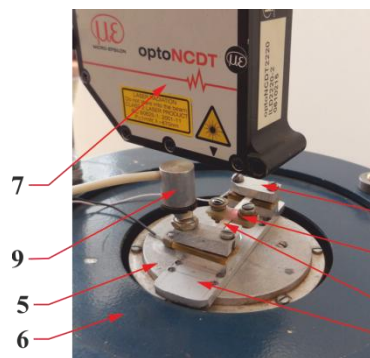
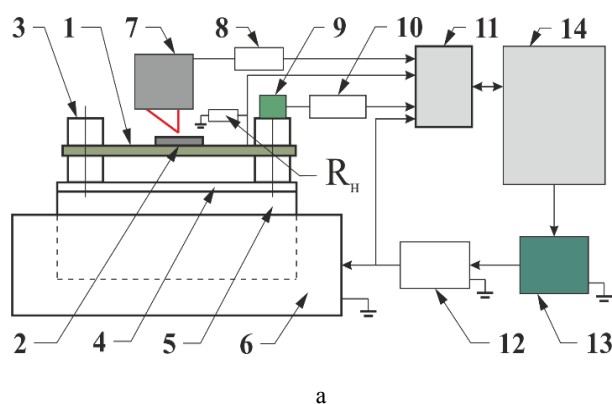


Рис. 3. Измерительный стенд: структурная схема (а) и фотография (б), где 1 – исследуемый объект; 2 – присоединенная масса; 3 – 1-я точка крепления; 4 – основание пьезогенератора; 5 – рабочий стол вибратора; 6 – возбуждатель колебаний электромагнитный вибратор VEB Robotron 11077; 7 – оптический датчик линейного перемещения OptoNCDT; 8 – контроллер оптического датчика; 9 – датчик ускорения ADXL 103 установлен на 2-й точке крепления; 10 – согласующее устройство датчика ускорения; 11 – внешний модуль АЦП/ЦАП E14-440D; 12 – усилитель мощности; 13 – задающий генератор сигналов AFG 3022B Tektronix; 14 – компьютер; R_n – сопротивление нагрузки

Результаты эксперимента и их обсуждение

На рис. 4 представлены зависимости выходного электрического напряжения от ускорения стола вибростенда при $M_n=3,1$ г, типичные для пластин партий № 1 (а) и № 3 (б), выбранных по признаку – повторяемость эффекта в партии 10 шт. Анализ рис. 4а (для пластины № 3 партии 1 – 3П1) показывает, что в партии № 1 после вжигания Ag градиенты статической деформации $\nabla \varepsilon_{i,j}$ на границах металлокерамических слоев с массивом керамики, а также тан-

генциальные сжимающие напряжения σ_{ij} в приэлектродных слоях создают устойчивую к многократным механическим воздействиям электрическую поляризованность $P_{ост}$. Этот вывод иллюстрируют кривые 1 и 2, первая из которых получена до, а вторая – после поворота пластины под $M_n=3,1$ на 180° . Выходной электрический сигнал от воздействия M_n обусловлен сжатием приповерхностного слоя 1 и растяжением слоя 2 (рис. 2). В этой партии для каждого положения поверхностей пластины относительно M_n величины выходного напряжения большего количества образцов совпадали, что свидетельствует об идентичности созданных поляризованностей $P_{ост}$ у противоположных граней.

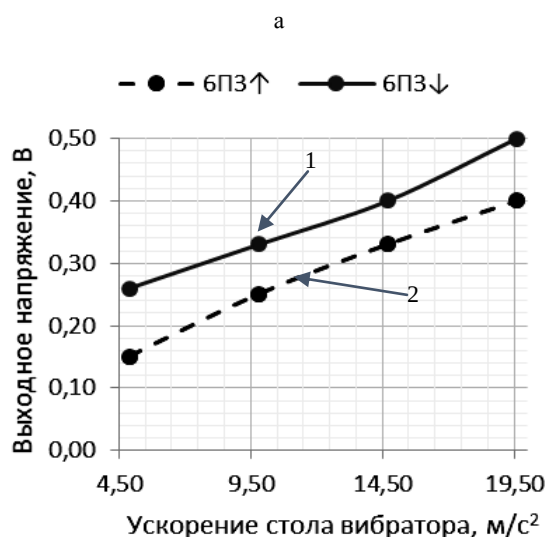
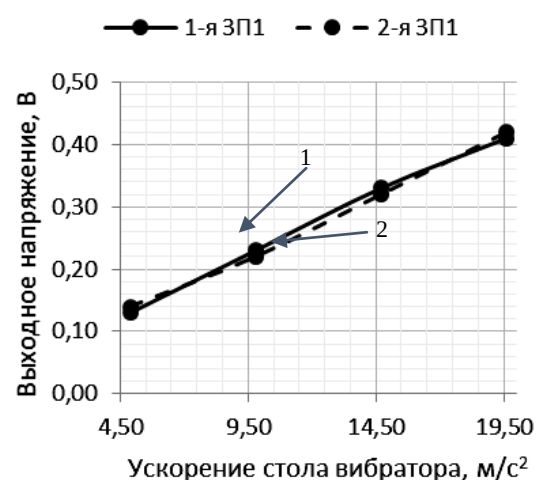


Рис. 4. Зависимости выходного напряжения образца до поворота на 180° (кривая 1) и после (кривая 2) при $M_n=3,1$ г: а – из партии № 1; б – из партии № 3

Из рис. 4б видно, что образец 6ПЗ показывает 25%-е увеличение электрического отклика, когда более дефектная грань расположена внизу, а M_n – сверху. В этом случае, как и в партии №1, прогиб пластины под M_n создает растягивающее механическое напряжение, противоположное по направлению к существующему, созданному при образовании металлокерамического слоя у этой поверхности. Разница в величине выходного напряжения может быть объяснима более высоким значением остаточной поляризации $P_{ост}$ у этой поверхности. Основным результатом проведенного исследования является факт появления $P_{ост}$ у противоположных поверхностей пластин керамики ЦТС-19 при вжигании Ag. Величина $P_{ост}$ зависит от степени шероховатости поверхности перед нанесением электродов, а электрический отклик является суммой сигналов, возникающих при сжатии одной и растяжении противоположной поверхности пластины. В связи с тем, что эффект исследован при комнатной температуре в сегнетоэлектрической фазе для ЦТС-19, невозможно однозначно трактовать его как флексоэлектрический и «гигантский». Но с большой вероятностью он может возникать в очень тонком переходном слое между границей металлокерамического слоя и объемным однородным массивом керамики. В предположении что толщина этого слоя составляет ~ 1 мкм, он генерирует при нагрузке 360 кОм электрический потенциал с напряженностью электрического поля до 50 кВ/см. Полученные значения выходного напряжения 0,5 В для толщины пластины 0,7 мм без предварительной поляризации в электрическом поле уже представляют практический интерес для создания многослойных, из более тонких пластин, активных элементов ПЭГ осевого типа. Необходимы дальнейшие исследования этого эффекта в материалах с температурой Кюри ниже $T_{комн}$, а также сегнетоэлектриков-релаксоров.

Литература

1. Erturk A., Inman D.J. Piezoelectric Energy Harvesting. N.Y., 2011. 402 p.
2. Shu Y.C., Lien I.C. Efficiency of energy conversion for a piezoelectric power harvesting system // J. of Micromechanics and Microengineering. 2006. Vol. 16, № 11. P. 2429.
3. Priya S., Inman D.J. Energy Harvesting Technologies. N.Y., 2009. 552 p.
4. Akopyan V.A., Parinov I.A., Rozhkov E.V., Zakharov Yu.N., Shevtsova M.S. Energetic Efficiency of Cantilever Type Piezoelectric Generators // Advanced Materials. N.Y., 2014. P. 355–363.
5. Машикевич В.С., Толпыго К.Б. Электрические, оптические и упругие свойства кристаллов типа алмаза // ЖЭТФ. 1957. Т. 32. С. 520–525.

6. Толпыго К.Б. Исследование длинноволновых колебаний кристаллов типа алмаза с учетом дальнедействующих сил // ФТТ. 1962. Т. 4. С. 1765–1777.

7. Коган Ш.М. Пьезоэлектрический эффект при неоднородной деформации и акустическое рассеяние носителей тока в кристаллах // ФТТ. 1963. Т. 5. С. 2829–2831.

8. Инденбом В.Л., Логинов Е.Б., Осипов М.А. Флексоэлектрический эффект и строение кристаллов // Кристаллография. 1981. Т. 26. С. 1157–1162.

9. Желудев И.С. Симметрия и пьезоэлектрические свойства кристаллов // Czech. J. Phys. Ser. B. 1966. Vol. 16. P. 368–381.

References

1. Erturk A., Inman D.J. *Piezoelectric Energy Harvesting*. N.Y., 2011, 402 p.

2. Shu Y.C., Lien I.C. Efficiency of energy conversion for a piezoelectric power harvesting system. *J. of Micromechanics and Microengineering*, 2006, vol. 16, no 11, p. 2429.

3. Priya S., Inman D.J. *Energy Harvesting Technologies*. N.Y., 2009, 552 p.

4. Akopyan V.A., Parinov I.A., Rozhkov E.V., Zakharov Yu.N., Shevtsova M.S. Energetic Efficiency of Cantilever Type

Piezoelectric Generators. *Advanced Materials*. N.Y., 2014, pp. 355–363.

5. Mashkevich V.S., Tolpygo K.B. Elektricheskie, opticheskie i uprugie svoistva kristallov tipa almaza [Electric, optical and elastic properties of crystals such as diamond]. *ZhETF*, 1957, vol. 32, pp. 520–525.

6. Tolpygo K.B. Issledovanie dlinnovolnovykh kolebaniy kristallov tipa almaza s uchetom dal'nodeistvuyushchikh sil [A study of long-wave oscillations of the crystal diamond type, taking into account long-range forces]. *FTT*, 1962, vol. 4, pp. 1765–1777.

7. Kogan Sh.M. P'ezoelektricheskii effekt pri neodnorodnoi deformatsii i akusticheskoe rasseyanie nositelei toka v kristallakh [The piezoelectric effect in inhomogeneous deformation and acoustic scattering of charge carriers in crystals]. *FTT*, 1963, vol. 5, pp. 2829–2831.

8. Indenbom V.L., Loginov E.B., Osipov M.A. Fleksoelektricheskii effekt i stroenie kristallov [The flexoelectric effect and structure of crystals]. *Kristallografiya*, 1981, vol. 26, pp. 1157–1162.

9. Zheludev I. S. Simmetriya i p'ezoelektricheskie svoistva kristallov [Symmetry and piezoelectric properties of crystals]. *Czech. J. Phys. Ser. B.*, 1966, vol. 16, pp. 368–381

Поступила в редакцию

2 октября 2015 г.

УДК 533.9.01

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-18-24

ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА УДАРНЫХ ВОЛН НЕПРЕРЫВНОГО ТИПА В ЗАПЫЛЕННОЙ ПЛАЗМЕ*

© 2015 г. М.Н. Аль Наджм, В.В. Прудских

Аль Наджм Мохаммед Наджи – доцент, кафедра астрономии и космоса, Колледж науки Университета Багдада, г. Багдад, Ирак; аспирант, кафедра физики космоса, физический факультет, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 5, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: mohalnajm72@yahoo.com

Al Najm Mohammed Naji – Associate Professor, Department of Astronomy and Space, College of Science of the Baghdad University, Baghdad, Iraq; Post-Graduate Student, Department of Space Physics, Faculty of Physics, Southern Federal University, Zorge St., 5, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: mohalnajm72@yahoo.com

Прудских Вячеслав Владимирович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра общей физики, физический факультет, Южный федеральный университет, ул. Зорге, 5, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: slavadhb@mail.ru

Prudskikh Vyacheslav Vladimirovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of General Physics, Faculty of Physics, Southern Federal University, Zorge St., 5, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: slavadhb@mail.ru

Исследуется роль заряженных пылевых частиц в структуре косой ударной волны непрерывного типа, распространяющейся в слабоионизованной плазме. Изучаются условия, когда плотность нейтрального газа превышает 10^4 см^{-3} , характерные для межзвездных молекулярных облаков на начальной стадии коллапса. В этом случае заряженные пылинки становятся дополнительным источником генерации тока Холла и вносят существенный вклад в структуру ударной волны. Главным результатом работы является вывод об увеличении ширины фронта ударной волны из-за наличия заряженных пылинок. Обнаружено, что для ударных волн умеренной интенсивности стационарные решения в ряде случаев отсутствуют. Данный эффект является новым, а его обсуждение не проводилось ранее в научной литературе.

Ключевые слова: ударная волна, пылевая плазма, магнитная гидродинамика, ток Холла.

The role of charged collisional particles in the structure of oblique shock wave continuous type, propagating in a weakly ionized plasma. We study the conditions under which the neutral gas density exceeds 10^4 cm^{-3} , typical of the interstellar molecular clouds in the initial stage of collapse. In this case, the charged collisional particles are an additional source of current generation Hall and make a significant contribution to the structure of the shock wave. The main result is to increase the output width of the shock front of - the presence of the charged dust particles. It has been found that moderate-intensity shock waves, stationary solutions in some cases, absent. This effect is novel, as it previously has not been discussed in the literature.

Keywords: shock wave, dusty plasmas, magnetic hydrodynamics, Hall current.

Введение

Ударные волны, распространяющиеся в слабоионизованной замагниченной астрофизической плазме, представляют значительный интерес с точки зрения своей структуры, знание которой позволяет предсказать уровень радиационно излучаемой энергии и для построения моделей химической и физической эволюции газа в межзвездной среде.

Первоначально расчет структуры ударных волн основывался на том, что компоненты межзвездной среды – магнитное поле, заряженные частицы и нейтральный газ – представляют собой единое целое, замагниченную жидкость. Электроны и ионы приклеены к магнитным силовым линиям на масштабах электронного и ионного ларморовского радиуса соответственно. Однако нейтральная

компонента связана с магнитным полем лишь благодаря столкновениям с заряженными частицами, увлекающими их вслед за возмущениями магнитных силовых линий. С другой стороны, столкновения с нейтральными частицами стремятся отсоединить заряды (прежде всего наиболее массивные вследствие их большего ларморовского радиуса) от силовых линий поля. Поэтому условие вмороженности справедливо только тогда, когда: во-первых, заряды могут считаться хорошо связанными с силовыми линиями поля; во-вторых, взаимодействие между нейтральным газом и плазмой настолько сильное, что все компоненты слабоионизованной плазмы, включая нейтралы, движутся как единое целое. В межзвездной среде первое условие обычно выполняется хорошо, однако второе часто нарушается. В частности, если степень ионизации среды достаточно мала, то

*Работа выполнена при поддержке проекта 2663 Министерства образования и науки РФ и Министерства высшего образования и научных исследований Ирака (The Ministry of Higher Education and Scientific Research in Iraq).

связь нейтрального газа и плазмы не является идеальной. Впервые на это обратил внимание Муллан в 1971 г. [1]. Он показал, что структура ударной волны будет существенно изменяться, когда распространяющаяся ударная волна вызывает на своем фронте относительное движение нейтрального газа и плазмы. За фронтом ударной волны среда испытывает сжатие, а магнитное поле усиливается. При этом, если степень ионизации плазмы низкая, вовлечение нейтральных частиц в совместное движение с заряженными компонентами плазмы происходит постепенно, на расстояниях, существенно больших, чем длина свободного пробега нейтральных частиц (определяемой столкновениями нейтралов между собой). В результате толщина фронта ударной волны оказывается на несколько порядков больше той, что имеет место в нейтральном газе. Эта первая работа по ударным волнам, внутри фронта которых существует относительное движение компонент, носила скорее академический интерес, так как ширина фронта достаточно быстрой ударной волны, внутри которого имеет место различие в скорости движения нейтральной и заряженной жидкости, оказывалось значительно меньше того, на котором существенно радиационное охлаждение газа. В этом случае условия скачка применимы к областям, расположенным по обе стороны переходного слоя. Выводы работы Муллана касались, таким образом, структуры самого фронта волны.

В 1980 г. Дрейн [2] изучил ту же проблему и пришел к следующим результатам. Структура фронта ударной волны существенно определяется соотношением между временем охлаждения нейтрального газа τ_c , и временем τ_a , за которое нейтралы ускоряются потоком ионов. Если $\tau_c \gg \tau_a$, то процесс ускорения является адиабатическим. Тогда параметры среды по обе стороны связаны условиями Рэнкина – Гюгонио, а для описания волны подходит одножидкостный подход. Как показывают расчеты, такая модель может использоваться при описании ударных волн в молекулярных облаках, распространяющихся со скоростью более 40–50 км/с. В противоположном случае $\tau_a \gg \tau_c$ ускоряемая нейтральная жидкость остается изотермической. В этом случае, а также если времена τ_a и τ_c сравнимы между собой, все гидродинамические переменные волны являются непрерывными, а ударная волна называется ударной волной непрерывного типа (C-shock в англоязычной литературе).

Из сказанного выше следует, что структура ударных волн, распространяющихся в межзвездной среде, в значительной степени зависит от величины

магнитного поля, определяющего значение альфвеновской скорости V_A , а также от степени ионизации среды. Если степень ионизации мала, то малая частота ионно-нейтральных столкновений приводит к тому, что раздельная динамика плазмы и нейтрального газа проявляется в достаточно протяженной области, составляющей порядка сотых долей парсека.

Заряженные пылевые частицы повсеместно распространены в космосе, и их роль значительна в самых разных астрофизических явлениях. Взаимодействие нейтрального газа и пылевых частиц имеет важные последствия для физики и химии ударных волн, распространяющихся в молекулярных облаках, а их инерция может существенно модифицировать динамику распространения ударных волн непрерывного типа. Популяция межзвездных пылинок чрезвычайно широка – от полиароматических углеводородов до частиц микронных размеров. В слабоионизованной среде заряженные пылинки влияют на динамику ударной волны посредством двух механизмов: они увеличивают эффективность взаимодействия заряженной и нейтральной компонент плазмы, а также влияют на величину альфвеновской скорости, понижая ее за счет увеличения инерции заряженной жидкости.

Адекватное описание структуры ударной волны непрерывного типа невозможно без учета присутствия в межзвездной среде заряженных пылинок, поскольку в плазме с низкой степенью ионизации суммарных заряд пылевых частиц, приобретенный ими при столкновениях с электронами и ионами, сравним с электронным зарядом плазмы. Впервые на это обратил внимание Уордл в работе 1998 г. [3]. Рекомбинация зарядов на поверхности пылевых частиц понижает степень ионизации плазмы и приводит к уменьшению ее магнитной активности. Кроме того, относительное движение пылевой компоненты плазмы и нейтрального газа является дополнительным источником потерь и диффузионного рассасывания магнитного поля волны. В то же время заряженные пылинки в силу своей высокой инерции способны достаточно долго дрейфовать относительно электронно-ионной компоненты плазмы, внося тем самым дополнительный вклад в ток плазменных зарядов и генерацию магнитного поля волны внутри ее фронта. Такая возможность также связана с тем, что пылевые частицы в условиях межзвездных молекулярных облаков являются фактически отсоединенными от силовых линий магнитного поля. В самом деле, для молекулярных облаков величина магнитного поля составляет $B_0 \approx 10^{-5}$ Гс, температура 10–30 К, а плотность нейтрального

газа $n_n \approx 10^2 - 10^4 \text{ см}^{-3}$. Степень привязки пылевой частицы к силовой линии магнитного поля задается параметром $\beta_d = \omega_{cd} / \nu_{dn}$, где $\omega_{cd} = ZeB_0 / m_d c$ – циклотронная частота пылинок (Z – число элементарных зарядов, осевших на поверхности пылевой частицы; m_d – ее масса); $\nu_{dn} = (m_n / m_d) n_n \sigma_d V_T$ – частота их столкновений с нейтральным газом. Здесь m_n – масса нейтральной частицы (как правило, это молекулярный водород); σ_d – поперечное сечение пылинки; V_T – тепловая скорость молекул. Если $\beta_d \gg 1$, то заряды строго следуют за силовыми линиями магнитного поля. Если же $\beta_d = 1$, то они оказываются не связанными магнитным полем и вовлекаются в движение лишь благодаря столкновениям с нейтрами (как доминирующей по плотности компонентой). Несложно показать, что для частиц с массой 10^{-12} г и зарядом $Z = 10$ выполняется условие $\beta_d \approx 10^{-4} \ll 1$.

В работе Уордла [3] исследовалась роль пылевой компоненты плазмы в структуре косой ударной волны С-типа. Прежде всего, нужно отметить, что для ударных волн данного вида, распространяющихся под углом к магнитному полю, оказываются возможными два режима. Первый – относительно слабые ударные волны, скорость распространения V_s которых лежит в пределах $V_A \cos \theta < V_s < \sqrt{2} V_A \operatorname{ctg} \theta$, где θ – угол между нормалью к фронту волны и магнитным полем перед ней. Второй режим реализуется при условии $V_s > \sqrt{2} V_A \operatorname{ctg} \theta$. Эти два вида решений появляются как следствие анализа уравнений, описывающих структуру фронта волны. Плотность среды увеличивается после прохождения ударных волн обоих типов. Однако после прохождения интенсивных волн напряженность компоненты магнитного поля, параллельная фронту, не изменяется по направлению, тогда как для слабых и умеренных волн она поворачивается на 180° .

Задачей настоящей работы является изучение роли пылевых частиц в структуре косой ударной волны непрерывного типа умеренной интенсивности в межзвездных молекулярных облаках. Предполагается, что инерционная компонента среды заключена в нейтральном газе, а тепловое давление мало по сравнению с магнитным. Определена структура магнитного поля внутри фронта волны. Кроме того, обнаружено, что в некоторых областях интервала $V_A \cos \theta < V_s < \sqrt{2} V_A \operatorname{ctg} \theta$ плотность газа внутри фронта обращается в бесконечность, а скорость его набегания на фронт становится отрицательной, что соответствует отражению среды от ударной волной и отсутствию стационарных решений.

Редукция базовых уравнений

Рассмотрим распространение ударной волны вдоль оси z . Обозначим напряженность магнитного поля волны $\mathbf{B}$, а напряженность магнитного поля в плазме перед ударной волной $\mathbf{B}_0$. Плазму будем считать слабоионизованной, а ее основную массовую долю – заключенной в нейтральном газе. Обозначим индексами e, i, d, n переменные, относящиеся к электронам, ионам, пылинкам и нейтральным частицам. Пренебрежем столкновениями электронов и эффектом конечной продольной проводимости плазмы, не существенным для крупномасштабных ударных волн. Малая плотность заряженных компонент по сравнению с нейтральной позволяет пренебречь в уравнениях движения электронов, ионов и пылевых частиц их инерцией, а также вкладом столкновений между ионами и пылью в динамику плазмы. Тогда уравнения движения для различных сортов плазмы запишутся в виде

$$\rho_n \frac{d\mathbf{v}_n}{dt} = -\rho_n \nu_{ni} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_i) - \rho_n \nu_{nd} (\mathbf{v}_n - \mathbf{v}_d), \quad (1)$$

$$0 = -n_e e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_e \times \mathbf{B}] \right), \quad (2)$$

$$0 = n_i e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] \right) - \rho_i \nu_{in} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n), \quad (3)$$

$$0 = -Z n_d e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}] \right) - \rho_d \nu_{dn} (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_n). \quad (4)$$

Здесь ρ_α, n_α и $\mathbf{v}_\alpha$ – массовая, объемная плотности и скорости частиц сорта $\alpha = e, i, d, n$; Z – заряд пылинки. Между частотами столкновений имеются соотношения

$$\rho_j \nu_{jn} = \rho_n \nu_{nj}, \quad (5)$$

следующие из закона сохранения импульса $j = i, d$.

Из уравнений (1)–(4) получим уравнение движения МГД элемента

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}, \quad (6)$$

в котором $\rho = \rho_n + \rho_e + \rho_i + \rho_d \approx \rho_n$; $\mathbf{V} = \mathbf{v}_n$ и учтено, что ток

$$\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{v}_i - n_e \mathbf{v}_e - Z n_d \mathbf{v}_d) \quad (7)$$

связан с полем $\mathbf{B}$ уравнением Максвелла

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}. \quad (8)$$

Выразим электронную скорость $\mathbf{v}_e$ из (7)

$$\mathbf{v}_e = \frac{n_i}{n_e} \mathbf{v}_i - \frac{Z n_d}{n_e} \mathbf{v}_d - \frac{\mathbf{J}}{en_e} \quad (9)$$

и найдем с ее помощью из (2) величину электрического поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{n_i}{n_e} [\mathbf{v}_i \times \mathbf{B}] + \frac{1}{c} \frac{Zn_d}{n_e} [\mathbf{v}_d \times \mathbf{B}] + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e c}. \quad (10)$$

Используя условие квазинейтральности $n_i = n_e + Zn_d$ и исключая поле $\mathbf{E}$ из уравнений (3) и (4), запишем их в виде (m_i и m_d – массы иона и пылевой частицы)

$$\frac{1}{c} \frac{Zn_d}{n_e} [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_d) \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e c} + \frac{m_i v_{in}}{e} (\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n) = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{c} \frac{n_i}{n_e} [(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_d) \times \mathbf{B}] - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{en_e c} - \frac{m_d v_{dn}}{Ze} (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_n) = 0. \quad (12)$$

Перейдем к безразмерной величине магнитного поля $\mathbf{B}/B_0 \rightarrow \mathbf{B}$ и относительным скоростям ионов и пыли

$$\mathbf{V}_i = \mathbf{v}_i - \mathbf{v}_n, \quad \mathbf{V}_d = \mathbf{v}_d - \mathbf{v}_n. \quad (13)$$

Вводя обозначения $\delta = Zn_d/n_e$, $v_{Ai}^2 = B_0^2/4\pi\rho_i$, $\Omega_R = (Zn_d/n_e)\omega_{ci}$, $\omega_{ci} = eB_0/m_i c$, $\omega_{cd} = ZeB_0/m_d c$, перепишем (11) и (12):

$$(1+\delta)v_{Ai}^2(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \Omega_R[(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_d) \times \mathbf{B}] + v_{in} \mathbf{V}_i, \quad (14)$$

$$(1+\delta)v_{Ai}^2 \frac{\omega_{cd}}{\omega_{ci}} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \quad (15)$$

$$= (1+\delta)\omega_{cd}[(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_d) \times \mathbf{B}] - v_{dn} \mathbf{V}_d.$$

Исключая из уравнения Максвелла

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -c \nabla \times \mathbf{E} \quad (16)$$

поле $\mathbf{E}$ с помощью (3), получим уравнение индукции в форме

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) + \nabla \times (\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}) - \frac{1}{\beta_i} \nabla \times \mathbf{V}_i, \quad (17)$$

где $\beta_i = \omega_{ci}/v_{in}$. Параметр β_i определяет степень связи ионов с магнитным полем аналогично описанному во введении параметру β_d для пылинок.

Последующий алгоритм нахождения уравнения индукции состоит в исключении из уравнений (14), (15) относительной скорости пыли $\mathbf{V}_d$ и получении явной связи между $\mathbf{V}_i$ и $\mathbf{B}$, которая позволит представить (17) в стандартной для холловской МГД форме. Для этих целей предварительно выразим из (14) и (15) векторную конструкцию $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$ и найдем соотношение между $\mathbf{V}_i$ и $\mathbf{V}_d$:

$$\frac{\mathbf{V}_i}{\beta_i} + \frac{\mathbf{V}_d}{\beta_d} = [(\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_d) \times \mathbf{B}], \quad (18)$$

в котором введено $\beta_d = \omega_{cd}/v_{dn}$. Используя (14), запишем

$$\mathbf{V}_d = (1+\delta) \frac{\beta_d}{\Omega_R} V_{Ai}^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - v_{in} \mathbf{V}_i, \quad (19)$$

$$\mathbf{V}_i - \mathbf{V}_d = \left(1 + \frac{1+\delta}{\delta} \frac{\beta_d}{\beta_i}\right) \mathbf{V}_i - (1+\delta) \frac{\beta_d}{\Omega_R} V_{Ai}^2 (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}. \quad (20)$$

С учетом (20) уравнение (14) можно представить в виде

$$\Omega_R X [\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}] + v_{in} \mathbf{V}_i = (1+\delta) V_{Ai}^2 [(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \beta_d ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (21)$$

где

$$X = 1 + \frac{1+\delta}{\delta} \frac{\beta_d}{\beta_i}. \quad (22)$$

Скалярное домножение уравнения (21) на $\mathbf{B}$ показывает, что

$$(\mathbf{V}_i \cdot \mathbf{B}) = 0. \quad (23)$$

Тогда, умножая (21) на $\mathbf{B}$ векторно, найдем

$$\mathbf{V}_i = \frac{(1+\delta) V_{Ai}^2}{v_{in} (1+\delta^2 \beta_i^2 X^2)} [(1+\delta X \beta_i \beta_d) (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} - (\delta X \beta_i - \beta_d) ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (24)$$

$$[\mathbf{V}_i \times \mathbf{B}] = \frac{(1+\delta) V_{Ai}^2}{v_{in} (1+\delta^2 \beta_i^2 X^2)} [(1+\delta X \beta_i \beta_d) ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + (\delta X \beta_i - \beta_d) (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}]. \quad (25)$$

Подстановка (24) и (25) в (17) приводит к уравнению индукции в форме

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \eta_H \nabla \times ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) + \eta_A \nabla \times [((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}], \quad (26)$$

где коэффициенты холловской и амбиполярной диффузии магнитного поля определены как

$$\eta_H = \frac{cB}{4\pi en_e} \frac{1 + \beta_i \beta_d - (\beta_i - \beta_d)Y}{1 + Y^2}, \quad \eta_A = \frac{cB}{4\pi en_e} \frac{\beta_i - \beta_d + (1 + \beta_i \beta_d)Y}{1 + Y^2} \quad (27)$$

и

$$Y = \delta \beta_i X. \quad (28)$$

В отсутствие пыли $\delta = 0$ диффузионные коэффициенты переходят в известные выражения (см. обзор [4])

$$\eta_H = \frac{cB}{4\pi en_e}, \quad \eta_A = \frac{V_{Ai}^2}{v_{in}}. \quad (29)$$

С другой стороны, как отмечалось выше, между пылевой и нейтральной компонентами существует жесткая связь $\beta_d = 0$. В этом случае соотношения (27) упрощаются к виду

$$\eta_H = \frac{cB}{4\pi en_e} \frac{1 - \delta \beta_i^2}{1 + \delta^2 \beta_i^2}, \quad \eta_A = \frac{cB}{4\pi en_e} \frac{(1+\delta) \beta_i}{1 + \delta^2 \beta_i^2}. \quad (30)$$

Этот результат был получен в работе [5] при исследовании магниторотационной неустойчивости в запыленном протопланетном диске.

Так как мы предполагаем, что рассматриваемая волна стационарна $\partial/\partial t = 0$, то из уравнения непрерывности для нейтральной компоненты следует

$$\rho V_z = \rho_0 V_s, \quad (31)$$

где ρ_0 – плотность невозмущенной плазмы; V_s – скорость плазмы перед фронтом ударной волны в связанной с ней системе отсчета. Последнее соотношение позволяет проинтегрировать компоненты векторного уравнения (6):

$$\rho_0 V_s V_x = \frac{(B_x - B_{x0}) B_{z0}}{4\pi}, \quad \rho_0 V_s V_y = \frac{B_y B_{z0}}{4\pi},$$

$$\rho_0 V_s (V_s - V_z) = \frac{B_{x0}^2 - B_x^2 - B_y^2}{8\pi}. \quad (32)$$

Здесь в силу уравнения Максвелла

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0, \quad (33)$$

компонента магнитного поля B_z является постоянной величиной и обозначена как B_{z0} .

Наконец, уравнение (26) в проекциях на оси декартовой системы координат, связанной с фронтом волны, дает

$$V_y B_{z0} - V_z B_y = B_{z0} \frac{\partial B_x}{\partial \xi} + \alpha \left(\frac{B_y}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} B_x^2 + B_y^2 - B_{z0}^2 \frac{\partial B_y}{\partial \xi} \right) + C_x,$$

$$V_z B_x - V_x B_{z0} = -B_{z0} \frac{\partial B_y}{\partial \xi} - \alpha \left(\frac{B_x}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} B_x^2 + B_y^2 + B_{z0}^2 \frac{\partial B_x}{\partial \xi} \right) + C_y,$$

$$V_x B_y - V_y B_x = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} B_x^2 + B_y^2 +$$

$$+ \alpha B_{z0} \left(B_y \frac{\partial B_x}{\partial \xi} + B_x \frac{\partial B_y}{\partial \xi} \right) + C_z. \quad (34)$$

Здесь мы перешли к пространственной координате ξ , связанной с z соотношением $\xi = z/|\eta_H|$, коэффициент α определяется как

$$\alpha = \frac{(1+\delta)\beta_i}{\delta\beta_i^2 - 1}. \quad (35)$$

Считая, что при $\xi \rightarrow \pm\infty$ переменные $V_x, V_y, B_y = 0$, $V_z = V_s$, $B_x = B_{x0}$ и $\partial/\partial \xi = 0$, найдем, что постоянные интегрирования в уравнениях (34) равны $C_x = C_z = 0$ и $C_y = V_s B_{x0}$.

Соотношения (34) и система алгебраических связей между переменными (32) составляют полную систему уравнений нашей задачи.

Обсуждение результатов и выводы

Система трех обыкновенных дифференциальных уравнений (34) содержит шесть переменных. Наложение трех дополнительных условий связи (32), следующих из уравнения движения (6), позволяет разрешить ее, используя численные методы.

Рассматривались ударные волны непрерывного типа умеренной интенсивности, когда скорость их распространения удовлетворяет условию

$$V_A \cos \theta < V_s < \sqrt{2} V_A \operatorname{ctg} \theta, \quad (36)$$

а через коэффициенты холловской проводимости и амбиполярной диффузии, полученными нами в форме (30), учитывается вклад заряженных пылевых частиц в электродинамические свойства фронта ударной волны. Кроме того, исследовалось, является ли условие (36), вытекающее из анализа параметров плазмы далеко позади фронта ударной волны, достаточным для существования ударных волн данного типа. Полученные результаты следующие.

На рис. 1 представлена структура ударной волны умеренной интенсивности для различных скоростей ее распространения.

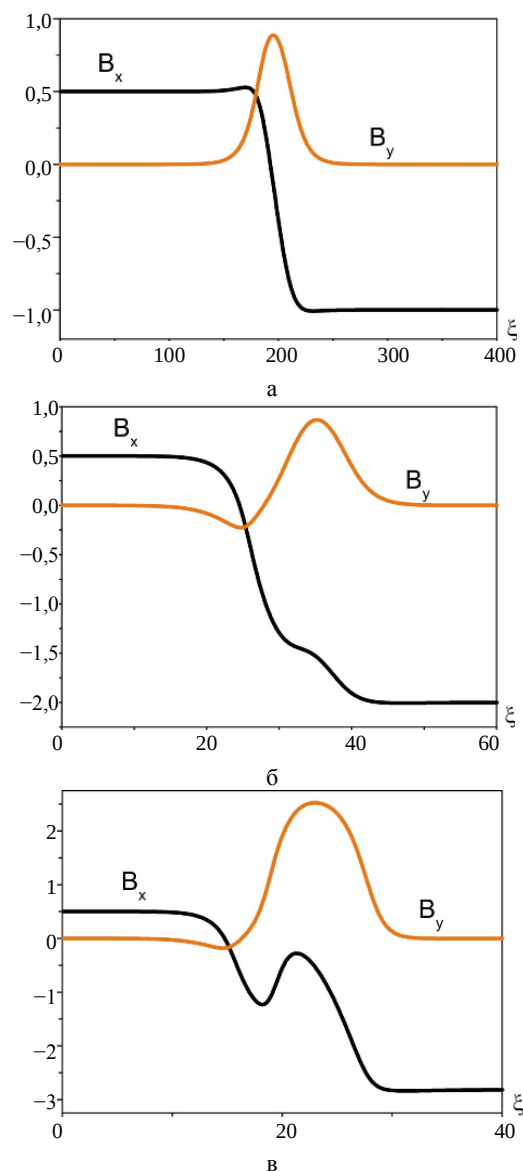


Рис. 1. Структура ударной волны непрерывного типа. $\theta = 30^\circ$, $\alpha = 3$; а – $V_s/V_A = 1$; б – $V_s/V_A = 1,5$; в – $V_s/V_A = 2$

С увеличением роли тока Холла (с уменьшением параметра α) диапазон V_s/V_A существования ударных волн уменьшается. Так, для $\alpha=1$ (рис. 2) стационарные решения отсутствуют в интервале $1,4 < V_s/V_A < 2,56$. При $\alpha=0,5$ (рис. 3) решения в виде ударных волн непрерывного типа не реализуются, если $1,2 < V_s/V_A < 2,56$. При

уменьшении относительного вклада амбиполярных потерь претерпевает изменение и структура фронта. Рисунок 4 иллюстрирует, как с уменьшением параметра α увеличивается ширина фронта ударной волны, а зависимость напряженности магнитного поля от координаты ξ имеет вид осцилляций.

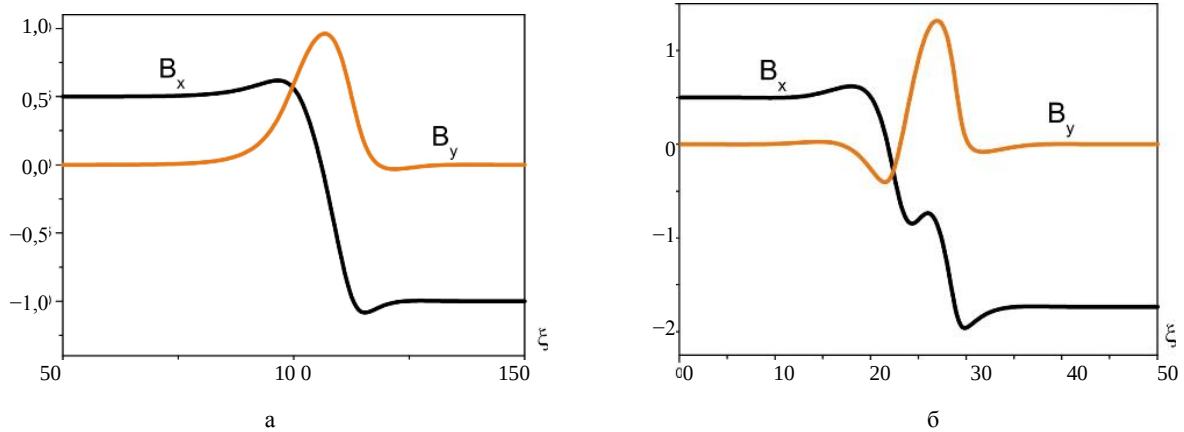


Рис. 2. Структура ударной волны непрерывного типа. $\theta = 30^\circ$, $\alpha = 1$; а – $V_s/V_A = 1$; б – $V_s/V_A = 1,35$

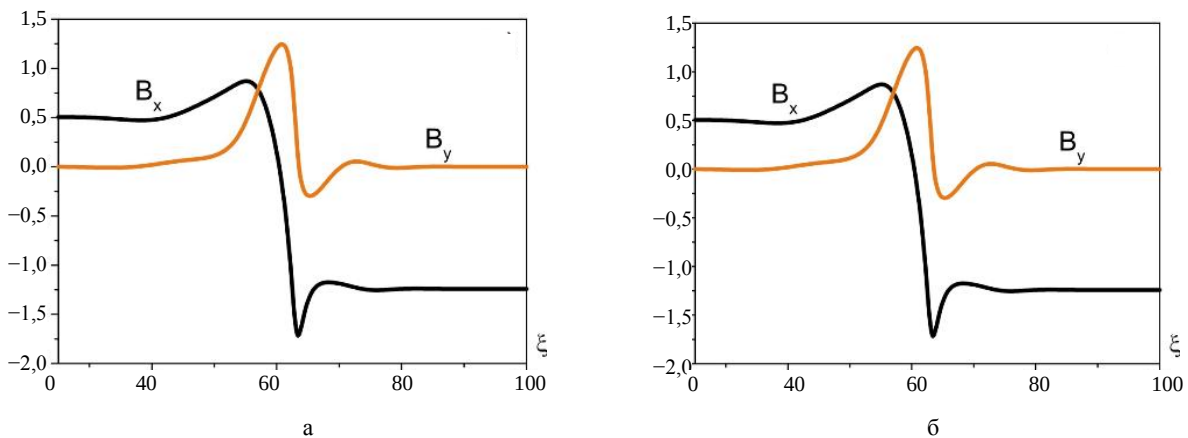


Рис. 3. Структура ударной волны непрерывного типа. $\theta = 30^\circ$, $\alpha = 0,5$; а – $V_s/V_A = 1$; б – $V_s/V_A = 1,1$

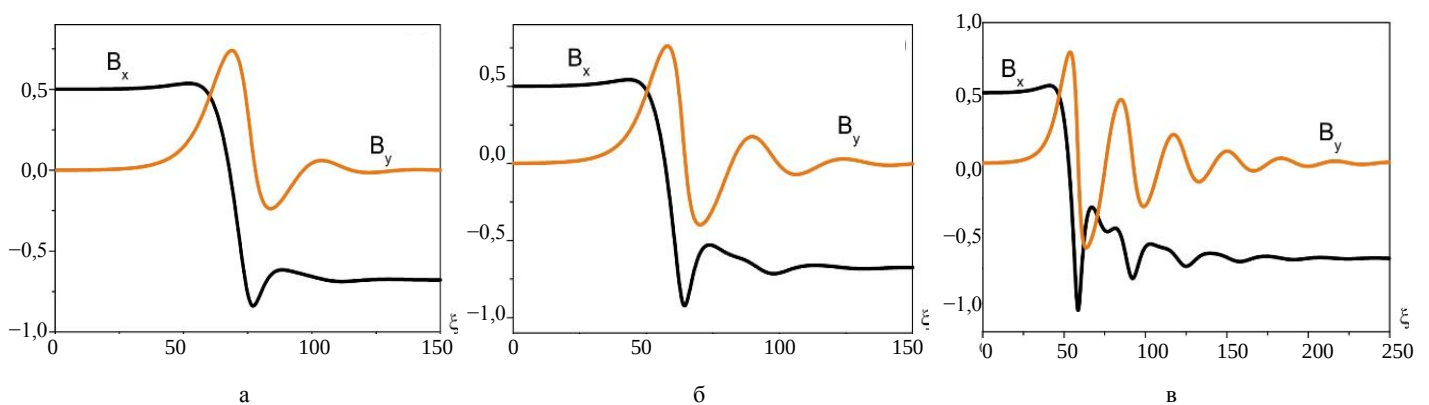


Рис. 4. Структура ударной волны непрерывного типа. $\theta = 30^\circ$, $V_s/V_A = 1$; а – $\alpha = 0,5$; б – $\alpha = 0,2$; в – $\alpha = 0,1$

Таким образом, нами показано, что стационарные ударные волны непрерывного типа умеренной интенсивности существуют не во всем диапазоне, определяемом условием (36). Физически это связано с остановкой набегающего на фронт потока плазмы и отражением его. Данное сокращение диапазона параметра V_s/V_A тем существеннее, чем больше относительный вклад тока Холла по сравнению с амбиполярной диффузией в структуру волны. Кроме того, выяснено, что если холловская диффузия магнитного поля доминирует, то фронт волны имеет достаточно протяженную осциллирующую структуру. Ширина фронта в этом случае увеличивается в полтора-два раза по сравнению со случаем, когда преобладают амбиполярные потери энергии волны.

Литература

1. Mullan D.J. The structure of transverse hydromagnetic shocks in regions of low ionization // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1971. Vol. 153. P. 145.
2. Draine B.T. Interstellar shock waves with magnetic precursors // *Astrophys. J.* 1980. Vol. 241. P. 1021–1038.

3. Wardle M. Dust grains and the structure of steady C-type magnetohydrodynamic shock waves in molecular clouds // *Astrophys. J.* 1998. Vol. 298. P. 507–524.

4. Wardle M., Ng C. The conductivity of dense molecular gas // *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1999. Vol. 303. P. 239–246.

5. Прудских В.В. Зоны аномальной активности магниторотационной неустойчивости в протозвездных дисках // *Письма в астрономический журнал*. 2013. Т. 39. С. 219–227.

References

1. Mullan D.J. The structure of transverse hydromagnetic shocks in regions of low ionization. *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 1971, vol. 153, p. 145.
2. Draine B.T. Interstellar shock waves with magnetic precursors. *Astrophys. J.*, 1980, vol. 241, pp. 1021-1038.
3. Wardle M. Dust grains and the structure of steady C-type magnetohydrodynamic shock waves in molecular clouds. *Astrophys. J.*, 1998, vol. 298, pp. 507-524.
4. Wardle M., Ng C. The conductivity of dense molecular gas. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 1999, vol. 303, pp. 239-246.
5. Prudskikh V.V. Zony anomal'noi aktivnosti magnitotoratsionnoi neustoichivosti v protozvezdnykh diskakh [Areas of abnormal activity of magnetic rotational instability in protostellar disks]. *Pis'ma v astronomicheskii zhurnal*, 2013, vol. 39, pp. 219-227.

Поступила в редакцию

12 ноября 2015 г.

УДК 519.2

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-25-28

РАСЧЁТ СПРАВЕДЛИВОЙ ЦЕНЫ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА В МОДЕЛИ (B,S)-РЫНКА С БАРЬЕРОМ, ОСНОВАННОЙ НА СЛУЧАЙНОМ БЛУЖДЕНИИ

© 2015 г. Г.И. Белявский, Н.В. Данилова

Белявский Григорий Исаакович – доктор технических наук, профессор, кафедра высшей математики и исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: beliaevsky@hotmail.com

Belyavskii Grigoriy Isaakovich – Doctor of Technical Science, Professor, Department of High Mathematics and Operations Research, Vorovich Institute of Mathematic, Mechanic and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: beliaevsky@hotmail.com

Данилова Наталья Викторовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики и исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: danilova198686@mail.ru

Danilova Natal'ya Viktorovna – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of High Mathematics and Operations Research, Vorovich Institute of Mathematic, Mechanic and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: danilova198686@mail.ru

Рассматривается модель (B,S)-рынка, параметры которой изменяются в зависимости от заданного барьера, и находится справедливая цена европейского опциона. Расчёты производятся в дискретном и непрерывном времени. Основным результатом является получение аналитической формулы для нахождения справедливой цены, основанной на вычислении вероятностей достижения случайным блужданием заданного барьера. Для сравнения результатов проведены расчёты справедливой цены для дискретного и непрерывного случая. Приведены зависимости справедливых цен от числа шагов и от величины барьера.

Ключевые слова: случайное блуждание, винеровский процесс, мартингальная мера, опцион, момент остановки, рынок.

The (B,S)-market model with stochastic switching of parameters is considered. The fair price of the European option is calculated. The experiments are conducted both in discrete and continuous times. The main result is the analytic formula for the fair price calculation based on the calculation of the random walk probabilities approach the given barrier. To compare results the fair price calculations are presented for discrete and continuous cases. Also the dependencies of the fair prices on the step and the barrier are obtained.

Keywords: random walk, Wiener process, martingale measure, option, stopping time, market.

Описание модели

Рассмотрим модель (B,S)-рынка, задаваемую следующими формулами:

$$\begin{cases} \Delta S_n = S_{n-1} \epsilon_n + \sigma_n \varepsilon_n \\ \Delta B_n = B_{n-1} r_n \end{cases}, n = 1, \dots, N.$$

Процесс S_n отражает значение стоимости акции, процесс B_n описывает величину банковского счёта. Значения S_0, B_0 считаются известными. В качестве источника случайности рассматривается последовательность независимых, одинаково распределённых случайных величин ε_n , принимающих значения 1 и -1 с равными вероятностями. Рассматривается естественная фильтрация: $F_0 = \emptyset, \Omega, F_n = \sigma(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), n = 1, \dots, N$. Параметры модели: r_n – процентная ставка; σ_n – волатильность. Отметим, что параметры модели являются предсказуемыми.

Из условия неотрицательности стоимости акции вытекают следующие ограничения на параметры модели: $0 < \sigma_n < 1 + r_n, n = 1, \dots, N$.

Отметим, что дисконтированный процесс стоимости акции является мартингалом по исходной (рыночной) мере P .

Стоимость акции выражается следующим образом:

$$S_n = S_0 \exp\left(\sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i \varepsilon_i\right),$$

$$a_i = \frac{1}{2} \ln(1 + r_i + \sigma_i) + \ln(1 + r_i - \sigma_i),$$

$$b_i = \frac{1}{2} \ln(1 + r_i + \sigma_i) - \ln(1 + r_i - \sigma_i),$$

$$i = 1, \dots, n, n = 1, \dots, N.$$

Формулу для банковского счёта можно представить в виде $B_n = B_0 \exp\left(\sum_{i=1}^n c_i\right), c_i = \ln(1 + r_i), i = 1, \dots, n, n = 1, \dots, N$. Предположим, что $a_i = 0, i = 1, \dots, N$.

(1)

Из (1) вытекает следующее ограничение на параметры модели: $r_i - \frac{\sigma_i^2}{2} = -\frac{r_i^2}{2}$, $i=1, \dots, N$.

Модель с барьером

Введём случайную величину τ следующим образом: $\tau = \inf_{1 \leq n \leq N} S_n \leq M$, где $M < S_0$ – некоторый барьер. Параметры модели имеют вид $r_n = \hat{r}_1 I_{n-1 < \tau} + \hat{r}_2 I_{n-1 \geq \tau}$,

$$\sigma_n = \hat{\sigma}_1 I_{n-1 < \tau} + \hat{\sigma}_2 I_{n-1 \geq \tau}, \quad n=1, \dots, N.$$

Исходя из вышеизложенного, стоимость акции и банковский счёт в финальный момент времени N можно записать в виде

$$S_N = S_0 \exp \left(\hat{b}_1 \sum_{i=1}^{\tau} \varepsilon_i + \hat{b}_2 \sum_{i=\tau+1}^N \varepsilon_i \right),$$

$$B_N = B_0 \exp \left(\hat{c}_1 \tau + \hat{c}_2 (N - \tau) \right), \quad (2)$$

где $\hat{c}_1 = \ln(1 + \hat{r}_1) - \hat{\sigma}_1^2/2$, $\hat{c}_2 = \ln(1 + \hat{r}_2) - \hat{\sigma}_2^2/2$,

$$\hat{b}_1 = \frac{1}{2} \ln(1 + \hat{r}_1) - \hat{\sigma}_1^2/2,$$

$$\hat{b}_2 = \frac{1}{2} \ln(1 + \hat{r}_2) - \hat{\sigma}_2^2/2.$$

Постановка задачи. Алгоритм решения

Рассмотрим следующую задачу:

$$\min_{\gamma} X_0$$

$$\Delta \left(\frac{X_n}{B_n} \right) = \gamma_n \Delta \left(\frac{S_n}{B_n} \right), \quad n=1, \dots, N. \quad (3)$$

$$X_N \geq f_N$$

Процесс X_n , $n=0, \dots, N$ отражает оптимальный капитал портфеля; $X_0 = C$ – начальный капитал (справедливая цена); γ_n , $n=1, \dots, N$ – число единиц рискованного актива. В качестве финансового обязательства рассматривается европейский опцион колл: $f_N = \max(S_N - K, 0)$, где K – контрактная цена.

Решение задачи (3) имеет вид $X_N = f_N$,

$$X_{n-1} = \frac{1}{1+r_n} E[X_n / F_{n-1}], \quad n=1, \dots, N.$$

В работе [1] приведены рекуррентные формулы для решения задачи (3) в случае модели (2).

Как уже отмечалось, целью настоящей работы является получение аналитической формулы для решения задачи (3) в случае модели (2). Данная формула имеет вид

$$X_0 = \sum_{k=1}^{N-1} Y_k P(\tau = k) + Y_N \left(1 - \sum_{k=1}^{N-1} P(\tau = k) \right), \quad (4)$$

$$\text{где } Y_k = \frac{\exp(-\hat{c}_1 k - \hat{c}_2 (N-k))}{2^N} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^{N-k} C_k^i C_{N-k}^j f_N S_0 \exp(\hat{b}_1 (2i-k) + \hat{b}_2 (2j+k-N)).$$

Справедливы следующие равенства:

$$\tau = \inf_{1 \leq n \leq N} S_n \leq M =$$

$$= \inf_{1 \leq n \leq N} \left(S_0 \exp \left(\hat{b}_1 \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right) \leq M \right) = \inf_{1 \leq n \leq N} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \leq \frac{1}{\hat{b}_1} \ln \left(\frac{M}{S_0} \right) \right) =$$

$$= \inf_{1 \leq n \leq N} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = \left\lfloor \frac{1}{\hat{b}_1} \ln \left(\frac{M}{S_0} \right) \right\rfloor \right).$$

Отметим, что $\hat{b}_1 > 0$, поэтому при делении на $\hat{b}_1$ знак неравенства не изменился.

Обозначим $L = \left\lfloor \frac{1}{\hat{b}_1} \ln \left(\frac{M}{S_0} \right) \right\rfloor$, тогда

$$\tau = \inf_{1 \leq n \leq N} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i = L \right).$$

Справедливы следующие утверждения.

Утверждение 1 [2]. Порождающая функция закона распределения момента остановки τ имеет

$$\text{вид } E\alpha^\tau = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \right)^{|L|}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Утверждение 2. Пусть $k = \frac{1}{2} |L| + i$, $i = 0, 1, 2, \dots$.

Тогда

$$P(\tau = i) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{|L|} C_{|L|}^j \prod_{l=0}^{k-1} \left(\frac{j-l}{2} \right) \frac{-1^{k-j}}{k!}, & k - \text{целое число} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad (5)$$

Доказательство.

$$E\alpha^\tau = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \alpha^2}}{\alpha} \right)^{|L|} = -1^{|L|} \alpha^{-|L|} \sqrt{1 - \alpha^2}^{-1} =$$

$$= -1^{|L|} \alpha^{-|L|} \sum_{j=0}^{|L|} C_{|L|}^j 1 - \alpha^2^{j/2} = -1^{|L|} \alpha^{-|L|} \sum_{j=0}^{|L|} C_{|L|}^j 1 - \alpha^2^{j/2} = -1^{|L|} \alpha^{-|L|} \sum_{j=0}^{|L|} C_{|L|}^j 1 - \alpha^2^{j/2} =$$

Учитывая то, что

$$1 - \alpha^2^{j/2} = \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{i-1} \left(\frac{j-l}{2} \right) \frac{-1^i \alpha^{2i}}{i!}, \quad \text{имеем}$$

$$E\alpha^\tau = -1^{|L|} \alpha^{-|L|} \sum_{j=0}^{|L|} C_{|L|}^j \sum_{i=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{i-1} \left(\frac{j-l}{2} \right) \frac{-1^i \alpha^{2i}}{i!} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{|L|} C_{|L|}^j \prod_{l=0}^{i-1} \left(\frac{j-l}{2} \right) \frac{-1^i \alpha^{2i-|L|}}{i!}.$$

С другой стороны, $E\alpha^\tau = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha^i P(\tau = i)$.

Приравняв коэффициенты при $\alpha^i, i=0,1,2,\dots$, получим формулу (5).

Утверждение 2 доказано.

Сопоставление непрерывной и дискретной моделей

В работе [1] рассмотрена непрерывная модель

$$\begin{cases} dS_t = S_t r_t dt + \sigma_t dW_t \\ dB_t = B_t r_t dt \end{cases}, \quad t \in [0, T]. \quad (6)$$

Источником случайности является винеровский процесс $W_t, t \in [0, T]$. Рассматривается естественная фильтрация $F_t = \mathcal{O}, \Omega, F_t = \sigma W_s, s \leq t$.

Модель (6) можно также представить в виде

$$\begin{cases} S_t = S_0 \exp \left(\int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds + \sigma_s dW_s \right) \\ B_t = B_0 \exp \left(\int_0^t r_s ds \right) \end{cases},$$

$t \in [0, T]$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\min_{\gamma} X_0,$$

$$d \left(\frac{X_t}{B_t} \right) = \gamma_t d \left(\frac{S_t}{B_t} \right), \quad t \in [0, T],$$

$$X_T \geq f_T.$$

В качестве финансового обязательства рассматривается европейский опцион колл: $f_T = \max(S_T - K, 0)$, где K – контрактная цена.

Формула для оптимального капитала имеет вид

$$X_t = \frac{B_t}{B_T} E^* f_T / F_t, \quad t \in [0, T].$$

Как и в дискретной модели, рассмотрим случайную величину $\tau = \inf_{t \in [0, T]} S_t = M$, где M – некоторый барьер. Рассмотрим разбиение интервала $[0, T]$ с шагом h .

Параметры модели имеют вид $r_t = \tilde{r}_1 I_{t \leq \tau} + \tilde{r}_2 I_{t > \tau}$, $\sigma_t = \tilde{\sigma}_1 I_{t \leq \tau} + \tilde{\sigma}_2 I_{t > \tau}$, $t \in [0, T]$.

Определим параметры модели таким образом, чтобы сопоставить дискретную и непрерывную модели: $\hat{r}_i = \tilde{r}_i \cdot h, \hat{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_i \cdot \sqrt{h}, i=1,2$. В [1] показано, что справедливая цена в данной модели вычисляется по следующей формуле:

$$X_0 = \int_0^T Y(x) p(x) dx + Y(T) \left(1 - \int_0^T p(x) dx \right), \quad (7)$$

где $Y(x), x \in [0, T]$ определяется равенством

$$Y(x) = S_0 \Phi \left(\frac{-d(x) + \chi^2(x)}{\chi(x)} \right) - K \frac{B_0}{B_T} \Phi \left(-\frac{d(x)}{\chi(x)} \right),$$

где $d(x) = \ln \left(\frac{K}{S_0} \right) - \left(\tilde{r}_1 - \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{2} \right) x - \left(\tilde{r}_2 - \frac{\tilde{\sigma}_2^2}{2} \right) (T-x)$,

$$\chi(x) = \sqrt{\tilde{\sigma}_1^2 x + \tilde{\sigma}_2^2 (T-x)},$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right), \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(t) dt,$$

а плотность распределения момента остановки τ имеет вид

$$p(x) = \sqrt{\frac{b}{2\pi}} \exp \left(\sqrt{ab} \right) \frac{1}{x^{3/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(ax + \frac{b}{x} \right) \right),$$

$$\text{где } \sqrt{a} = -\frac{1}{\tilde{\sigma}_1} \left(\tilde{r}_1 - \frac{\tilde{\sigma}_1^2}{2} \right), \sqrt{b} = -\frac{1}{\tilde{\sigma}_1} \ln \left(\frac{M}{S_0} \right).$$

Пример 1. Начальные данные: $S_0 = K = 6$, $M = 5$, $\hat{r}_1 = 0,01$, $\hat{r}_2 = 0,02$, $\hat{\sigma}_1 = 0,14$, $\hat{\sigma}_2 = 0,2$.

Из табл. 1 видно, что при увеличении числа разбиений справедливая цена, вычисленная в дискретном случае, сходится к справедливой цене, вычисленной в непрерывном случае и равной 0,3802296862.

Таблица 1

Зависимость справедливой цены от числа разбиений

N	X_0 (формула (4))
10	0,3658597467
20	0,3754200279
30	0,3756329319
40	0,3753524576
50	0,3758933240
60	0,3797913062
70	0,3792457574
80	0,3795171612
90	0,3798180256
95	0,3803696335
100	0,3800331066

Пример 2. Начальные данные такие же, как и в примере 1, $N=100$.

Из табл. 2 видно, что при увеличении барьера справедливые цены сходятся к значению, соответствующему ситуации, когда параметры модели не изменяются, и равному 0,3663725911.

Таблица 2
Зависимость справедливых цен от величины барьера

M	X_0 (формула (4))	X_0 (формула (7))
5	0,3800331066	0,3802296862
4,9	0,3747229003	0,3770650751
4,8	0,3728139200	0,3740327584
4,7	0,3701317768	0,3718240212
4,6	0,3692195434	0,3702547858
4,5	0,3679604700	0,3691692266
4,4	0,3675408798	0,3684393815
4,3	0,3669970204	0,3679634467
4,2	0,3666996400	0,3676630719
4,1	0,3666098883	0,3664800252
4	0,3664971684	0,3663725911

Сопоставление моделей на основе аналитических формул вычисления справедливой цены позволяет сделать вывод, что дискретная модель мо-

жет служить аппроксимацией непрерывной модели для сопоставимых барьеров при достаточно больших N . В то же самое время барьеры непрерывной модели более разнообразны.

Литература

1. Белявский Г.И., Данилова Н.В. Диффузионные модели со случайным переключением параметров. Расчёты и финансовые приложения. Lambert Academic Publishing, 2012. 123 с.
2. Shreve S.E. Stochastic Calculus for Finance. N.Y., 2003. 187 p.

References

1. Belyavskii G.I., Danilova N.V. Diffuzionnye modeli so sluchainym pereklyucheniem parametrov [Diffusion models with random switching parameters]. Lambert Academic Publishing, 2012, 123 p.
2. Shreve S.E. Stochastic Calculus for Finance. N.Y., 2003, 187 p.

Поступила в редакцию

7 сентября 2015 г.

УДК 539.3

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-29-34

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ЛОКАЛИЗОВАННОЙ ЗОНЫ ДЕСТРУКЦИИ В УПРУГОЙ БАЛКЕ*

© 2015 г. А.О. Ватульян, Д.О. Кашталяян

Ватульян Александр Ованесович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090; заведующий отделом дифференциальных уравнений, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, 362027, e-mail: vatulyan@math.sfedu.ru

Vatulyan Aleksandr Ovanesovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of the Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Head of Differential Equation Division, Southern Institute of Mathematics of Vladikavkaz Scientific Center RAS, Marcus St., 22, Vladikavkaz, 362027, Russia, e-mail: vatulyan@math.sfedu.ru

Кашталяян Дарья Олеговна – студент, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: daryakashtalyan@mail.ru

Kashtalyan Darya Olegovna – Student, Department of the Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: daryakashtalyan@mail.ru

Изучены колебания упругой балки с зоной деструкции, моделируемой включением эллипсоидальной формы с измененными физическими характеристиками. Исследовано влияние параметров включения на резонансные частоты, построена формула для поправок. Решена обратная задача о поэтапном определении геометрических и физических параметров включения по значениям резонансных частот.

Ключевые слова: колебания, балка, деструкция, обратная задача.

Vibrations of a resilient beam with the destruction area modeled by the ellipsoidal inclusion with altered physical characteristics are studied. The influence of the inclusion parameters on the resonant frequencies is investigated, a formula for editing is built. The inverse problem of the gradual definition of the geometrical and physical inclusion parameters due to the values of the resonant frequencies is solved.

Keywords: oscillations, beam, destruction, inverse problem.

Задачи о колебаниях тел с дефектами различной природы и структуры достаточно давно изучаются в научной литературе, что продиктовано важностью решений таких задач с точки зрения их влияния на прочность конструкций. Акустический метод является одним из самых популярных методов диагностики дефектов. Отметим, что наиболее детально исследованы задачи о колебаниях стержней и пластин с дефектами типа полостей и трещин. Так, в работах [1, 2] рассматривались прямая и обратная задачи о поперечных и продольных колебаниях цилиндрического стержня с дефектом в форме полости малого размера. В [1] реализован подход к определению местоположения и объема малой полости произвольной формы при анализе поперечных колебаний, в [2] решена задача об определении местоположения и объема малой полости произвольной формы на основании моделирования полости отрицательной массой.

В работе [3] представлен метод поэтапного определения параметров симметричного тонкого надреза в балке при анализе изгибных колебаний. Метод реализован для балочных моделей Эйлера – Бернулли и Тимошенко. Получены формулы, связывающие резонансные значения для неповрежденной балки и балки с дефектом, на основании которых реализована процедура поэтапного восстановления параметров надреза.

Гораздо меньше исследованы обратные задачи для упругих тел с включением. Работа [4] посвящена решению задачи идентификации эллипсоидальной полости или эллипсоидального включения (жесткого или упругого) в изотропном линейно-упругом теле при статическом нагружении. Для решения задачи использован метод, основанный на применении функционала взаимности. Предложена конструктивная процедура, с помощью которой геометрические параметры дефекта выражаются

*Работа выполнена при частичной поддержке государственного задания Минобрнауки России № 9.665.2014/К и гранта РФФИ № 13-01-00196-а.

через значения функционала взаимности. Эти значения могут быть вычислены, если в статическом испытании на одноосное растяжение (сжатие) на внешней поверхности тела измеряются перемещения.

В работе [5] был предложен метод получения верхней и нижней оценок для объема одиночного дефекта произвольной формы в изотропном линейно-упругом теле. Представленные в [5] оценки записаны через изменение упругой энергии тела, определяемое наличием дефекта. Его величина может быть вычислена по данным о перемещениях и усилиях на внешней границе тела, полученным в одном произвольном статическом испытании. Аналогичные оценки для случаев полости и жесткого включения были получены в [6].

В настоящей работе предложен новый подход к определению параметров включения, которое обладает меньшими, чем материал балки, модулем Юнга и плотностью, что моделирует зону деструкции. Рассмотрены две задачи при анализе изгибных колебаний. Первая состоит в определении центра и объема эллипсоидального включения, ослабляющего упругий стержень, при известных его физических характеристиках (модуль Юнга и плотность), а вторая – в определении физических параметров включения при известной его геометрии.

Исследование резонансных частот балки с дефектом

Рассмотрим установившиеся колебания жестко закрепленной на левом конце $x=0$ упругой балки длины L с круговым поперечным сечением радиуса a , колебания которой возбуждаются при помощи поперечной силы $P \sin \omega t$, приложенной в точке $x=L$. Будем считать, что в балке имеется включение в виде эллипсоида вращения с другими (меньшими) физическими характеристиками, причем его ось совпадает с осью балки.

Уравнение установившихся колебаний с частотой ω неоднородной балки для модели Эйлера – Бернулли и соответствующие граничные условия имеют вид

$$(D(x) w''(x))'' + R(x) \omega^2 w(x) = 0, \quad (1)$$

$$w(0) = w'(0) = 0, D(x) w''(x)|_{x=L} = 0, (D(x) w''(x))'|_{x=L} = -P. \quad (2)$$

Здесь введены обозначения: $D(x) = \int_F E z^2 dF$, $R(x) = \int_F \rho dF$, где $D(x)$, $R(x)$ – соответственно жесткость и погонная масса балки; E и ρ – перемен-

ные модуль Юнга и плотность; F – площадь поперечного сечения.

Пусть центр эллипсоида расположен в точке $x = C_0$ и имеет полуоси b_1 и b . Тогда уравнение осевого сечения эллипсоида имеет вид $\frac{(x-C_0)^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$, а в формулах (1), (2) следует положить $D(x) = D_0 (1 - f_1(x))$, $R(x) = \rho_0 F_0 (1 - f_2(x))$, где D_0, ρ_0, F_0 – соответственно жесткость, плотность и площадь поперечного сечения неповрежденной части балки; f_1 и f_2 – положительные функции, отличные от нуля внутри эллипсоидальной области.

Вводя безразмерные характеристики: $\xi = \frac{x}{L}$,

$$l_0 = \frac{l}{L}, \quad c_0 = C_0 L^{-1}, \quad \kappa^4 = \frac{\rho_0 F_0 \omega^2 L^4}{D_0},$$

получим, что безразмерные жесткость $D(\xi)$ и погонную массу $R(\xi)$ можно определить соотношениями

$$D(\xi) = \frac{\pi E_0 a^4}{4} \left(1 - \frac{E_0 - E_1}{E_0} \cdot \frac{r^4(\xi)}{a^4} \right),$$

$$R(\xi) = \pi \rho_0 a^2 \left(1 - \frac{\rho_0 - \rho_1}{\rho_0} \cdot \frac{r^2(\xi)}{a^2} \right).$$

Здесь переменный радиус $r(\xi)$ определяется согласно соотношению в области включения

$$r(\xi) = b \sqrt{1 - \frac{(\xi - c_0)^2 L^2}{b_1^2}} \quad \text{и равен нулю вне него. В}$$

безразмерных переменных уравнение колебаний и граничные условия примут вид

$$(g(\xi) w''(\xi))'' - \kappa^4 h(\xi) w(\xi) = 0, \quad (3)$$

$$w(0) = w'(0) = 0, \quad w''(1) = 0,$$

$$w'''(1) = -P_0 = -\frac{PL^3}{D_0}, \quad (4)$$

где введены следующие функции:

$$g(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi - c_0| \geq \delta, \\ 1 - f_1(\xi), & |\xi - c_0| \leq \delta, \end{cases}$$

$$h(\xi) = \begin{cases} 1, & |\xi - c_0| \geq \delta, \\ 1 - f_2(\xi), & |\xi - c_0| \leq \delta, \end{cases}$$

$$f_1(\xi) = m_1 \varepsilon^4 \left(1 - \frac{(\xi - c_0)^2}{\delta^2} \right)^2,$$

$$f_2(\xi) = m_2 \varepsilon^2 \left(1 - \frac{(\xi - c_0)^2}{\delta^2} \right).$$

$$\text{Здесь } m_1 = 1 - \frac{E_1}{E_0}, \quad m_2 = 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad \delta = \frac{b_1}{L}.$$

Уравнение (3) имеет переменные коэффициенты, и его решение может быть построено либо численно, либо на основе асимптотического анализа в случае малых относительных размеров включения. Преобразуем (3) к канонической системе дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$v' = \frac{t}{g}, y' = h\kappa^4 w, t' = y, w' = v. \quad (5)$$

Граничные условия (4) запишутся в виде $w|_0 = 0, v|_0 = 0, t|_1 = 0, y|_1 = -P_0$. (6)

Введем в рассмотрение неизвестный вектор $\mathbf{X} = (w, v, t, y)^T$ и будем решать краевую задачу (1), (2) методом пристрелки. Тогда для системы (5) рассмотрим две вспомогательные задачи Коши:

$$w_1|_0 = 0, v_1|_0 = 0, t_1|_0 = 1, y_1|_0 = 0,$$

$$w_2|_0 = 0, v_2|_0 = 0, t_2|_0 = 0, y_2|_0 = 1.$$

Учитывая, что граничным условиям при $\xi = 0$ удовлетворяют оба решения, введем векторы $\mathbf{X}_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} t_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Согласно методу пристрелки, искомое решение задачи (1), (2) может быть представлено в виде $\mathbf{X} = a_1 \mathbf{X}_1 + a_2 \mathbf{X}_2$, где a_1 и a_2 – неизвестные параметры. Их значение можно определить из условия выполнения граничных условий для функций y и t на правом конце $\xi = 1$

$$\begin{cases} a_1 y_1|_1 + a_2 y_2|_1 = -P_0, \\ a_1 t_1|_1 + a_2 t_2|_1 = 0. \end{cases}$$

Введём определитель системы

$$\Delta = y_1|_1 \cdot t_2|_1 - t_1|_1 \cdot y_2|_1.$$

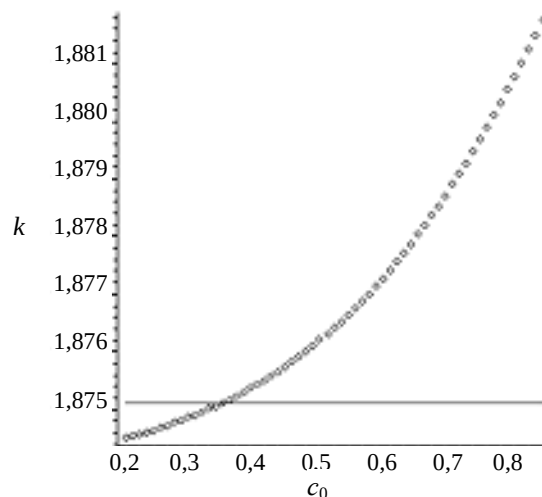
По правилу Крамера находим решение, причем равенство $\Delta = 0$ определяет резонансные значения задачи, которые находятся методом половинного деления.

На рис. 1 представлено сравнение точных резонансных значений неповрежденной балки и балки с дефектом в зависимости от координаты центра включения при значениях параметров $\delta = 0,05$,

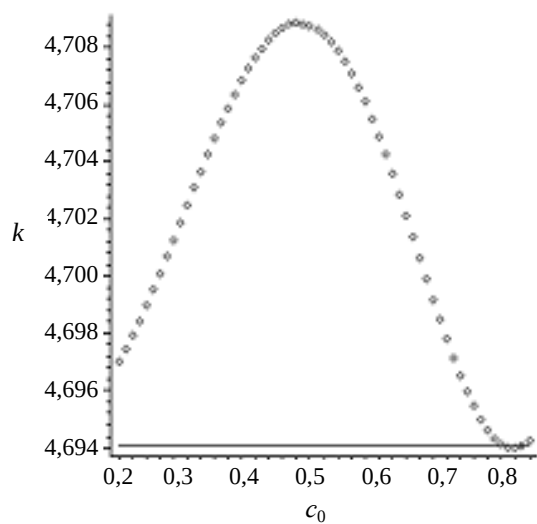
$\varepsilon = 0,5$, $\frac{E_1}{E_0} = 0,8$, $\frac{\rho_1}{\rho_0} = 0,6$ (такое соотношение

модулей упругости и плотностей характеризует некоторую степень деструкции включения). Точками на рисунке изображены резонансные значения балки с дефектом, а линией – неповрежденной балки.

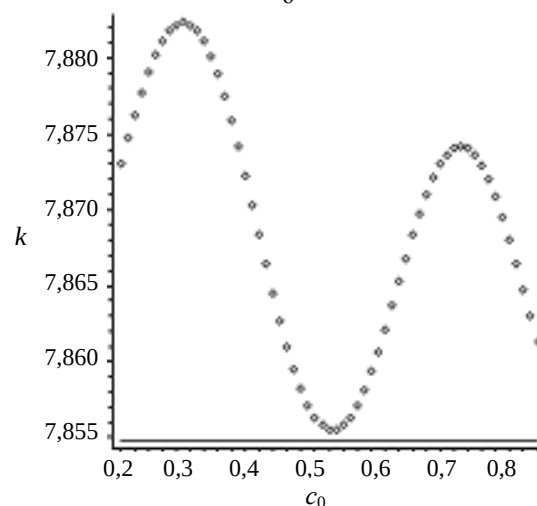
Отметим, что для первого резонансного значения исследуемая зависимость носит монотонный характер, для второго и четвертого зависимость немонотонна.



а



б



в

Рис. 1. Зависимость резонансных значений от координаты центра включения: а – 1-я частота; б – 2-я частота; в – 4-я частота

Соотношения для поправок к резонансным частотам

Выведем приближенную формулу для вычисления резонансных частот балки с включением. Составим 2 краевые задачи, одна из которых описывает собственные колебания со спектральным параметром κ_0 , а вторая – собственные колебания поврежденной балки с параметром κ .

$$\begin{cases} w_0^{IV} - \kappa_0^4 w_0 = 0, \\ w_0(0) = w_0'(0) = 0, \\ w_0''(1) = w_0'''(1) = 0; \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} (1 - f_1(\xi))w'' - \kappa^4(1 - f_2(\xi))w = 0, \\ w(0) = w'(0) = 0, \\ w''(1) = w'''(1) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{где } \kappa_0^4 = \frac{\rho_0 F_0 \omega_0^2 L^4}{D_0} \text{ и } \kappa^4 = \frac{\rho_0 F_0 \omega^2 L^4}{D_0}.$$

Отметим, что нетривиальное решение задачи (7) известно [7], причем собственная форма неповрежденной балки определяется с точностью до постоянного множителя и представима в форме

$$w_0(\xi) = \sinh \kappa_0 \xi + \sin \kappa_0 \xi \cdot \cosh \kappa_0 \xi - \cos \kappa_0 \xi - \cosh \kappa_0 \xi + \cos \kappa_0 \xi \cdot \sinh \kappa_0 \xi - \sin \kappa_0 \xi.$$

Проведем следующие преобразования: уравнения (7) и (8) умножим на w и w_0 соответственно, проинтегрируем по отрезку $[0, 1]$, и вычитая из второго первое, получим равенство

$$\int_0^1 \left[(1 - f_1(\xi))w'' - w_0'' \right] w_0 - w_0^{IV} w - w w_0 (\kappa^4 (1 - f_2(\xi)) - \kappa_0^4) d\xi = 0. \quad (9)$$

Интегрируя первые два слагаемых в подынтегральном выражении в (9) по частям и учитывая граничные условия, найдем приближенную формулу

$$\kappa^4 - \kappa_0^4 = \frac{\kappa^4 \int_0^1 f_2(\xi) w_0^2 d\xi - \int_0^1 f_1(\xi) w_0'^2 d\xi}{\int_0^1 w_0^2 d\xi}.$$

Так как $f_1(\xi) = 1 - g(\xi)$, $f_2(\xi) = 1 - h(\xi)$ в области включения, то, учитывая малость отрезка интегрирования и нормируя собственную форму колебаний условием $\int_0^1 w_0^2 d\xi = 1$, получим упрощенную формулу

$$\kappa^4 - \kappa_0^4 = 2\delta \cdot [\kappa^4 f_2(c_0) \cdot w_0^2(c_0) - f_1(c_0) \cdot w_0'^2(c_0)]. \quad (10)$$

По этой формуле можно подсчитать поправку к резонансной частоте, обусловленную наличием включения, зная собственную форму неповрежденной балки и характеристики включения.

Отметим, что в случае однородного стержня первое резонансное значение, полученное с помощью метода пристрелки, равно $\kappa_{01} = 1,87510$, второе –

$\kappa_{02} = 4,69410$, третье – $\kappa_{03} = 7,85476$, что совпадает с известными значениями, приведенными в [7].

В табл. 1 приведены результаты сравнения расчетов по определению первого безразмерного резонансного значения κ_1 по приближенной формуле и путем точного решения краевой задачи методом пристрелки при $\frac{E_1}{E_0} = 0,8$, $\frac{\rho_1}{\rho_0} = 0,6$ и разных значениях ε и δ .

Таблица 1

Сравнительный анализ резонансных значений

c_0	Пристрелка	Формула (10)	Погрешность, %
		$\varepsilon=0,2; \delta=0,05$	
0,2	1,87509	1,87508	0,0005
0,5	1,87533	1,87543	0,005
0,8	1,87615	1,87668	0,028
		$\varepsilon=0,2; \delta=0,1$	
0,2	1,87509	1,87506	0,0016
0,5	1,87557	1,87577	0,011
0,8	1,87723	1,87827	0,055

Были проведены расчеты и для других значений параметров, позволившие сделать вывод о достаточно высокой степени точности приближенной формулы, что позволяет использовать ее для процедуры идентификации включения.

Метод поэтапного восстановления геометрических характеристик включения эллипсоидальной формы

Обратная задача состоит в восстановлении координаты центра и объема включения по известным значениям трех резонансных частот при использовании полученной формулы (10) для поправки [3, 8, 9].

Для используемой модели введем обозначение $\alpha_i = \kappa_i^4 - \kappa_{0i}^4$, где κ_{0i} – резонансное значение для неповрежденной балки; κ_i – резонансное значение для балки с локализованным дефектом, которое получено из решения задачи о поперечных колебаниях неоднородной балки методом пристрелки. Учитывая также, что $f_1(c_0) = m_1 \varepsilon^4$, $f_2(c_0) = m_2 \varepsilon^2$, на основе формулы (10) получена нелинейная система трех уравнений относительно безразмерных геометрических параметров v , ε , c_0 .

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2v \cdot \left[\kappa_1^4 \cdot m_2 \cdot w_0^2(\kappa_{01}, c_0) - m_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot w_0''^2(\kappa_{01}, c_0) \right], \\ \alpha_2 &= 2v \cdot \left[\kappa_2^4 \cdot m_2 \cdot w_0^2(\kappa_{02}, c_0) - m_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot w_0''^2(\kappa_{02}, c_0) \right], \\ \alpha_3 &= 2v \cdot \left[\kappa_3^4 \cdot m_2 \cdot w_0^2(\kappa_{03}, c_0) - m_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot w_0''^2(\kappa_{03}, c_0) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Исключая из системы (11) характеристику v (относительный объем включения) и разделив пер-

вое уравнение на второе, а второе – на третье, получим соотношения

$$\begin{cases} \alpha_1 = \frac{\kappa_1^4 \cdot m_2 \cdot w_0 \kappa_{01, c_0}^2 - m_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot w_0'' \kappa_{01, c_0}^2}{\kappa_2^4 \cdot m_2 \cdot w_0 \kappa_{02, c_0}^2 - m_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot w_0'' \kappa_{02, c_0}^2}, \\ \alpha_2 = \frac{\kappa_2^4 \cdot m_2 \cdot w_0 \kappa_{02, c_0}^2 - m_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot w_0'' \kappa_{02, c_0}^2}{\kappa_3^4 \cdot m_2 \cdot w_0 \kappa_{03, c_0}^2 - m_1 \cdot \varepsilon^2 \cdot w_0'' \kappa_{03, c_0}^2}. \end{cases}$$

После исключения неизвестной ε^2 получено трансцендентное уравнение вида $P(c_0)=0$ для определения центра неоднородности.

Отметим, что функция $P c_0$ не является монотонной, что свидетельствует о неединственности решения при восстановлении координаты центра включения по трем первым резонансным частотам. При решении этой проблемы можно рассмотреть другую тройку резонансных частот, например первую, вторую и четвертую. На рис. 2 в качестве примера представлено сравнение графиков функций $P_{123} c_0$ и $P_{124} c_0$ для $c_0=0,2$. Как видно из рис. 2, графики введенных функций пересекают ось абсцисс практически в одинаковых точках $x=0,2; 0,5; 0,8$.

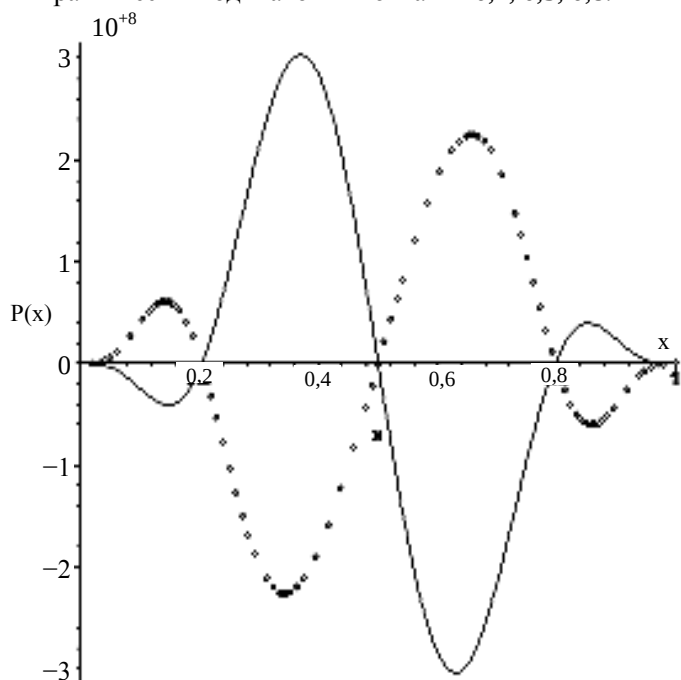


Рис. 2. Сравнение результатов восстановления координаты центра включения для различных троек резонансных частот

Такое же свойство наблюдалось в расчетах и при других значениях центра; соответственно, вопрос о выделении единственного решения этого трансцендентного уравнения требует самостоятельного исследования.

Зная координаты центра, можно затем вычислить отношение полуосей включения, найдя величину ε

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{m_2 \cdot \alpha_1 \cdot \kappa_2^4 \cdot w_0 \kappa_{02, c_0}^2 - \alpha_2 \cdot \kappa_1^4 \cdot w_0 \kappa_{01, c_0}^2}{m_1 \cdot \alpha_1 \cdot w_0'' \kappa_{02, c_0}^2 - \alpha_2 \cdot w_0'' \kappa_{01, c_0}^2}}.$$

Далее определяется объем включения v из (11).

В табл. 2 приведены результаты восстановления параметров дефекта при значениях параметров:

$$\frac{E_1}{E_0} = 0,8; \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = 0,6; \quad v = 0,0048; \quad \varepsilon = 0,8 \quad \text{при различных значениях } c_0.$$

Результаты вычислительных экспериментов свидетельствуют о том, что при расположении включения близко к свободному концу метод, основанный на приближенной формуле, становится непригодным, особенно для оценки v . Отметим, что при расположении центра включения в центре балки представленная схема позволяет восстановить лишь координату центра.

Таблица 2

Восстановление параметров дефекта

c_0	$\frac{E_1}{E_0} = 0,8; \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = 0,6; \quad v = 0,0048; \quad \varepsilon = 0,8$				
	Полученное c_0	Полученное ε	Погрешность ε , %	Полученное v	Погрешность δ , %
0,1	0,1000	0,739	7,63	0,0043	10,4
0,2	0,1996	0,736	8	0,0043	10,4
0,3	0,2994	0,737	7,88	0,0043	10,4
0,4	0,4012	0,746	6,75	0,0043	10,4
0,5	0,5008	Не восстанавливается			
0,6	0,5991	0,743	7,13	0,0043	10,4
0,7	0,7006	0,729	8,83	0,0042	12,5
0,8	0,7997	0,730	8,75	0,0043	10,4
c_0	$\frac{E_1}{E_0} = 0,8; \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = 0,6; \quad v = 0,009375; \quad \varepsilon = 0,5$				
	Полученное c_0	Полученное ε	Погрешность ε , %	Полученное v	Погрешность δ , %
0,1	0,1011	0,442	11,6	0,0086	8,3
0,2	0,2039	0,461	7,8	0,0080	14,7
0,3	0,2984	0,442	11,6	0,0084	10,4
0,4	0,4078	0,488	2,4	0,0082	12,5
0,5	0,5006	Не восстанавливается			
0,6	0,5939	0,576	15,2	0,0088	6,1
0,7	0,7004	0,402	19,6	0,0083	11,5
0,8	0,8077	0,371	20,2	0,0081	13,6

Восстановление соотношений модулей упругости и плотностей

Подобно способу, изложенному в предыдущем пункте, можно реализовать реконструкцию соотношений модулей упругости и плотностей включения и неповрежденной части балки на основе формулы (10).

В табл. 3 приведены результаты восстановления соотношений модулей упругости и плотностей при различных значениях c_0 .

Таблица 3
Восстановление модуля упругости и плотности

C_0	$\frac{E_1}{E_0} = 0,9; \frac{\rho_1}{\rho_0} = 0,7; \nu = 0,009375; \varepsilon = 0,5$			
	Полученное $\frac{E_1}{E_0}$	Погрешность $\frac{E_1}{E_0}, \%$	Полученное $\frac{\rho_1}{\rho_0}$	Погрешность $\frac{\rho_1}{\rho_0}, \%$
0,1	0,929	3,22	0,691	1,29
0,2	0,929	3,22	0,727	3,86
0,3	0,930	3,33	0,734	4,86
0,4	0,935	3,89	0,736	5,14
0,5	Не восстанавливается			
0,6	0,922	2,44	0,732	4,57
0,7	0,945	5	0,733	4,71
0,8	0,944	4,89	0,733	4,71
C_0	$\frac{E_1}{E_0} = 0,8; \frac{\rho_1}{\rho_0} = 0,6; \nu = 0,009375; \varepsilon = 0,5$			
	Полученное $\frac{E_1}{E_0}$	Погрешность $\frac{E_1}{E_0}, \%$	Полученное $\frac{\rho_1}{\rho_0}$	Погрешность $\frac{\rho_1}{\rho_0}, \%$
0,1	0,875	7,13	0,599	0,17
0,2	0,857	7,13	0,637	6,17
0,3	0,859	7,34	0,645	7,5
0,4	0,864	8	0,648	8
0,5	Не восстанавливается			
0,6	0,852	6,25	0,643	7,17
0,7	0,881	10,13	0,644	7,33
0,8	0,879	8,88	0,644	7,33

Замечание. Отметим, что в проведенной серии вычислительных экспериментов не удалось осуществить реконструкцию в случае, когда центр включения расположен посередине балки. Это связано с тем, что в этом случае функция, описывающая третью собственную форму колебаний, имеет узел, близко расположенный к центру.

В работе разработана численная схема исследования резонансных частот для балки с дефектом (область деградации упругих свойств) на основе метода пристрелки. Получена аналитическая формула для поправки к резонансным частотам, оценена ее точность. На основе этой формулы разработана схема определения параметров дефекта и физических характеристик дефекта, проведена серия вычислительных экспериментов, показавшая достаточную эффективность предложенной схемы.

Литература

1. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика. 2008. Т. 49, № 6. С. 1015–1020.
2. Ахтямов А.М., Сатыев Э.И. Определение местоположения и объема полости в упругом стержне по двум собственным частотам его колебаний // Дефектоскопия. 2012. № 5. С. 78–83.

3. Ватульян А.О., Осипов А.В. Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке // Дефектоскопия. 2014. № 11. С. 37–47.

4. Шифрин Е.И. Идентификация эллипсоидального дефекта в упругом теле по результатам одного испытания на одноосное растяжение (сжатие) // Изв. РАН. МТТ. 2010. № 3. С. 131–142.

5. Alessandrini G., Morassi A., Rosset E. Detecting an inclusion in an elastic body by boundary measurements // SIAM J. Math. Anal. 2002. Vol. 33, № 6. P. 1247–1268.

6. Morassi A., Rosset E. Detecting rigid inclusions, or cavities, in an elastic body // J. Elast. 2003. Vol. 73, № L-3. P. 101–126.

7. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., 1970. 734 с.

8. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформированного твердого тела. М., 2007. 224 с.

9. Ватульян А.О., Бочарова О.В., Жарков Р.С. Реконструкция малых полостей в упругих стержнях // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2006. № 2. С. 28–32.

References

1. Vatul'yan A.O., Soluyanov N.O. Identifikatsiya polosti v uprugom sterzhne pri analize poperechnykh kolebaniy [Identification of the cavity in an elastic rod in the analysis of transverse vibrations]. *Prikladnaya mekhanika i tekhnicheskaya fizika*, 2008, vol. 49, no 6, pp. 1015-1020.
2. Akhtyamov A.M., Satyev E.I. Opredelenie mestopolozheniya i ob"ema polosti v uprugom sterzhne po dvum sobstvennym chastotam ego kolebaniy [Determining the location and volume of the cavity in an elastic rod in two natural frequencies of its oscillations]. *Defektoskopiya*, 2012, no 5, pp. 78-83.
3. Vatul'yan A.O., Osipov A.V. Ob odnom podkhode pri opredelenii parametrov defekta v balke [An approach in determining the parameters of a defect in the beam]. *Defektoskopiya*, 2014, no 11, pp. 37-47.
4. Shifrin E.I. Identifikatsiya ellipsoidalnogo defekta v uprugom tele po rezul'tatam odnogo ispytaniya na odnoosnoe rastyazhenie (szhatie) [Identification ellipsoidal defect in an elastic body according to the results of uniaxial tensile test (compression)]. *Izv. RAN. MTT*, 2010, no 3, pp. 131-142.
5. Alessandrini G., Morassi A., Rosset E. Detecting an inclusion in an elastic body by boundary measurements. *SIAM J. Math. Anal.*, 2002, vol. 33, no 6, pp. 1247-1268.
6. Morassi A., Rosset E. Detecting rigid inclusions, or cavities, in an elastic body. *J. Elast.*, 2003, vol. 73, no L-3, pp. 101-126.
7. Filippov A.P. *Kolebaniya deformiruemyykh system* [Fluctuations deformable systems]. Ed. 2nd, revised. and ext. Moscow, 1970, 734 p.
8. Vatul'yan A. O. Obratnye zadachi v mekhanike deformirovannogo tverdogo tela [Inverse problems in the mechanics of the deformed solid]. Moscow, 2007, 224 p.
9. Vatul'yan A.O., Bocharova O.V., Zharkov R.S. Rekonstruktsiya mal'kikh polostei v uprugikh sterzhnyakh [Reconstruction of small cavities in the elastic rods]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2006, no 2, pp. 28-32.

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ КРУЧЕНИЯ УПРУГИХ ЦИЛИНДРОВ С ВИНТОВОЙ ДИСЛОКАЦИЕЙ*

© 2015 г. А.А. Галаско, Л.М. Зубов

Галаско Артур Анатольевич – аспирант, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: arturgalasko@yandex.ru

Galasko Artur Anatolievich – Post-Graduate Student, Department of Theory of Elasticity, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: arturgalasko@yandex.ru

Зубов Леонид Михайлович – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: zubovl@yandex.ru

Zubov Leonid Mikhailovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of Theory of Elasticity, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: zubovl@yandex.ru

Найдено точное решение задачи о больших деформациях кручения и растяжения-сжатия сплошного кругового цилиндра с прямолинейной винтовой дислокацией. Материал цилиндра изотропный и несжимаемый. Исследованы нелинейные эффекты, обусловленные наличием дислокации. Обнаружено влияние дислокации на сопротивление стержня растяжению или сжатию, а также на устойчивость при растяжении и кручении. Исследовано влияние дислокации на величину и знак эффекта Пойнтинга при кручении. Основные результаты сформулированы в виде, допускающем экспериментальную проверку.

Ключевые слова: нелинейная теория упругости, винтовая дислокация, несжимаемые материалы, эффект Пойнтинга.

The exact solution of the problem of the large torsion and tension-compression of the solid circular cylinder with a straight screw dislocation is found. Material of the cylinder is isotropic and incompressible. Nonlinear effects due to the presence of dislocations are investigated. The impact of the dislocation on tension or compression cylinder, as well as stability under tension and torsion are investigated. The impact of the dislocation on the torsional effect of Poynting is investigated. The main results are formulated in a form admitting experimental verification.

Keywords: nonlinear elasticity, screw dislocation, incompressible materials, effect of Poynting.

Дислокации являются важным элементом структуры твердых тел. Они играют определяющую роль в таких явлениях, как пластическое течение, внутреннее трение, усталость и разрушение, рост кристаллов. Дислокационные модели позволяют описывать различные свойства современных наноструктурных материалов [1]. Прямолинейные винтовые дислокации влияют на механическое поведение нитевидных кристаллов, нанотрубок, наностержней и других элементов конструкций.

В рамках линейной теории упругости задача о равновесии кругового цилиндра с изолированной прямолинейной винтовой дислокацией рассматривалась в работах [2–5]. Задача линейной анизотропной теории упругости о кручении призматических упругих тел с дискретно или континуально распределенными винтовыми дислокациями решена в [6].

С точки зрения нелинейной теории упругости задача о сосредоточенной винтовой дислокации в круговом цилиндре без учета его кручения и осевого растяжения-сжатия была решена в [7], где было

показано, что строгий нелинейный подход позволяет устранить такой парадокс линейной теории упругости, как бесконечное значение погонной энергии деформации, а также коренным образом меняет порядок сингулярности напряжений и деформаций на оси дислокации.

В представленной работе исследуется нелинейная задача о прямолинейной винтовой дислокации в цилиндрическом стержне с учетом кручения и продольной деформации. При конечных деформациях [8, 9] крутильные и продольные деформации в цилиндре взаимодействуют между собой (эффект Пойнтинга). Ниже мы анализируем влияние дислокации на эффект Пойнтинга и на сопротивление стержня растяжению-сжатию и кручению. Этот анализ проводится на основе полученного точного решения нелинейных уравнений равновесия для изотропного несжимаемого материала общего вида. Также рассматривается влияние дислокации на устойчивость стержня при растягивающей нагрузке и определяется поле напряжений в цилиндре с дислокацией при кручении и растяжении-сжатии.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-01492).

Решение задачи о кручении и растяжении-сжатии нелинейного упругого цилиндра с изолированной винтовой дислокацией

Рассмотрим сплошной круговой цилиндр радиуса a , в котором содержится изолированный дефект в виде прямолинейной винтовой дислокации. Линия дислокации совпадает с осью цилиндра. Следуя [7], поле конечных деформаций цилиндра с дислокацией будем разыскивать в виде отображения

$$R = R r, \quad \Phi = \phi + \psi z, \quad Z = b\phi + \alpha z. \quad (1)$$

Здесь b, α, ψ – постоянные; r, ϕ, z – цилиндрические координаты точек упругого тела в отсчетной конфигурации (лагранжевы координаты); R, Φ, Z – цилиндрические координаты текущей конфигурации (эйлеровы координаты). В (1) учтено, что образование винтовой дислокации в цилиндре сопровождается его закручиванием, а также осевой и радиальной деформацией. Постоянная ψ представляет собой угол закручивания на единицу длины цилиндра; величина $\alpha - 1$ есть относительное осевое удлинение; $2\pi|b|$ – длина вектора Бюргера винтовой дислокации.

Если x_s и X_k , $s, k = 1, 2, 3$ – декартовы координаты соответственно отсчетной и текущей конфигурации, то градиент деформации задается выражением

$$\mathbf{F} = \frac{\partial X_k}{\partial x_s} \mathbf{i}_s \otimes \mathbf{i}_k, \quad (2)$$

где $\mathbf{i}_k$ – постоянные орты декартовых координат.

Используя соотношения $x_1 = r \cos \phi$, $x_2 = r \sin \phi$, $x_3 = z$, $X_1 = R \cos \Phi$, $X_2 = R \sin \Phi$, $X_3 = Z$ и вводя единичные векторы

$$\mathbf{e}_r = \mathbf{i}_1 \cos \phi + \mathbf{i}_2 \sin \phi, \quad \mathbf{e}_\Phi = \mathbf{i}_1 \sin \phi - \mathbf{i}_2 \cos \phi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{i}_3, \quad (3)$$

$$\mathbf{e}_\phi = -\mathbf{i}_1 \sin \phi + \mathbf{i}_2 \cos \phi, \quad \mathbf{e}_z = \mathbf{i}_3,$$

$$\mathbf{e}_\Phi = -\mathbf{i}_1 \sin \Phi + \mathbf{i}_2 \cos \Phi, \quad \mathbf{e}_Z = \mathbf{i}_3$$

при помощи (2) найдем представление градиента деформации для отображения (1)

$$\mathbf{F} = \frac{dR}{dr} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \frac{R}{r} \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \frac{b}{r} \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_z + \psi R \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \alpha \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z. \quad (4)$$

На основании (4) находим меры деформации Коши $\mathbf{C} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ и Фингера $\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(\frac{R^2}{r^2} + \frac{b^2}{r^2} \right) \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi + \\ &+ \left(\frac{\alpha b}{r} + \frac{\psi R^2}{r} \right) \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\phi + \psi^2 R^2 + \alpha^2 \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} &= \left(\frac{dR}{dr} \right)^2 \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \left(\frac{R^2}{r^2} + \psi^2 R^2 \right) \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \end{aligned} \quad (5)$$

$$+ \left(\frac{bR}{r^2} + \alpha \psi R \right) \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \left(\frac{b^2}{r^2} + \alpha^2 \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$$

Материал цилиндра будем считать изотропным и несжимаемым. В силу (4) условие несжимаемости $\det \mathbf{F} = 1$ приводит к дифференциальному уравнению для функции $R = R r$.

$$R \frac{dR}{dr} = \frac{r}{\alpha - b\psi}. \quad (6)$$

В дальнейшем предполагается выполненным неравенство $\alpha > b\psi$. Тогда решение уравнения (6) для сплошного цилиндра $0 \leq r \leq a$ с учетом граничного условия $R(0) = 0$ будет

$$R = \frac{r}{\sqrt{\alpha - b\psi}}. \quad (7)$$

Условие $R(0) = 0$ означает, что после деформации цилиндр остается сплошным, полость не образуется. При учете (7) выражения (4) и (5) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{1}{\sqrt{\alpha - b\psi}} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_R + \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \\ &+ \frac{b}{r} \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_z + \frac{\psi r}{\sqrt{\alpha - b\psi}} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \alpha \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_Z, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \frac{1}{\alpha - b\psi} \mathbf{e}_r \otimes \mathbf{e}_r + \left(\frac{1}{\alpha - b\psi} + \frac{b^2}{r^2} \right) \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_\phi + \\ &+ \left(\frac{\psi r}{\alpha - b\psi} + \frac{\alpha b}{r} \right) \mathbf{e}_\phi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\phi + \left(\frac{\psi^2 r^2}{\alpha - b\psi} + \alpha^2 \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \\ \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} &= \frac{1}{\alpha - b\psi} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \left(\frac{1 + \psi^2 r^2}{\alpha - b\psi} \right) \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \end{aligned} \quad (9)$$

$$+ \left(\frac{b + \alpha \psi r^2}{r \sqrt{\alpha - b\psi}} \right) \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \left(\frac{b^2}{r^2} + \alpha^2 \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z.$$

Уравнение состояния несжимаемого упругого материала имеет вид [9]

$$\mathbf{T} = 2\mathbf{F}^T \cdot \frac{dW}{d\mathbf{C}} \cdot \mathbf{F} - p\mathbf{I}, \quad W = W(\mathbf{C}). \quad (10)$$

Здесь $\mathbf{T}$ – тензор напряжений Коши; W – удельная энергия деформации; p – давление в несжимаемом теле, не выражаемое через деформацию; $\mathbf{I}$ – единичный тензор. Запишем полярное разложение градиента деформации

$$\mathbf{F} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{V}, \quad \mathbf{U} = \mathbf{C}^{\frac{1}{2}}, \quad \mathbf{V} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}^{\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

Здесь $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ – симметричные положительно определенные тензоры растяжения; $\mathbf{A}$ – собственный ортогональный тензор.

Если упругий материал изотропен, то $W(\mathbf{C})$ – изотропная тензорная функция. В этом случае два

симметричных тензора $\mathbf{W}$ и $\frac{dW}{dC}$ коммутируют.

Отсюда вытекает соотношение

$$2 \frac{dW}{dC} = \mathbf{U}^{-1} \cdot \frac{dW}{d\mathbf{U}} = \frac{dW}{d\mathbf{U}} \cdot \mathbf{U}^{-1}. \quad (12)$$

Предположим, что удельная энергия изотропно-несжимаемого материала задана как функция первого J_1 и второго J_2 инвариантов тензора растяжения $\mathbf{V}$, которые совпадают с инвариантами тензора $\mathbf{U}$. Третий инвариант равен единице в силу условия несжимаемости. Итак,

$$W = W(J_1, J_2), \quad J_1 = \text{tr} \mathbf{V}, \quad J_2 = \frac{1}{2} \text{tr}^2 \mathbf{V} - \text{tr} \mathbf{V}^2. \quad (13)$$

На основании (12), (13) и формулы Гамильтона – Кэли выводим, что определяющее соотношение произвольного изотропного несжимаемого упругого материала может быть представлено в форме

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial J_1} \mathbf{V} - \frac{\partial W}{\partial J_2} \mathbf{V}^{-1} - p \mathbf{I}. \quad (14)$$

Используя результаты работы [10], при помощи (9) найдем выражения тензоров $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}^{-1}$, а также инвариантов J_1 и J_2 для деформации (1):

$$\mathbf{V} = \frac{1}{\sqrt{\alpha - b\psi}} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \frac{1}{\Delta} \left[\left(\frac{1 + \psi^2 r^2}{\alpha - b\psi} + \sqrt{\alpha - b\psi} \right) \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \right. \\ \left. + \frac{b + \alpha \psi r^2}{r \sqrt{\alpha - b\psi}} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \left(\alpha^2 + \frac{b^2}{r^2} + \sqrt{\alpha - b\psi} \right) \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \right], \\ \Delta = \sqrt{\frac{1 + \psi^2 r^2}{\alpha - b\psi} + \alpha^2 + \frac{b^2}{r^2} + 2\sqrt{\alpha - b\psi}}, \quad (15)$$

$$\mathbf{V}^{-1} = \sqrt{\alpha - b\psi} \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\alpha^2 + \frac{b^2}{r^2} + \sqrt{\alpha - b\psi}}{\sqrt{\alpha - b\psi}} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \right. \\ \left. + \frac{b + \alpha \psi r^2}{r \sqrt{\alpha - b\psi}} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \frac{1 + r^2 \psi^2}{\sqrt{\alpha - b\psi}} \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z \right].$$

$$J_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha - b\psi}} + \Delta, \quad J_2 = \sqrt{\alpha - b\psi} + \frac{\Delta}{\sqrt{\alpha - b\psi}}. \quad (16)$$

В силу (14) – (16) для рассматриваемой деформации цилиндра тензор напряжений представлен в виде

$$\mathbf{T} = \sigma_R \mathbf{e}_R \otimes \mathbf{e}_R + \sigma_\Phi \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_\Phi + \\ + \tau_{\Phi z} \mathbf{e}_\Phi \otimes \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_\Phi + \sigma_z \mathbf{e}_z \otimes \mathbf{e}_z, \quad (17) \\ \sigma_R = \sigma_R^* R - p, \quad \sigma_\Phi = \sigma_\Phi^* R - p, \quad \sigma_z = \sigma_z^* R - p, \\ \tau_{\Phi z} = \tau_{\Phi z}^* R.$$

Здесь символом (*) отмечены компоненты тензора $\mathbf{T}^* = \frac{\partial W}{\partial J_1} \mathbf{V} - \frac{\partial W}{\partial J_2} \mathbf{V}^{-1}$, которые, согласно (15),

являются известными функциями радиальной координаты R . Векторное уравнение равновесия для напряжений при отсутствии массовых сил

$$\mathbf{e}_R \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial R} + \frac{1}{R} \mathbf{e}_\Phi \cdot \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \Phi} + \mathbf{e}_z \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z} = 0 \quad (18)$$

вследствие (7) приводится к трем скалярным соотношениям

$$\frac{d\sigma_R}{dR} + \frac{\sigma_R^* - \sigma_\Phi^*}{R} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \Phi} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (19)$$

Из (19) вытекает, что $p = p(R)$. Нормальные напряжения $\sigma_R R$ находятся в квадратурах из первого уравнения (19). После этого при помощи (17) определяется функция $p(R)$ и остальные нормальные напряжения $\sigma_\Phi R$, $\sigma_z R$. Касательное напряжение $\tau_{\Phi z} R$ – известная функция, определяемая на основании (14) – (16). Единственность решения 1-го уравнения (19) обеспечивается граничным условием

$$\sigma_R R_0 = 0, \quad R_0 = \frac{a}{\sqrt{\alpha - b\psi}}, \quad (20)$$

которое означает отсутствие внешней нагрузки на поверхности цилиндра. Таким образом, выражения (1) и (7) дают точное решение задачи о кручении и растяжении-сжатии кругового цилиндра с центральной винтовой дислокацией для любого изотропного несжимаемого упругого материала при конечных деформациях.

Сила и момент, действующие на концах цилиндра

Вычислим главный вектор $\mathbf{P}$ и главный момент $\mathbf{M}$ напряжений, действующих в произвольном сечении цилиндра $z = \text{const}$

$$\mathbf{P} = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{R_0} \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{T} R dR, \\ \mathbf{M} = \int_0^{2\pi} d\Phi \int_0^{R_0} R \mathbf{e}_R + Z \mathbf{e}_z \times \mathbf{T} \cdot \mathbf{e}_z R dR. \quad (21)$$

Учитывая (3) и (17), из (21) получим

$$\mathbf{P} = P \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{M} = M \mathbf{e}_z, \\ P = 2\pi \int_0^{R_0} \sigma_z dR, \quad M = 2\pi \int_0^{R_0} \tau_{\Phi z} R^2 dR. \quad (22)$$

Соотношения (22) показывают, что в каждом поперечном сечении цилиндра напряжения приводятся к результирующей продольной силе и результирующему крутящему моменту. Указанные величины не зависят от координаты Z , т.е. одинаковы во всех сечениях цилиндра. Таким образом, реализация описываемой формулами (1) деформации кручения и растяжения цилиндрического

стержня конечной длины с винтовой дислокацией требует приложения к концам стержня продольной силы P и крутящего момента M . После определения поля напряжений путем решения 1-го уравнения (19) сила и момент становятся известными функциями угла закручивания и осевого удлинения

$$P = P(\alpha, \psi), \quad M = M(\alpha, \psi). \quad (23)$$

В качестве параметра в выражения функций (23) входит величина b , пропорциональная длине вектора Бюргерса дислокации.

Погонная энергия упругого цилиндра, вычисляемая при помощи (10), для заданной модели материала также является известной функцией переменных α и ψ :

$$\Pi = 2\pi \int_0^a W r dr = \Pi(\alpha, \psi). \quad (24)$$

Функции $P(\alpha, \psi)$, $M(\alpha, \psi)$ и $\Pi(\alpha, \psi)$ связаны между собой энергетическими соотношениями:

$$P = \frac{\partial \Pi}{\partial \alpha}, \quad M = \frac{\partial \Pi}{\partial \psi}. \quad (25)$$

Соотношения (25) доказаны в нелинейной теории кручения упругих тел без дислокаций [11, 12], а с учётом винтовых дислокаций – в работе [13].

Поскольку инварианты деформации J_1 , J_2 согласно (16) – известные функции координаты r , удельная энергия $W(J_1, r, J_2, r)$ также известна как функция от r для любого заданного изотропного несжимаемого материала. Это позволяет при помощи (25) получить явные выражения функций $P(\alpha, \psi)$ и $M(\alpha, \psi)$ при кручении и растяжении сплошного кругового цилиндра с винтовой дислокацией в виде определенных интегралов для произвольного несжимаемого изотропного материала.

Если задачу о винтовой дислокации исследовать на основе линейной теории упругости, то, как хорошо известно [4, 5], погонная энергия цилиндра с сосредоточенной дислокацией оказывается бесконечной. Этот парадокс сохраняется и в нелинейной теории упругости для некоторых материалов, например, для широко распространенной модели Муни – Ривлина [7]. Вместе с тем в нелинейной теории упругости существует класс материалов, для которых винтовая дислокация в цилиндре обладает конечной погонной энергией [7]. К этому классу относится модель несжимаемого материала Бартенева – Хазановича [14], задаваемая функцией удельной энергии

$$W = 2\mu J_1 - 3. \quad (26)$$

Здесь материальная постоянная μ имеет смысл модуля сдвига. Нелинейная задача о винтовой дислокации для материала (26) была решена в [7] без

учета кручения и растяжения, т.е. при $\psi = 0$, $\alpha = 1$. В дальнейшем мы будем использовать также более общую функцию удельной энергии

$$W = 2\mu J_1 - 3^\beta, \quad \beta \geq \frac{1}{2}. \quad (27)$$

Модель несжимаемого тела с функцией упругой энергии вида $W = 2\mu \text{tr} \mathbf{V}^2 - 3^\beta$, которая близка к модели (27), была рассмотрена ранее [15]. Обе эти модели имеют ту особенность, что при $\frac{1}{2} \leq \beta < 1$ описывают материал, обладающий физической нелинейностью при сколь угодно малых деформациях.

Влияние дислокации на диаграмму растяжения-сжатия цилиндра при отсутствии кручения

Рассмотрим явление растяжения-сжатия стержня с дислокацией при $\psi = 0$, т.е. при отсутствии кручения. Для модели материала (27) согласно (25) имеем

$$P(\alpha) = 4\pi\mu \int_0^a \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha^2 + 2\sqrt{\alpha} + \frac{1}{\alpha} + \frac{b^2}{r^2}} - 3 \right)^\beta r dr. \quad (28)$$

Чтобы выяснить особенности поведения материала (27) при деформации, рассмотрим сначала растяжение стержня без дислокации ($b=0$). В этом случае интеграл в (28) легко вычисляется, и продольная сила выражается формулой (опущен постоянный множитель)

$$P(\delta) = \beta \left(\delta - 2 + \frac{2}{\sqrt{1+\delta}} \right)^{\beta-1} \left(1 - \frac{1}{1+\delta} \sqrt{1+\delta} \right). \quad (29)$$

Здесь $\delta = \alpha - 1$ – относительное удлинение. Можно проверить, что асимптотика функции (29) при $\delta \rightarrow 0$, $\delta > 0$ имеет вид $C = \text{const} > 0$

$$P(\delta) = C\delta^{2\beta-1} [1 + O(\delta)]. \quad (30)$$

Из выражения (30) вытекает указанное выше ограничение $\beta \geq \frac{1}{2}$, а также тот факт, что при $\beta \neq 1$ зависимость $P(\delta)$ нелинейна при сколь угодно малых удлинениях δ .

Переходя к анализу влияния дислокации на зависимость $P(\alpha)$, заметим, что для любого изотропного несжимаемого тела продольная сила не зависит от знака параметра дислокации b . Это означает, что влияние дислокации на диаграмму растяжения-сжатия носит нелинейный характер и не может быть обнаружено в рамках линейной теории упругости.

На рис. 1 представлена диаграмма растяжения-сжатия цилиндра из материала Бартенева – Хазановича $\beta = 1$ для различных значений вектора Бюргерса. В расчетах по формуле (28) принято $\mu = 1$, $a = 1$.

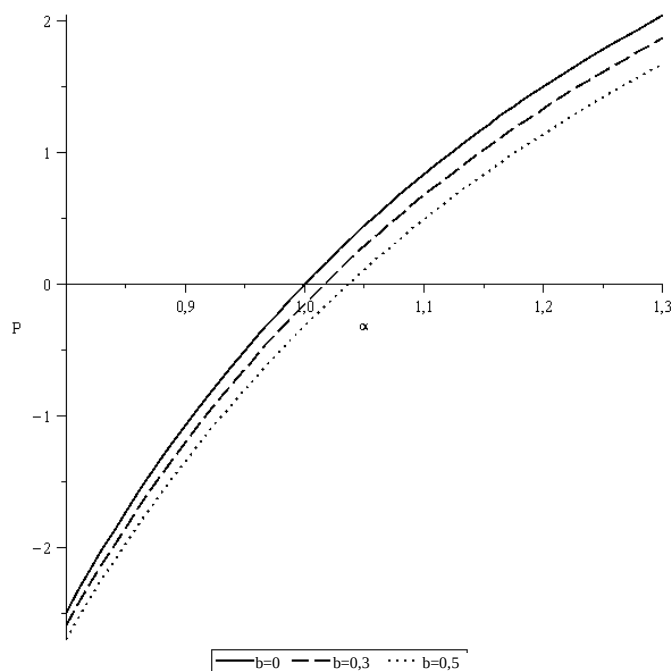


Рис. 1. Диаграмма растяжения-сжатия стержня при отсутствии кручения для модели материала Бартенева – Хазановича, построенная при различных значениях параметра дислокации b

Из рис. 1 видно, что растягивающая сила, необходимая для создания заданного удлинения, уменьшается с ростом параметра дислокации, в то время как сжимающая сила, обеспечивающая заданное сокращение длины стержня, увеличивается с ростом длины вектора Бюргерса. Другими словами, винтовая дислокация уменьшает сопротивление стержня растяжению, но увеличивает сопротивление сжатию. При отсутствии продольной силы образование винтовой дислокации в стержне приводит к увеличению его длины, если предотвращено закручивание.

Влияние дислокации на диаграмму растяжения-сжатия стержня из существенно нелинейного материала ($\delta = 0,51$) показано на рис. 2. Здесь наличие дислокации качественно меняет характер зависимости $P \alpha$. При отсутствии дислокации $b = 0$ диаграмма растяжения стержня имеет точку максимума $\alpha = 1,0245$ и падающий участок. Как известно [16–18], существование падающего участка на графике функции $P \alpha$ свидетельствует о неустойчивости цилиндрической формы растягиваемого образца и образовании шейки. При наличии в

стержне винтовой дислокации диаграмма растяжения становится монотонной, т.е. не имеет неустойчивых участков. Это позволяет предположить, что создание в стержне винтовой дислокации увеличивает его устойчивость при простом растяжении.

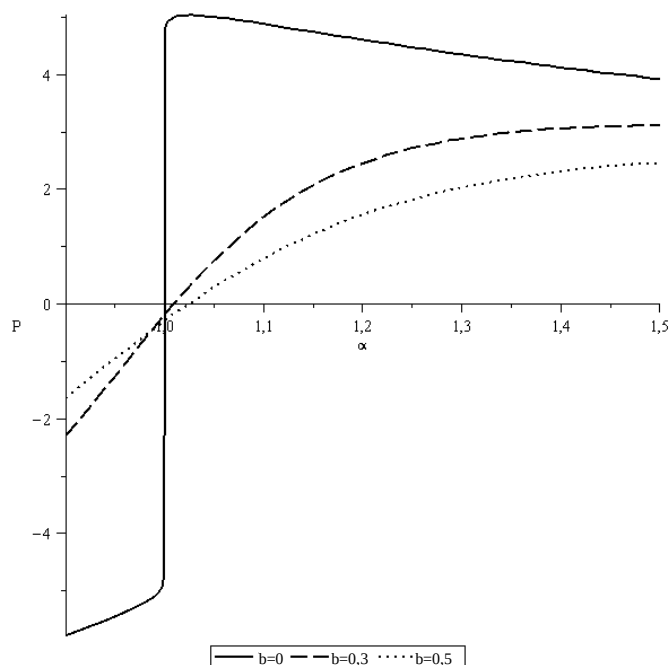


Рис. 2. Диаграмма растяжения-сжатия стержня для модели существенно нелинейного материала при различных значениях параметра дислокации b

Устойчивость упругого цилиндра с дислокацией при растяжении и кручении

Для исследования устойчивости упругого цилиндра при осевом растяжении и кручении можно использовать критерий выпуклости погонной энергии Π как функции переменных α и ψ . Справедливость этого критерия подтверждена в работах [19, 20] путем решения задач о бифуркации равновесия цилиндра при комбинированном нагружении в рамках трехмерной нелинейной теории упругости. Применим данный критерий к анализу устойчивости цилиндра с дислокацией, полагая $\delta = 0,51$, $\mu = 1$, $a = 1$. Необходимое и достаточное условие выпуклости функции $\Pi \alpha, \psi$ состоит в выполнении неравенств

$$\frac{\partial^2 \Pi \alpha, \psi}{\partial \alpha^2} > 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 \Pi \alpha, \psi}{\partial \alpha^2} \frac{\partial^2 \Pi \alpha, \psi}{\partial \psi^2} - \left(\frac{\partial^2 \Pi \alpha, \psi}{\partial \alpha \partial \psi} \right)^2 > 0 . \quad (31)$$

Как видно на рис. 3, область устойчивости цилиндра без винтовой дислокации при осевом растяжении и кручении симметрична. График, соответствующий параметру $b=0$, пересекает ось α в точке ($\psi=0, \alpha=1,0245$). Эта точка соответствует точке максимума диаграммы растяжения стержня без винтовой дислокации, представленной на рис. 2. Область устойчивости цилиндра с винтовой дислокацией несимметрична и расширяется с ростом длины вектора Бюргерса. Таким образом, предположение о том, что создание в стержне винтовой дислокации увеличивает его устойчивость при простом растяжении, подтверждается и в случае комбинированного нагружения стержня продольной силой и крутящим моментом.

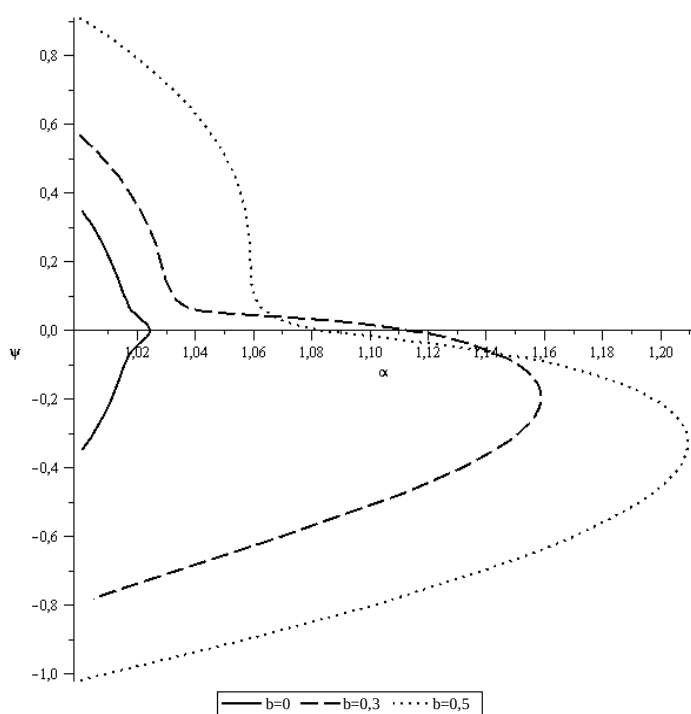


Рис. 3. Область устойчивости стержня при осевом растяжении и кручении, построенная для различных значений параметра дислокации

Самопроизвольная деформация цилиндрического стержня, обусловленная винтовой дислокацией

Рассмотрим случай самопроизвольной деформации цилиндрического стержня, обусловленной винтовой дислокацией и происходящей без приложения внешних сил. Определение деформации сводится к нахождению кратности осевого удлинения α и угла закручивания ψ из системы уравнений

$$P_{\alpha, \psi} = 0, M_{\alpha, \psi} = 0. \quad (32)$$

Для материала (26) функции P и M , согласно (25), имеют вид

$$P_{\alpha, \psi} = 4\pi\mu \int_0^a \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha - b\psi}} + \Delta - 3 \right) r dr, \\ M_{\alpha, \psi} = 4\pi\mu \int_0^a \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha - b\psi}} + \Delta - 3 \right) r dr. \quad (33)$$

Решаем систему нелинейных уравнений (32) методом Ньютона при нескольких значениях параметра дислокации b . В расчетах принято $\mu=1, a=1$. Результаты представлены в табл. 1. Первая строчка таблицы приведена для контроля точности метода.

Таблица 1

Численные решения системы (32) при различных значениях b

b	α	ψ
0	1,0000	0,0000
0,1	0,9918	-0,1978
0,2	0,9658	-0,3988
0,3	0,9221	-0,5962

Из полученных данных видно, что при отсутствии продольной силы и крутящего момента образование винтовой дислокации в стержне приводит к уменьшению его длины. Другими словами, закручивание стержня, обусловленное дислокацией, сопровождается осевым укорочением. В то же время закручивание цилиндра без дислокации внешним крутящим моментом при отсутствии продольной силы сопровождается увеличением его длины. Этот факт подтверждается экспериментами Пойнтинга [8] и доказан теоретически [8, 21] для широкого класса моделей изотропных несжимаемых упругих тел, к которым принадлежит и модель Бартенева – Хазановича. Таким образом, можно сказать, что эффект Пойнтинга, обусловленный винтовой дислокацией, имеет противоположный знак по сравнению с эффектом Пойнтинга, обусловленным крутящим моментом.

Растяжение-сжатие стержня с дислокацией при отсутствии крутящего момента

Рассмотрим случай растяжения цилиндрического стержня с винтовой дислокацией продольной силой $P=0,5$ при отсутствии крутящего момента. Определение деформации сводится к нахождению кратности осевого удлинения α и угла закручивания ψ из системы уравнений

$$P_{\alpha, \psi} = 0,5, M_{\alpha, \psi} = 0, \quad (34)$$

где P и M имеют вид (33).

Решаем систему нелинейных уравнений (34) методом Ньютона при нескольких значениях параметра дислокации b . В расчетах принято $\mu=1$, $a=1$. Результаты представлены в табл. 2.

Из полученных данных видно, что винтовая дислокация в стержне увеличивает его сопротивление растяжению продольной силой при нулевом крутящем моменте.

Таблица 2

Численные решения системы (34) при различных значениях b

b	α	ψ
0	1,0567	-0,0001
0,1	1,0502	-0,1888
0,2	1,0283	-0,3758
0,3	0,9914	-0,5559

Построим зависимости P α для различных значений длины вектора Бюргерса b при условии, что крутящий момент M $\alpha, \psi = 0$. С помощью построенных зависимостей можно будет сделать выводы о влиянии винтовой дислокации на растяжение-сжатие стержня при отсутствии крутящего момента. Как видно на рис. 4, влияние дислокации на диаграмму растяжения-сжатия стержня при нулевом крутящем моменте качественно отличается от такового при отсутствии кручения (рис. 1). При нулевом крутящем моменте наличие дислокации увеличивает сопротивление стержня растяжению и уменьшает сопротивление стержня сжатию, в то время как при нулевом угле закручивания дислокация уменьшает сопротивление цилиндра растяжению и увеличивает его сопротивление сжатию.

Поле напряжений

Для определения поля напряжений используем соотношения (17) и (19). Найдем составляющую нормального напряжения σ_r r из уравнения (19)

$$\sigma_r r = 2\mu \int_{R_0}^r \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha - b\psi}} - \frac{\sqrt{\alpha - b\psi} + \frac{1+r^2\psi^2}{\alpha - b\psi}}{\Delta} \right) dr, \quad (35)$$

$$\text{где } R_0 = \frac{a}{\sqrt{\alpha - b\psi}}.$$

Рассматривая подынтегральную функцию в (35), можно заключить, что σ_r r при $r \rightarrow 0$ имеет логарифмическую особенность.

Далее находим σ_ϕ и σ_z :

$$\sigma_\phi = 2\mu \left(\frac{\sqrt{\alpha - b\psi} + \frac{1+r^2\psi^2}{\alpha - b\psi}}{\Delta} - \frac{1}{\sqrt{\alpha - b\psi}} + 2\sigma_R \right),$$

$$\sigma_z = 2\mu \left(\frac{\sqrt{\alpha - b\psi} + \alpha^2 + \frac{b^2}{r^2}}{\Delta} - \frac{1}{\sqrt{\alpha - b\psi}} + 2\sigma_R \right).$$

Нормальное напряжение σ_ϕ при $r \rightarrow 0$ имеет логарифмическую особенность, напряжение σ_z при $r \rightarrow 0$ – особенность r^{-1} .

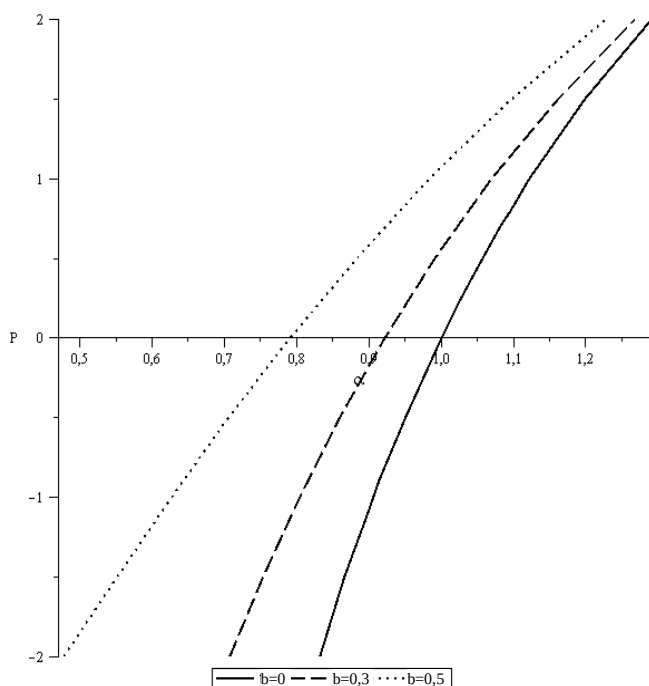


Рис. 4. Диаграмма растяжения-сжатия стержня при отсутствии крутящего момента M для модели материала Бартенева – Хазановича, построенная при различных значениях параметра дислокации b

Касательное напряжение $\tau_{\phi z}$ определяем на основании (14), (16): $\tau_{\phi z} = 2\mu \left(\frac{b + \alpha\psi r^2}{r\Delta\sqrt{\alpha - b\psi}} \right)$. Оно остается ограниченным при приближении к оси дислокации $\lim_{r \rightarrow 0} \tau_{\phi z} = \frac{2\mu b}{|b|\sqrt{\alpha - b\psi}}$.

Поле напряжений представлено на рис. 5.

В данной работе с точки зрения нелинейной теории упругости исследована задача о кручении и продольной деформации сплошного кругового цилиндра с центральной прямолинейной винтовой дислокацией. Получено точное аналитическое решение этой задачи для произвольного изотропного

несжимаемого материала. Основные результаты сформулированы в терминах величин, доступных измерению в эксперименте: продольное удлинение, угол закручивания, осевая сила и крутящий момент. Обнаружены новые нелинейные эффекты, обусловленные дислокацией, например влияние дислокации на сопротивление цилиндра растяжению или сжатию и на устойчивость стержня при

растяжении и кручении. Установлено, что наличие винтовой дислокации может изменить знак эффекта Пойнтинга при кручении. В частности, при самопроизвольном закручивании цилиндра с дислокацией без приложения внешних сил его длина уменьшается, в то время как приложение крутящего момента к цилиндру без дислокации приводит к увеличению его длины.

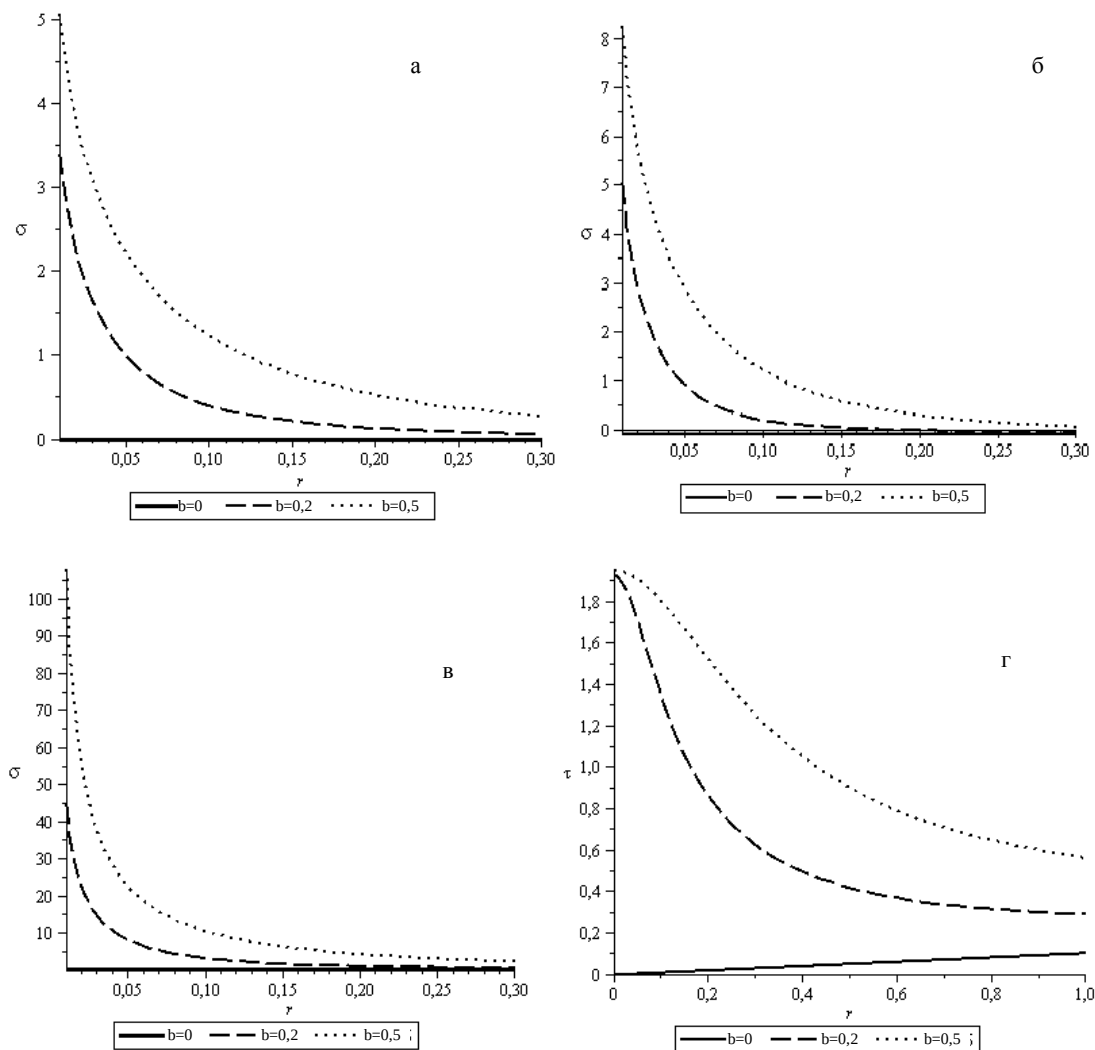


Рис. 5. Поле напряжений при трех различных значениях параметра дислокации; а – σ_R ; б – σ_ϕ ; в – σ_z ; г – $\tau_{\phi z}$

Литература

1. Gutkin M.Y., Ovid'ko I.A. Plastic Deformation in Non-crystalline Materials. N.Y., 2004. 197 p.
2. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects // Solid State Physics / eds. F. Seitz, D. Turnbull. N.Y., 1956. Vol. 3. P. 79–144.
3. Hirth J.P., Lothe J. Theory of Dislocations. N.Y., 1968. 780 p.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 7. Теория упругости. М., 1987. 248 с.
5. Teodosiu C. Elastic Models of Crystal Defects. N.Y., 1982. 112 p.

6. Guba A.V., Zubov L.M. Torsion of prismatic elastic bodies containing screw dislocations // Prikl. Mat. Mech. 2002. Vol. 66, № 2. P. 316–324.
7. Zubov L.M. Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies. N.Y., 1997. 205 p.
8. Truesdell C., Noll W. The Nonlinear Field Theories of Mechanics // Handbuch der Physik. N.Y., 1965. Vol. 3. P. 1–602.
9. Lurie A.I. Nonlinear Theory of Elasticity. Amsterdam, 1990. 617 p.
10. Zubov L.M., Rudev A.N. An explicit expression for elements of the polar representation of a second-rank tensor // Doklady Physics. 1996. Vol. 41(11). P. 544–547.

11. Zubov L.M., Bogachkova L.U. The theory of torsion of noncircular elastic cylinder under large deformations // *Trans. ASME. J. of Applied Mechanics*. 1995. Vol. 62. P. 373–379.
12. Zubov L.M. The non-linear Saint-Venant problem of the torsion, stretching and bending of a naturally twisted rod // *Prikl. Mat. Mech.* 2006. Vol. 70, № 2. P. 332–343.
13. Зубов Л.М., Губа А.В. Нелинейная теория кручения призматических упругих тел, содержащих винтовые дислокации // *Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Нелинейные проблемы механики сплошных сред*. 2003. С. 212–222.
14. Бартенев Г.М., Хазанович Т.Н. О законе высокоэластичных деформаций сеточных полимеров // *Высокомолекулярные соединения*. 1960. Т. 2, № 1. С. 20–28.
15. Zubov L.M., Rudev A.N. Features of the Loss of Stability for a Non-Linearly Elastic Rectangular Beam // *Prikl. Mat. Mech.* 1993. Vol. 57(3). P. 65–83.
16. Spector S.J. On the Absence of Bifurcation for Elastic Bars in Uniaxial Tension // *Arch. Ration. Mech. Anal.* 1984. Vol. 85(2). P. 171–199.
17. Zubov L.M., Rudev A.N. The Instability of a Stretched Non-Linearly Elastic Beam // *Prikl. Mat. Mech.* 1996. Vol. 60(5). P. 786–798.
18. Lastenko M.S., Zubov L.M. A Model of Neck Formation on a Rod under Tension // *Revista Colombiana de Matematicas*. 2002. Vol. 36(1). P. 49–57.
19. Zubov L.M., Sheidakov D.N. The Effect of Torsion on the Stability of an Elastic Cylinder under Tension // *Prikl. Mat. Mech.* 2005. Vol. 69(1). P. 53–60.
20. Zubov L.M., Sheidakov D.N. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion, and inflation. *Trans. ASME // J. of Applied Mechanics*. 2008. Vol. 75. P. 6.
21. Зубов Л.М. О прямом и обратном эффектах Пойнтинга в упругих цилиндрах // *Докл. РАН*. 2001. Т. 380, № 2. С. 194–196.
6. Guba A.V., Zubov L.M. Torsion of prismatic elastic bodies containing screw dislocations. *Prikl. Mat. Mech.*, 2002, vol. 66, no 2, pp. 316–324.
7. Zubov L.M. *Nonlinear Theory of Dislocations and Disclinations in Elastic Bodies*. N.Y., 1997, 205 p.
8. Truesdell C., Noll W. The Nonlinear Field Theories of Mechanics. *Handbuch der Physik*. N.Y., 1965, vol. 3, pp. 1–602.
9. Lurie A.I. *Nonlinear Theory of Elasticity*. Amsterdam, 1990, 617 p.
10. Zubov L.M., Rudev A.N. An explicit expression for elements of the polar representation of a second-rank tensor. *Doklady Physics*, 1996, no 41(11), pp. 544–547.
11. Zubov L.M., Bogachkova L.U. The theory of torsion of noncircular elastic cylinder under large deformations. *Trans. ASME. J. of Applied Mechanics*, 1995, vol. 62, pp. 373–379.
12. Zubov L.M. The nonlinear Saint-Venant problem of the torsion, stretching and bending of a naturally twisted rod. *Prikl. Mat. Mech.*, 2006, vol. 70, no 2, pp. 332–343.
13. Zubov L.M., Guba A.V. Nelineinaya teoriya krucheniya prizmaticheskikh uprugikh tel, soderzhashchikh vintovye dislokatsii [Nonlinear theory of torsion of prismatic elastic bodies containing screw dislocations]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki. Spetsvyпуск. Nelineinyye problemy mekhaniki sploshnykh sred* [Special Issue. Nonlinear problems of continuum mechanics], 2003, pp. 212–222.
14. Bartenev G.M., Khazanovich T.N. O zakone vysokoelastichnykh deformatsii setochnykh polimerov [On the law of highly elastic deformation of polymers grid]. *Vysokomolekulyarnye soedineniya*, 1960, vol. 2, no 1, pp. 20–28.
15. Zubov L.M., Rudev A.N. Features of the Loss of Stability for a Non-Linearly Elastic Rectangular Beam. *Prikl. Mat. Mech.*, 1993, vol. 57(3), pp. 65–83.
16. Spector S.J. On the Absence of Bifurcation for Elastic Bars in Uniaxial Tension. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1984, vol. 85(2), pp. 171–199.
17. Zubov L.M., Rudev A.N. The Instability of a Stretched Non-Linearly Elastic Beam. *Prikl. Mat. Mech.*, 1996, vol. 60(5), pp. 786–798.
18. Lastenko M.S., Zubov L.M. A Model of Neck Formation on a Rod under Tension. *Revista Colombiana de Matematicas*, 2002, vol. 36(1), pp. 49–57.
19. Zubov L.M., Sheidakov D.N. The Effect of Torsion on the Stability of an Elastic Cylinder under Tension. *Prikl. Mat. Mech.*, 2005, vol. 69(1), pp. 53–60.
20. Zubov L.M., Sheidakov D.N. Instability of a hollow elastic cylinder under tension, torsion, and inflation. *Trans. ASME J. of Applied Mechanics*, 2008, vol. 75, p. 6.
21. Zubov L.M. O pryamom i obratnom effektakh Pointinga v uprugikh tsilindrakh [On the forward and reverse effects of Poynting in elastic cylinders]. *Dokl. RAN*, 2001. vol. 380, no 2, pp. 194–196.

References

1. Gutkin M.Y., Ovid'ko I.A. *Plastic Deformation in Non-crystalline Materials*. N.Y., 2004, 197 p.
2. Eshelby J.D. The continuum theory of lattice defects. *Solid State Physics*. Eds. F. Seitz, D. Turnbull. N.Y., 1956, vol. 3, pp. 79–144.
3. Hirth J.P., Lothe J. *Theory of Dislocations*. N.Y., 1968, 780 p.
4. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. 7. Teoriya uprugosti* [Theoretical physics. Vol. 7. Theory of elasticity]. Moscow, 1987, 248 p.
5. Teodosiu C. *Elastic Models of Crystal Defects*. N.Y., 1982, 112 p.

УДК 532.5

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-44-48

НАХОЖДЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ О КОНВЕКЦИИ РЭЛЕЯ – БЕНАРА – КАРМАНА*

© 2015 г. Т.Ф. Долгих, М.Ю. Жуков, Е.В. Ширяева

Долгих Татьяна Федоровна – аспирант, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: dolgikh@sfnedu.ru

Dolgikh Tatiana Fedorovna – Post-Graduate Student, Department of Calculus Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: dolgikh@sfnedu.ru

Жуков Михаил Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: zhuk@math.sfnedu.ru

Zhukov Mikhail Yurievich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of Calculus Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: zhuk@math.sfnedu.ru

Ширяева Елена Владимировна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, 344090, г. Ростов-на-Дону, e-mail: shir@math.sfnedu.ru

Shiryayeva Elena Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Calculus Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: shir@math.sfnedu.ru

Численно исследована задача Рэлея – Бенара – Кармана о стационарных режимах конвекции для цилиндров с отношениями высоты к радиусу $0,25 \leq 2h/R \leq 4$. На основе метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона реализован алгоритм прямого расчета стационарных режимов и определения критического параметра потери устойчивости.

Ключевые слова: конвекция Рэлея – Бенара – Кармана, стационарные режимы течения жидкости, потеря устойчивости.

The problem on the Rayleigh–Benard–Karman convection in cylinder is studied. Qualitative change of stationary modes of fluid flow is investigated. To solve the problem we use the finite element method and the Newton method. The results of calculations for different relations height of the cylinder to its radius is presented.

Keywords: Rayleigh – Benard – Karman convection, stationary regimes of fluid flow, instability.

Для определения критических параметров потери устойчивости основного режима течения в задаче о конвекции Рэлея – Бенара – Кармана в работе [1] в случае, когда отношение высоты цилиндра к радиусу равно единице, использован алгоритм численного решения нестационарной задачи в сочетании с движением по параметру (числу Рэлея). Обычно для этих целей традиционно используется решение спектральной задачи теории гидродинамической устойчивости [2]. Однако в данном случае такой подход сопряжен со значительными трудностями. Явные соотношения для основного режима течения отсутствуют, и его приходится определять численно, и лишь затем решать задачу устойчивости, линеаризованную на приближенном

решении исходной задачи. Ниже показано, что гораздо эффективнее строить численное решение стационарной задачи при помощи метода конечных элементов в сочетании с методом Ньютона. Дополнительное преимущество такого метода заключается также в том, что при движении по параметру легко следить за качественными изменениями структуры течения.

Основные уравнения

Уравнения, описывающие конвекцию Рэлея – Бенара – Кармана в вязкой несжимаемой жидкости в цилиндре, вдоль оси которого действует сила тяжести, с предположением вращательной симмет-

*Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Минобрнауки РФ, Южный федеральный университет, и в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 1.1398.2014/К).

рии и стационарности, в цилиндрических координатах и безразмерных переменных имеют вид [1–5]

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \frac{v^2}{r} \mathbf{k}_r + \frac{uv}{r} \mathbf{k}_\phi &= \\ &= -\nabla p - \frac{1}{\text{Re}} \text{rot rot } \mathbf{v} + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr Re}^2} \theta \mathbf{k}_z, \\ -\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}_z + \mathbf{v} \cdot \nabla \theta &= \frac{1}{\text{Pr Re}} \Delta \theta, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ \nabla &= \mathbf{k}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{k}_z \frac{\partial}{\partial z}, \quad \text{div } \mathbf{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} ru + \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \text{rot } A_r, A_\phi, A_z &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \mathbf{k}_r + \\ &+ \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{k}_\phi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r A_\phi}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \phi} \right) \mathbf{k}_z. \end{aligned} \quad (1)$$

На основаниях цилиндра, которые вращаются с одинаковой по величине Ω ($\Omega = 1$), но противоположной по направлению угловой скоростью, заданы условия прилипания и температура, а на боковых стенках цилиндра – условия прилипания и отсутствие потока тепла

$$\begin{aligned} u = w = 0, \quad v = \Omega r, \quad \theta = 0, \quad z = h; \\ u = w = 0, \quad v = -\Omega r, \quad \theta = 0, \quad z = -h; \\ u = w_r = 0, \quad v = 0, \quad \theta_r = 0, \quad r = 0; \\ u = w = 0, \quad v = 0, \quad \theta_r = 0, \quad r = R. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{v} = u, v, w$ – скорость; p – давление; θ – отклонение от равновесной температуры T^0 z ; $\mathbf{k}_r, \mathbf{k}_\phi, \mathbf{k}_z$ – орты цилиндрической системы координат; R, h – радиус и полувысота цилиндра.

В качестве равновесной температуры T^0 z выбрано распределение

$$T^0 \quad z = \frac{T_0}{2h} (h - z), \quad T_0 = 1, \quad (3)$$

где T_0 – температура нижнего основания цилиндра.

Такой выбор равновесной температуры соответствует решению задачи $\mathbf{v} = 0$ при $\Omega = 0$, $T^0 \quad -h = T_0$, $T^0 \quad h = 0$. Температура в области имеет вид

$$T \quad x, z = T^0 \quad z + \theta \quad x, z. \quad (4)$$

Числа Рейнольдса Re , Прандтля Pr и Рэлея Ra , а также размерные и безразмерные величины связаны соотношениями

$$\text{Re} = \frac{\Omega_* R_*^2}{\mu_*}, \quad \text{Ra} = \frac{g_* \beta_* T_* R_*^3}{\delta_* \mu_*}, \quad \text{Pr} = \frac{\mu_*}{\delta_*},$$

$$\bar{\mathbf{v}}, \bar{p}, \bar{T}, \bar{r}, \bar{z} = R_* \Omega_* \mathbf{v}, R_*^2 \Omega_*^2 \rho_* p_*, T_* T, R_* r, R_* z, \\ h_* = h R_*,$$

где g_* – ускорение силы тяжести; Ω_*, R_*, T_* – величины угловой скорости, радиуса цилиндра и разности температур; δ_* – коэффициент температурного расширения; β_* – температуропроводность; μ_* – кинематическая вязкость; h_* – полувысота цилиндра; ρ_* – плотность жидкости.

Метод решения

Для отыскания стационарных решений нелинейную задачу (1)–(4) приводим к операторному виду, который обычно используется для решения задачи Стокса методом конечных элементов

$$F \quad u, v, w, p, \theta \equiv I_1 + I_2 + I_3 = 0, \quad (5)$$

где $I_1 = \int_D -r \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + v^2 U - uvV \quad dr \quad dz$,

$$I_2 = \int_D r \quad -P \text{div } \mathbf{v} - \nabla p \cdot \mathbf{V} + w\Theta \quad dr \quad dz,$$

$$I_3 = \int_D \left(\frac{1}{\text{Re}} \left(-r \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{uU + vV}{r} \right) - \frac{1}{\text{Re}} r \nabla \theta \cdot \nabla \Theta + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr Re}^2} r \theta W \right) dr \quad dz.$$

Здесь $\mathbf{V} = U, V, W$, P , Θ – пробные функции.

Вычисляя производную Фреше, получим

$$\begin{aligned} DF \quad u, v, w, p, \theta \quad \delta u, \delta v, \delta w, \delta p, \delta \theta \equiv \\ \equiv DI_1 + DI_2 + DI_3, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} DI_1 = \int_D -r \quad \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \delta \mathbf{v} \cdot \mathbf{V} + \\ + 2v\delta V U - \delta uv + u\delta v \quad V \quad dr \quad dz, \end{aligned}$$

$$DI_2 = \int_D r \quad -P \text{div } \delta \mathbf{v} - \nabla \delta p \cdot \mathbf{V} + \delta w \Theta \quad dr \quad dz,$$

$$\begin{aligned} DI_3 = \int_D \left(\frac{1}{\text{Re}} \left(-r \nabla \delta \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{V} - \frac{\delta u U + \delta v V}{r} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\text{Re}} r \nabla \delta \theta \cdot \nabla \Theta + \frac{\text{Ra}}{\text{Pr Re}^2} r \delta \theta W \right) dr \quad dz. \end{aligned}$$

Для нахождения решения применяется метод Ньютона

$$DF \quad \mathbf{v}^k, p^k, \theta^k \quad \delta \mathbf{v}, \delta p, \delta \theta \equiv F \quad \mathbf{v}^k, p^k, \theta^k,$$

$$\mathbf{v}, p, \theta^{k+1} = \mathbf{v}, p, \theta^k - \delta \mathbf{v}, \delta p, \delta \theta.$$

Обратим внимание, что при решении задачи (5) не использовался стабилизирующий член и не осуществлялось преобразование члена $P \text{div } \mathbf{v}$ в $\nabla P \cdot \mathbf{v}$ при помощи интегрирования по частям.

Результаты вычислительных экспериментов

Численное решение получено с помощью пакета конечных элементов FreeFem++ [6]. Зеркальная симметрия $u, v, w, p, \theta \quad r, z = u, v, -w, p, -\theta \quad r, -z$ решения задачи (1)–(3) контролировалась с использованием коэффициента симметрии функции тока ψ

$$S = \int_{D_+} \Psi dr dz / \int_{D_-} \Psi dr dz, \quad D_{\pm} = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq \pm h\}.$$

Обеспечение возможной симметрии относительно $z=0$ при вычислениях осуществлялось выбором симметричной квадратной сетки. При расчетах с относительной погрешностью, не превышающей 10^{-9} , задавалось 1800 кусочно-квадратичных элементов. Вычисления проводились с некоторым шагом по Ra , а все остальные параметры фиксированы ($Re = 90$, $Pr = 1$).

Для визуализации решения использовалась функция тока $\psi = r\Psi$, где

$$\Delta \Psi - \frac{1}{r^2} \Psi = u_z - w_r, \quad \Psi|_{\partial D} = 0.$$

На рис. 1 приведены изолинии функции тока для различных значений числа Рэлея.

Хорошо видно, что на интервале $8540 < Ra < 8640$ происходит изменение структуры течения – режим с двумя вихрями теряет устойчивость и переходит в режим с четырьмя вихрями. Обратим внимание на то, что потеря устойчивости происходит без потери зеркальной симметрии. В частности, это означает, что если в качестве бифуркационной кривой выбрать зависимость коэффициента симметрии от числа Рэлея: $S = S(Ra)$, то такой переход между режимами не будет наблюдаться.

На рис. 2 показаны изолинии скоростей u, v, w и функции

тока ψ, x, z , температуры θ, x, z , азимутальной компоненты вихря скорости w, x, z и давления p, x, z для значений числа Рэлея $Ra = 17000$ в случае $2h/R = 0,25$. Вплоть до значений $Ra \approx 18000$ основной режим не теряет устойчивости, что находится в хорошем соответствии с асимптотическими результатами работы [4].

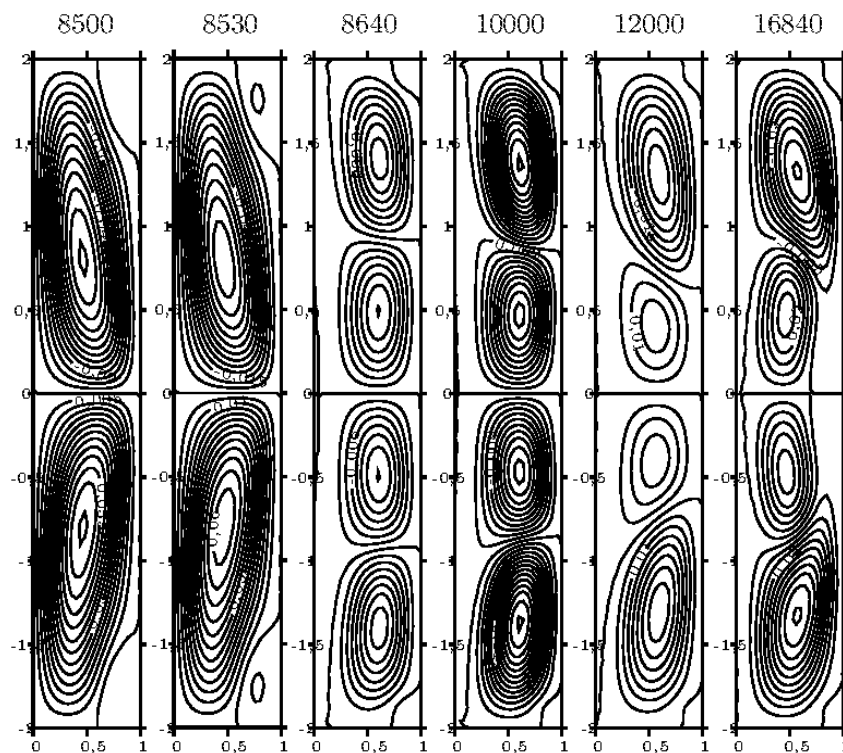


Рис. 1. Изолинии функции тока для различных значений Ra , $2h/R = 4$

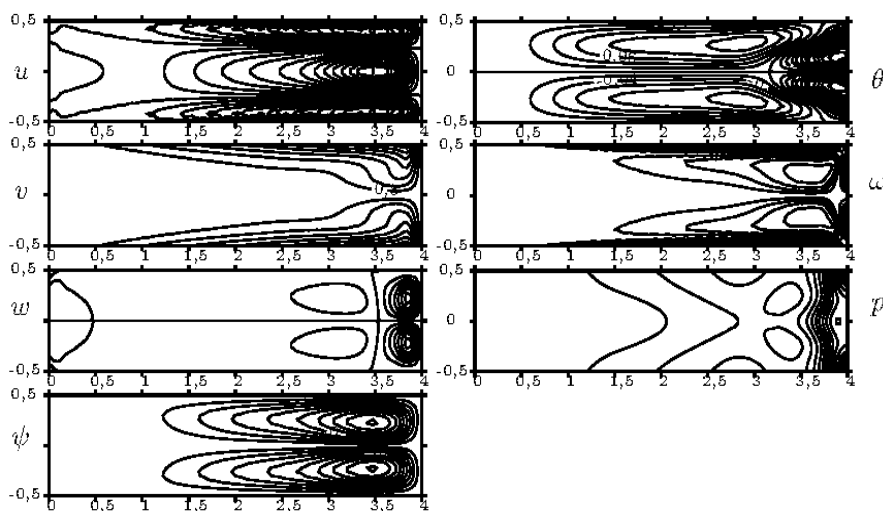


Рис. 2. Изолинии характеристик течения $Ra = 8640$, $2h/R = 0,25$

Асимптотическая модель

Точность и достоверность полученных результатов позволяет контролировать асимптотическая модель, построение которой в основном следует работам [4, 7]. Для поиска вращательно-симметричных режимов ($\partial/\partial\theta=0$) в случае, когда высота цилиндра много меньше радиуса ($r \gg h$), используем асимптотическую модель. Ищем решение задачи (1)–(4) в виде

$$r = R + hx, \quad z = hy, \quad p = h\tilde{p}, \quad t = h\tilde{t}, \quad (7)$$

$$u = h\tilde{u}, \quad w = h\tilde{w}, \quad v = \tilde{v}, \quad \mu = h\mu_0, \quad \delta = h\delta_0,$$

$$\beta = h^{-1}\beta_0, \quad \mu_0 = O(1), \quad \delta_0 = O(1), \quad \beta_0 = O(1),$$

$$T = T^{(0)}(z) + h\tilde{\theta}, \quad \frac{T_0}{2h} = \gamma = h^{-1}\gamma_0, \quad \gamma_0 = O(1),$$

$$T^{(0)}(z) = \frac{T_0}{2h}(h-z) = \frac{1-y}{2}T_0,$$

где $T^{(0)}(z)$ – «равновесный» профиль температуры; γ – градиент температуры.

Если подставить (7) в (1)–(4) и пренебречь членами более малого порядка по h , чем сохраненные, то получим, опуская знак «~», уравнения

$$u_t - \frac{v^2}{R} = -p_x + \mu_0\Delta_0 u, \quad (8)$$

$$w_t = -p_y + \mu_0\Delta_0 w + \beta_0\theta, \quad u_x + w_y = 0,$$

$$\theta_t - \gamma_0 w = \delta_0\Delta_0\theta, \quad v_t = \mu_0\Delta_0 v, \quad \Delta_0 = (\)_{xx} + (\)_{yy}$$

и краевые условия

$$u = w = 0, \quad \theta = 0, \quad y = \pm 1, \quad (9)$$

$$v = \pm\Omega r = \pm\Omega(R + hx), \quad y = \pm 1,$$

$$u = w = 0, \quad v = 0, \quad x = -R/h = -R_0,$$

$$\theta_x = 0, \quad x = -R/h = -R_0,$$

$$u = w_x = 0, \quad v = 0, \quad \theta_x = 0, \quad x = 0.$$

В асимптотической модели (8), (9) задача для определения скорости v отщепляется и может быть проинтегрирована независимо от остальных уравнений.

Ищем стационарное решение задачи для $v = v_0(x, y)$ в виде $v_0 = \Omega r y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \sin \pi k y$. Для определения $a_k(x)$ имеем, заменяя R_0 на $+\infty$ при $h \rightarrow 0$, $a_k''(x) - \pi^2 k^2 a_k(x) = 0$, $a_k(-R_0) = a_k(-\infty) = 0$. Тогда $a_k(x) = a_k(0)e^{\pi k x}$.

Величины $a_k(0)$ определяются краевым условием для $v_0(0, y) = 0$ $0 = \Omega R y + \sum_{k=1}^{\infty} a_k(0) \sin \pi k y$.

Вычисляя $a_k(0)$, получим

$$v_0 = \Omega r y + 2\Omega R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} e^{\pi k x} \sin \pi k y. \quad (10)$$

Ряд (10) суммируется. Действительно, вводя комплексную переменную $\xi = x + iy$ и функцию

$$F(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\pi k} e^{\pi k \xi}, \quad \text{дифференцируя } F(\xi),$$

получим сумму геометрической прогрессии с показателем $q = e^{\pi \xi}$, и после суммирования и интегрирования с учетом условия на бесконечности будем иметь

$$F'(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (e^{\pi \xi})^k = -\frac{e^{\pi \xi}}{1 + e^{\pi \xi}},$$

$$F(\xi) = -\frac{1}{\pi} \ln(1 + e^{\pi \xi}).$$

Вычисляя мнимую часть функции $F(\xi)$, окончательно получим

$$v_0 = \Omega r y - \frac{2\Omega R}{\pi} \arctg \frac{e^{\pi x} \sin \pi y}{1 + e^{\pi x} \cos \pi y}. \quad (11)$$

Профиль азимутальной скорости, рассчитанный для полной и асимптотической моделей, отличается от профиля, заданного формулой (11), не более чем на 3 %, начиная со значений параметров $R/h > 3$.

Литература

1. Bordja L., Tuckerman L.S., Witkowski L.M., Navarro M.C., Barkley D., Bessaih R. Influence of counter-rotating von Karman flow on cylindrical Rayleigh-Benard convection // Phys. Rev E., 2010. Vol. 81. P. 036322.
2. Гершуни Г.З., Жуховицкий Е.М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., 1972. 392 с.
3. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Расчет стационарных режимов конвекции Рэлея – Бенара – Кармана // Современные проблемы МСС : тр. XVI Междунар. конф. Т. 1. Ростов н/Д., 2012. С. 99–103.
4. Молодчаная А.В., Ширяева Е.В. Асимптотическая модель конвекции Бенара – Кармана для тонких цилиндров // Современные проблемы МСС : тр. XV Междунар. конф. Т. 2. Ростов н/Д., 2011. С. 176–180.
5. Долгих Т.Ф. Вычисление бифуркационных кривых для стационарной задачи конвекции Рэлея – Бенара – Кармана // Современные проблемы МСС : тр. XVII Междунар. конф. Т. 1. Ростов н/Д., 2014. С. 166–170.
6. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д., 2008. 256 с.
7. Владимиров В.А., Денисенко П.В., Жуков М.Ю., Юдович В.И. Течение вращающейся жидкости в зазоре между двумя параллельными пластинами // Мат. моделирование. 2001. Т. 13, № 2. С. 27–38.

References

1. Bordja L., Tuckerman L.S., Witkowski L.M., Navarro M.C., Barkley D., Bessaih R. Influence of counter-rotating von Karman flow on cylindrical Rayleigh-Benard convection. *Phys. Rev E.*, 2010, vol. 81, p. 036322.
2. Gershuni G.Z., Zhukhovitskii E.M. *Konvektivnaya ustoychivost' neszhimaemoy zhidkosti* [Convective stability of incompressible fluid]. Moscow, 1972, 392 p.
3. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. [Calculation of steady-state regimes Rayleigh-Benard-Karman convection]. *Sovremennye problemy MSS* [Modern problems of MCC] : materials of XVI Intern. Conf. Vol. 1. Rostov-on-Don, 2012, pp. 99-103.
4. Molodchanaya A.V., Shiryayeva E.V. [Asymptotic model Benard convection-pocket for thin cylinders]. *Sovremennye problemy MSS* [Modern problems of MCC] : materials of XV Intern. Conf. Vol. 2. Rostov-on-Don, 2011, pp. 176-180.
5. Dolgikh T.F. [The calculation of the bifurcation curves for stationary problem of Rayleigh-Benard-Karman convection]. *Sovremennye problemy MSS* [Modern problems of MCC] : materials of XVII Intern. Conf. Vol. 1. Rostov-on-Don, 2014, pp. 166-170.
6. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the finite element package FreeFem ++ for hydrodynamics problems, electrophoresis and biology]. Rostov-on-Don, 2008, 256 p.
7. Vladimirov V.A., Denissenko P.V., Zhukov M.Yu., Yudin V.I. *Techenie vrashchayushchetsya zhidkosti v zazore mezhdu dvumya parallel'nymi plastinami* [Vortex flows in the gap between two parallel plates]. *Mat. modelirovanie*, 2001, vol. 13, no 2, pp. 27-38.

*Поступила в редакцию**25 сентября 2015 г.*

ДВИЖЕНИЕ СЛОЯ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ НА ВНЕШНЕЙ ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ЦИЛИНДРА*

© 2015 г. М.Ю. Жуков, А.М. Морад

Жуков Михаил Юрьевич – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: zhuk@math.sfedu.ru

Zhukov Mikhail Yurievich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of Calculus Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: zhuk@math.sfedu.ru

Морад Адель Мохамед – ассистент, кафедра математики и компьютерных наук, Менуфия Университет, 32511, Египет; аспирант, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: dr_adel_morad@yahoo.com

Morad Adel Mohamed – Assistant, Department of Mathematics and Computer Science, Menoufia University, 32511, Egypt; Post-Graduate Student, Department of Calculus Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: dr_adel_morad@yahoo.com

Для идеальной несжимаемой жидкости получены уравнения мелкой воды, описывающие движение слоя жидкости на поверхности вращающегося цилиндра. Показано, что уравнения подобны модифицированным уравнениям Буссинеска для мелкой воды и в более грубом случае – уравнению Кортевега – де Вриза, коэффициенты которого учитывают тот факт, что свободная граница слоя жидкости не является плоской поверхностью. Роль поля тяжести в данных уравнениях играет центробежная сила. Для вывода уравнений использованы обычный метод многомасштабных асимптотических разложений и метод построения амплитудных уравнений.

Ключевые слова: модель Буссинеска, уравнение Кортевега – де Вриза, кноидальные волны.

For an ideal incompressible fluid the shallow water equations describing the motion of the fluid layer on the surface of a rotating cylinder are obtained. It is shown that the equations are similar to the modified Boussinesq equations for shallow water. In other case these equations are similar to the Korteweg-de Vries equation whose coefficients take into account the fact that the free boundary of the liquid layer is not a flat surface. In these equations the role of the gravity plays centrifugal force. For the derivation of the equations the method of multiscale asymptotic expansions and method of the amplitude equations are used.

Keywords: the modified Boussinesq model, Korteweg-de Vries equation, cnoidal waves.

Поведение слоя несжимаемой идеальной жидкости с достаточной степенью точности моделируется решением уравнения мелкой воды. Классические уравнения мелкой воды получаются на основе уравнений Эйлера для несжимаемой жидкости в предположении потенциальности течения (см., например, [1–4]). Существенную роль при этом играет наличие поля тяжести.

Основная цель данной работы – построение соответствующих уравнений мелкой воды для случая, когда на внешней поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью бесконечно длинного цилиндра имеется слой жидкости. Роль поля тяжести при этом играет центробежная сила. Использование метода многомасштабных асимптотических разложений позволяет построить аналог уравнений мелкой воды – уравнения Буссинеска и уравнения Кортевега – де Вриза (КдВ).

Известно, что достаточно тонкие слои жидкости на поверхности цилиндра описываются уравнениями так называемой опрокинутой мелкой воды, или мелкой воды на потолке, которые имеют эллиптический тип (см., в частности, [5–7]). Решения таких уравнений неустойчивы во времени и за конечный интервал времени уходят на бесконечность (взрываются). Заметим, что на вогнутых поверхностях имеет место обратный эффект – «прижимание» жидкости к поверхности. В работе показано, что для толстых слоев жидкости, радиус поверхности которых $r \geq ae$, где a – радиус цилиндра; e – основание натурального логарифма, уравнения принимают гиперболический тип. Физически это означает, что достаточно массивный слой жидкости не может оторваться от цилиндра. На поверхности такого толстого слоя жидкости возможно возникновение волновых движений. Оказалось, что волны

*Работа выполнена при поддержке базовой части проекта 213.01-11/2014-1 Министерства образования и науки РФ, Южного федерального университета, и гранта Правительства Египта.

могут возникать лишь при достаточно ограниченном наборе параметров задачи, в частности, когда первоначальный радиус свободной поверхности слоя $r = c$ удовлетворяет некоторым неравенствам.

Постановка задачи и основные уравнения

Предположим, что на поверхности вращающегося с постоянной угловой скоростью бесконечно длинного цилиндра имеется тонкий слой идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей (рис. 1). Для описания поведения слоя используем уравнения Эйлера и неразрывности в безразмерных переменных, записанные в цилиндрической системе координат

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} = -p_r, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} = -\frac{1}{r} p_\theta, \quad \frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad (2)$$

$$(ru)_r + v_\theta = 0, \quad D = \{a < r < R(\theta, t), \quad 0 < \theta < 2\pi\}. \quad (3)$$

Здесь D – область, заполненная жидкостью; (u, v) – скорость; p – давление; a – радиус цилиндра; $R(\theta, t)$ – неизвестная функция, задающая положение свободной поверхности.

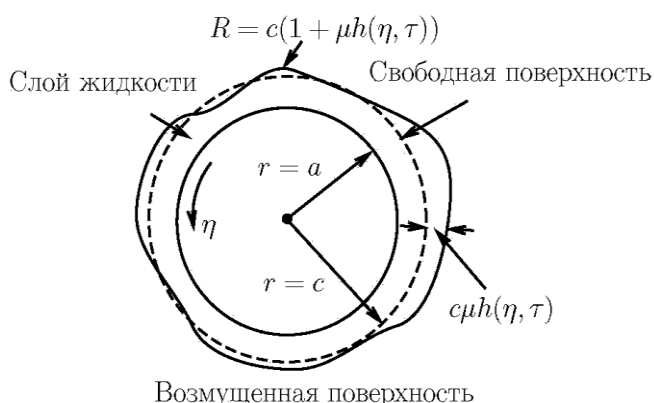


Рис. 1. Жидкая пленка на поверхности цилиндра

Условия непротекания жидкости, кинематическое и динамическое условие на свободной границе возьмем в виде

$$u = 0, \quad r = a, \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}(r - R(\theta, t)) = 0, \quad r = R(\theta, t), \quad (5)$$

$$p = \Pi(\theta, t), \quad r = R(\theta, t), \quad (6)$$

где $\Pi(\theta, t)$ – заданное давление на свободной границе; уравнение $r = R(\theta, t)$ задает свободную поверхность жидкости.

Связь между размерными и безразмерными переменными задаем соотношениями (размерные переменные отмечены звездочкой) $t = \Omega_* t_*$, $r_* = R_* r$, $(u^*, v^*) = \Omega_* R_*(u, v)$, $p_* = \rho_* \Omega_*^2 R_*^2 p$.

Здесь Ω_* , R_* , ρ_* – размерные величины характерной угловой скорости, размера в радиальном направлении и плотности.

Модель течения с постоянным вихрем

Разыскиваем решение, соответствующее течению с постоянным вихрем скорости ω [1, 2]

$$r\omega = (rv)_r - ru_\theta, \quad \omega = 2\Omega = \text{const}.$$

Введем функцию тока ψ

$$ru = -\psi_\theta, \quad v = \psi_r. \quad (7)$$

Для определения ψ имеем задачу

$$\Delta \psi \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} = 2\Omega, \quad (8)$$

$$\psi = 0, \quad r = a. \quad (9)$$

Краевая задача (8), (9) для ψ недоопределена, и решение может быть получено лишь с точностью до некоторой произвольной функции. Заметим, что (8) соответствует уравнению неразрывности (3), а краевое условие (9) является условием непротекания жидкости через поверхность цилиндра (4).

Нетрудно показать, что решение записывается в виде [2]

$$\psi(r, \theta, t) = \psi_0(r) + \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{z^{2j+1}}{(2j+1)!} \frac{\partial^{2j}}{\partial \theta^{2j}} F(\theta, t), \quad (10)$$

$$\psi_0(r) = \frac{1}{2} \Omega (r^2 - a^2), \quad z = \ln \frac{r}{a},$$

где $F(\theta, t)$ – некоторая неизвестная функция; $\psi_0(r)$ соответствует твердотельному вращению жидкости.

Введем обозначение для функции тока на свободной границе

$$\Psi(\theta, t) = \psi(R(\theta, t), \theta, t). \quad (11)$$

Тогда кинематическое условие (5) на свободной границе можно записать в виде

$$RR_t + \Psi_\theta = 0, \quad \Psi_\theta = \psi_r(R, \theta, t)R_\theta + \psi_\theta(R, \theta, t). \quad (12)$$

Используя динамическое условие на свободной границе (6) и уравнения (1), (2), получим

$$\frac{d(rv)}{dt} + R_\theta \left(\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} \right) = -\Pi_\theta, \quad r = R(\theta, t). \quad (13)$$

Система уравнений (12), (13) с учетом (7), (10), (11) является замкнутой системой уравнений для определения функций $R(\theta, t)$, $F(\theta, t)$.

Длинноволновое приближение

Используя обычную технику построения многомасштабных асимптотических разложений и ограничиваясь лишь главными членами асимптотических разложений, введем быстрые переменные η , τ и обозначения

$$\tau = \varepsilon t, \quad \eta = \varepsilon \theta, \quad u \rightarrow \varepsilon u, \quad (14)$$

где ε – малый параметр, связанный с толщиной слоя жидкости.

В этом случае уравнения (12), (13), (7), (10), (11) переписываются в виде

$$RR_\tau + \Psi_\eta = 0, \quad (15)$$

$$\frac{d(rv)}{d\tau} + R_\eta \left(\varepsilon^2 \frac{du}{d\tau} - \frac{v^2}{r} \right) = -\Pi_\eta, \quad r = R(\eta, t), \quad (16)$$

где с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^4)$

$$\Psi(\eta, \tau) = \frac{1}{2} \Omega (R^2 - a^2) + ZF - \varepsilon^2 \frac{Z^3}{3!} F_{\eta\eta} + O(\varepsilon^4),$$

$$\Psi_\eta(\eta, \tau) = \Omega RR_\eta + \left(ZF - \varepsilon^2 \frac{Z^3}{3!} F_{\eta\eta} \right)_\eta + O(\varepsilon^4),$$

$$z = \ln \frac{r}{a}, \quad Z = \ln \frac{R}{a}.$$

Выражения для компонент скорости с учетом (10), (7) и замен (14) имеют вид

$$-ru = \psi_\eta = ZF_\eta - \varepsilon^2 \frac{Z^3}{3!} F_{\eta\eta\eta} + O(\varepsilon^4),$$

$$rv = r\psi_r = \Omega R^2 + F - \varepsilon^2 \frac{Z^2}{2!} F_{\eta\eta} + O(\varepsilon^4).$$

Введем обозначения для компонент скорости на свободной поверхности:

$$-RU = -Ru(R, \eta, \tau) = ZF_\eta - \varepsilon^2 \frac{Z^3}{3!} F_{\eta\eta\eta} + O(\varepsilon^4),$$

$$RV = Rv(R, \eta, \tau) = \Omega R^2 + F - \varepsilon^2 \frac{Z^2}{2!} F_{\eta\eta} + O(\varepsilon^4).$$

Тогда уравнение (16) можно записать в форме

$$\frac{d(RV)}{d\tau} + R_\eta \left(\varepsilon^2 \frac{dU}{d\tau} - \frac{V^2}{R} \right) = -\Pi_\eta = 0. \quad (17)$$

Здесь и далее предполагается, что давление вдоль свободной границы не изменяется, т.е. $\Pi_\eta = 0$.

Подчеркнем, что при дифференцировании в (17)

следует помнить, что $\frac{dR}{d\tau} = R_\tau + R_\eta \frac{d\eta}{d\tau} = R_\tau + \frac{V}{R} R_\eta = U$,

$$\frac{dF}{d\tau} = F_\tau + F_\eta \frac{d\eta}{d\tau} = F_\tau + \frac{V}{R} F_\eta.$$

После соответствующих подстановок уравнения (15), (17) примут вид (аналог уравнений Буссинеска для мелкой воды)

$$RR_\tau + \Omega RR_\eta + ZF_\eta = \varepsilon^2 \left(\frac{Z^3}{3!} F_{\eta\eta\eta} \right)_\eta, \quad Z = \ln \frac{R}{a}, \quad (18)$$

$$F_\tau + \left(-2\Omega ZF - \frac{1}{2} \Omega^2 R^2 + \Omega F + \frac{1}{2} \frac{F^2}{R^2} \right)_\eta = \varepsilon^2 \left(\frac{Z^2}{2} F_{\eta\tau} - \frac{Z^2 F_\eta^2}{2R^2} + \frac{Z^2}{2} F_{\eta\eta} \left(\Omega + \frac{F}{R^2} \right) - 2\Omega \frac{Z^3}{3!} F_{\eta\eta\eta} \right)_\eta. \quad (19)$$

Если пренебрегать членами порядка $O(\varepsilon^2)$ (т.е. дисперсионными членами), то получится система гиперболических уравнений, записанная в консервативной форме

$$\left(\frac{1}{2} R^2 \right)_\tau + \left(\frac{1}{2} \Omega R^2 + ZF \right)_\eta = 0, \quad (20)$$

$$F_\tau + \left(-2\Omega ZF - \frac{1}{2} \Omega^2 R^2 + \Omega F + \frac{1}{2} \frac{F^2}{R^2} \right)_\eta = 0. \quad (21)$$

Уравнение КдВ

На основе уравнений Буссинеска (18), (19) строим амплитудное уравнение, которое в теории мелкой воды известно как уравнение КдВ [2]. Один из вариантов построения амплитудного уравнения заключается в конструировании некоторого решения в окрестности характеристик уравнений низшего приближения (20), (21) [8], что приводит к упрощению модели. Естественно, при таком упрощении систему (18), (19) следует рассматривать как новую исходную систему уравнений. Для того чтобы подчеркнуть такую независимость, далее используются два малых параметра – новый μ и старый ε^2 , которые впоследствии связываем друг с другом.

Нетрудно показать, что два характеристических направления λ_k системы (20), (21) записываются в виде $\lambda_k = \Omega \{ 1 + 2\Gamma_0 - 2\ln R_0 \mp \sqrt{(\ln R_0 - (\Gamma_0 + 1)^2) \ln R_0} \}$, $R = aR_0$, $FR^{-2} = \Gamma_0 \Omega$, и область гиперболичности системы (вещественность λ_k) определяется неравенствами

$$|\Gamma_0 + 1| < (\ln R_0)^{1/2}, \quad R_0 > 1, \quad \Omega > 0. \quad (22)$$

Рассмотрим наиболее интересный с нашей точки зрения случай, когда невозмущенная свободная поверхность представляет цилиндр радиуса $c > a$ и отклонения свободной поверхности от цилиндра достаточно малы (рис. 1).

$$R(\eta, \tau) = c(1 + \mu h(\eta, \tau)) \geq a. \quad (23)$$

Здесь $\mu h(\eta, \tau)$ – функция, характеризующая отклонение от поверхности; $r = c$; μ – параметр, характеризующий малость отклонения.

Свяжем между собой два малых параметра ε и μ и сделаем предположение о малости функции F

$$F(\eta, \tau) = \mu w(\eta, \tau), \quad \mu = \varepsilon^2. \quad (24)$$

Такое требование означает, что решение строится в окрестности некоторой характеристики, проходящей на плоскости (R, F) через точку $(c, 0)$, и соответствует случаю, когда отклонение свободной поверхности жидкости от первоначального положения и скорость течения достаточно малы.

Величина Z с точностью до членов порядка $O(\mu^2)$ имеет вид

$$Z = \ln \frac{R}{a} = Z_0 + \mu h + O(\mu^2), \quad Z_0 = \ln \frac{c}{a}. \quad (25)$$

Используя (23)–(25), запишем уравнения Буссинеска (18), (19) с точностью до членов порядка $O(\varepsilon^2)$ и $O(\mu)$

$$c^2(1 + \mu h)h_\tau + \Omega c^2(1 + \mu h)h_\eta + (Z_0 + \mu h)w_\eta = \frac{1}{6}\varepsilon^2 Z_0^3 w_{\eta\eta\eta}, \quad (26)$$

$$w_\tau + (-2\Omega(Z_0 + \mu h)w)_\eta - \Omega^2 c^2(1 + \mu h)h_\eta + \Omega w_\eta + \frac{\mu}{c^2} w w_\eta = \left(\frac{1}{2} w_{\eta\eta\tau} + \frac{1}{6} \Omega w_{\eta\eta\eta} \right). \quad (27)$$

Опуская члены порядка $O(\varepsilon^2)$ и $O(\mu)$, получим систему линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

$$h_\tau + \Omega h_\eta + \frac{Z_0}{c^2} w_\eta = 0, \quad w_\tau - \Omega^2 c^2 h_\eta + (\Omega - 2\Omega Z_0)w_\eta = 0.$$

Эта система при $Z_0 > 1$ имеет вещественные характеристики λ_1, λ_2

$$\lambda_1 = \Omega(1 - Z_0) + \Omega\sqrt{Z_0^2 - Z_0}, \quad \lambda_2 = \Omega(1 - Z_0) - \Omega\sqrt{Z_0^2 - Z_0}, \quad Z_0 > 1. \quad (28)$$

Ищем решение (26), (27) в окрестности одной из характеристик, для определенности λ_1 используя метод многомасштабных разложений. Введем новые переменные x, T и операторы дифференцирования

$$x = \eta - \lambda_1 \tau, \quad T = \mu \tau, \quad \frac{\partial}{\partial \tau} = \mu \frac{\partial}{\partial T} - \lambda_1 \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x}. \quad (29)$$

Решение ищем в виде

$$h = h^0(x, T) + \mu h^1(x, T) + \dots, \quad w = w^0(x, T) + \mu w^1(x, T) + \dots \quad (30)$$

В общем случае функции h, w зависят от новых и старых переменных: $h = h(\eta, \tau, x, T)$, $w = w(\eta, \tau, x, T)$, но можно показать, что для получения замкнутой системы уравнений достаточно ограничиться зависимостями только от новых переменных.

Подставляя (30) в (26), (27) и используя условие разрешимости, т.е. ортогональность левых собственных векторов однородной линейной системы и ее неоднородных членов, после утомительных преобразований, получим уравнение КдВ

$$h_\tau + \alpha \Omega h h_x + \beta \alpha \Omega h_{xxx} = 0, \quad (31)$$

$$\alpha = \frac{3(1 - \lambda_0)(1 - 2\lambda_0)}{2Z_0\lambda_0}, \quad (32)$$

$$\beta = \frac{Z_0^3 + 3Z_0 - 6Z_0\lambda_0 + 2\lambda_0 - 2}{1 - 2\lambda_0}, \quad (33)$$

$$\lambda_0 = 1 - Z_0 + \sqrt{Z_0^2 - Z_0}. \quad (34)$$

Переходя к исходным переменным (14), (23), (29), имеем

$$H_\tau + \lambda_0 \Omega H_\theta + \alpha \Omega H H_\theta + \beta \alpha \Omega H_{\theta\theta\theta} = 0, \quad H = \mu h, \quad R = c(1 + H). \quad (35)$$

Полученный результат означает, что уравнения (35) совпадают с обычными уравнениями КдВ, и учет кривизны свободной поверхности осуществляется лишь при помощи постоянных коэффициентов уравнения. Иными словами, это достаточно грубая модель движения слоя жидкости на поверхности цилиндра, и предыдущая модель Буссинеска должна, скорее всего, более адекватно описывать поведение такого слоя.

Периодические решения уравнения КдВ

Уравнение КдВ хорошо изучено, и в частности, известно периодическое решение – кноидальные волны. Для исследования поведения слоя жидкости уравнение (35) удобно записать для радиуса $R(\theta, t)$

$$R_t + (\lambda_0 - \alpha)\Omega R_\theta + \frac{\alpha\Omega}{c} R R_\theta + \beta \alpha \Omega R_{\theta\theta\theta} = 0. \quad (36)$$

Такая форма записи позволяет при необходимости считать величины R, Ω, c, t размерными, тогда как параметры α, λ_0, β , определенные соотношениями (32)–(34), естественно, безразмерные.

После введения автомодельной переменной ξ (перехода в движущуюся систему координат) решение уравнения (35) записывается в виде

$$R(\xi) = A \operatorname{cn}^2(y; s) + R_{\min}, \quad (37)$$

где $\xi = \theta - \delta \Omega t$, $y = \left(\frac{A}{12\beta c} \right)^{1/2} \frac{\xi}{s}$,

$$\delta = \frac{\alpha}{c} \left(\frac{2}{3} A + R_{\min} - \frac{A}{3s^2} \right) + \lambda_0 - \alpha.$$

Здесь $\operatorname{cn}(y; s)$ – эллиптическая функция Якоби; s^2 – параметр, характеризующий нелинейность

кноидальной волны ($0 \leq s^2 \leq 1$); A – амплитуда волны; $R_{\min}$ – минимальное значение функции $R(\xi)$; y – вспомогательная переменная; δ – относительная скорость движения волны (относительно твердотельного вращения со скоростью Ω).

Функция $cn^2(y; s)$ по переменной y имеет период $2K(s)$, где $K(s)$ – полный эллиптический интеграл. Длина волны периодического решения (35) по ξ (или θ – в неподвижной системе координат) определяется формулой

$$\Lambda = \left(\frac{12\beta c}{A} \right)^{1/2} s\Lambda_0, \quad \Lambda_0 = 2K(s). \quad (38)$$

Таким образом, решение задачи при фиксированных значениях радиуса цилиндра $r = a$ и первоначального положения свободной поверхности $r = c$ зависит от трех параметров – амплитуды A , минимального радиуса $R_{\min}$ и параметра нелинейности s .

1. Решение задачи в процессе эволюции должно оставаться в гиперболической области, что приводит к соотношению (22) при $\Gamma_0 \rightarrow 0$ и (25)

$$\ln \frac{R_{\min}}{a} > 1, \quad Z_0 = \ln \frac{c}{a} > 1. \quad (39)$$

2. На интервале $0 \leq \theta \leq 2\pi$ должно располагаться целое число волн. В случае m волн на окружности

$$\Lambda = \frac{2\pi}{m}. \quad (40)$$

3. Масса жидкости должна сохраняться. Закон сохранения массы в рассматриваемом случае записывается в форме

$$G(A, R_{\min}, s) \equiv \int_0^{\Lambda_0} (R^2 - c^2) dy = \int_0^{\Lambda_0} ((Acn^2(y; s) + R_{\min})^2 - c^2) dy = 0. \quad (41)$$

Интегралы от функций $cn^2(y; s)$ и $cn^4(y; s)$, которые содержатся в (41), вычисляются при помощи формул

$$I_2(s) = \int_0^{\Lambda_0} cn^2(y; s) dy = \frac{2(s^2 - 1)K(s) + 2E(s)}{s^2},$$

$$I_4(s) = \int_0^{\Lambda_0} cn^4(y; s) dy = \frac{2((3s^4 - 5s^2 + 2)K(s) + (4s^2 - 2)E(s))}{3s^4}.$$

Тогда уравнение (41) принимает вид

$$G \equiv I_4(s)A^2 + 2I_2(s)AR_{\min} + 2K(s)(R_{\min}^2 - c^2) = 0.$$

Заметим, что на плоскости $(A, R_{\min})$ кривая $G = 0$ при $0 < s < 1$ представляет собой эллипс.

Определим из уравнения (38) величину A , которая с учетом (25), (33), (34), (40) зависит от параметров c , m , s . Подставляя $A(c, m, s)$ в уравнение (41) и решая его относительно $R_{\min}$, получим

$$R_{\min} = R_{\min}(c, s, m).$$

Оказывается, что условия (39) и целочисленность параметра m накладывают существенные ограничения на выбор параметра нелинейности волн s и первоначальный радиус свободной поверхности $r = c$,

$$ae \leq R_{\min}(c, s, m) \leq c, \quad m = 1, 2, \dots \quad (42)$$

При $s < s_1 = 0,16304$ и $m > 1$ неравенство (42) никогда не выполняется. Это означает, что при $s < s_1 = 0,16304$ не существует периодических решений вида (37). При $s = s_1$, $m = 1$ неравенство выполнено лишь для $c = c_1 = 3,3965434$. Значения s_m , c_m для различных m даны в табл. 1. Обратим внимание, что с хорошей степенью точности $c_m \approx c_1$ и $ms_m \approx s_1$.

На интервале $s_2 < s \leq s_1$ может существовать лишь волна $m = 1$. Такая волна существует лишь в случае $c_{\min}^{21} < c < c_{\max}^{21}$ (табл. 2). На интервале $s_3 < s \leq s_2$ могут существовать волна $m = 2$ при $c_{\min}^{32} < c < c_{\max}^{32}$ и волна $m = 1$ при $c_{\min}^{31} < c < c_{\max}^{31}$ и т.д.

Таблица 1

Параметры, при которых возникает m волн

m	s_m	c_m	s_1/s_m
1	0,16304	3,3965434	1,000
2	0,08183	3,3966979	1,992
3	0,05459	3,3967263	2,986
4	0,04095	3,3967363	3,980
5	0,03277	3,3967409	4,975
6	0,02731	3,3967433	5,969
7	0,02341	3,3967449	6,964
8	0,02048	3,3967458	7,959
9	0,01820	3,3967465	8,954
10	0,01638	3,3967470	9,948
11	0,01489	3,3967473	10,943

На рис. 2 в случае $s = s_6$ показано поведение функций $R_{\min}(s_6, m, c)$, $A(s_6, m, c)$ для $m = 5$. Эта ситуация соответствует случаю, когда могут возникнуть волны $m = 6, 5, 4, 3, 2, 1$. На этом рисунке хорошо видна причина, по которой возникает ограничение на изменение параметра c . Неравенство (39) выполнено лишь при условии $c_{\min} < c < c_{\max}$.

Обратим внимание на интересную особенность поведения $c_{\min}^{mn}$, $c_{\max}^{mn}$ (табл. 2). С хорошей степенью

точности (практически совпадают) выполнены соотношения $c_{\min}^{mn} \approx c_{\min}^{m_1 n_1}$, $c_{\max}^{mn} \approx c_{\max}^{m_1 n_1}$, если $m/n = m_1/n_1$.

Таблица 2

Интервалы, на которых возможно различное количество волн

m	$n < m$	$c \in (c_{\min}^{mn}, c_{\max}^{mn})$
2	1	(2,7789, 8,2234)
3	2	(2,8381, 5,8994)
3	1	(2,7436, 13,919)
4	3	(2,8823, 5,1736)
4	2	(2,7789, 8,2238)
4	1	(2,7322, 21,385)
5	4	(2,9166, 4,8113)
5	3	(2,8107, 6,6442)
5	2	(2,7555, 10,875)
5	1	(2,7271, 31,015)
6	5	(2,9442, 4,5910)
6	4	(2,8381, 5,8995)
6	3	(2,7789, 8,2239)
6	2	(2,7436, 13,920)
6	1	(2,7244, 43,242)
7	6	(2,9671, 4,4412)
7	5	(2,8617, 5,4627)
7	4	(2,8006, 7,0269)
7	3	(2,7615, 9,9506)
7	2	(2,7367, 17,407)
7	1	(2,7227, 58,555)

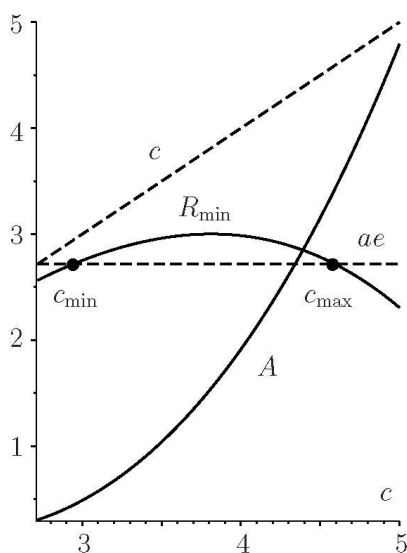


Рис. 2. Зависимости $R_{\min} = R_{\min}(c)$, $A = A(c)$ при $s = s_6 = 0,02731$, $m = 5$, $a = 1$

Наконец, для некоторого частного случая значений параметров $c = 4$, $s = 0,02731$, $m = 5$, на рис. 3 приведено положение свободной поверхности $r = R(\theta, t)$, движущееся с угловой скоростью $\delta\Omega$.

При этом $R_{\min} = 2,9861$, $A = 1,9127$, $\beta = 8,5445$, $\alpha = 0,6334$, $\delta = -134,9643$, $\lambda_0 = 0,3455$, $a = 1$.

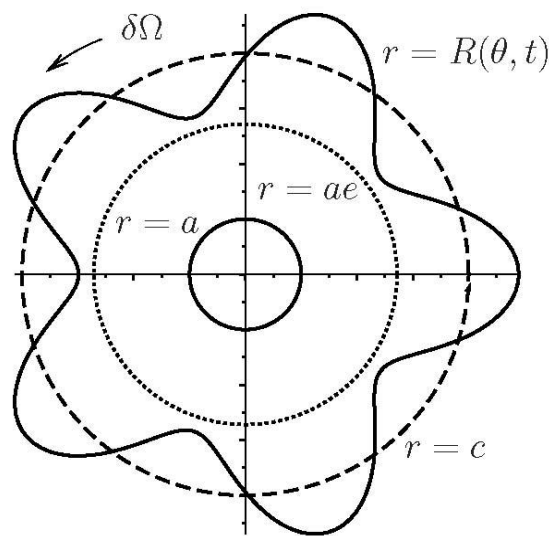


Рис. 3. Свободная поверхность $r = R(\theta, t)$ при $s = s_6 = 0,02731$, $m = 5$

Во избежание недоразумений еще раз укажем, что уравнение (36) в данном разделе считается самостоятельным уравнением и малость величины $\mu H = (R/c - 1)$ не требуется.

Получены три модели, описывающие поведение слоя несжимаемой идеальной жидкости на поверхности вращающегося цилиндра. Модель Буссинеска (18), (19), наиболее точная из них, учитывает кривизну свободной поверхности слоя жидкости. Уравнение КдФ (35) или (36) является грубой моделью, позволяющей произвести учет кривизны лишь при помощи постоянных коэффициентов. Система квазилинейных уравнений (18), (19) в случае ее гиперболичности также позволяет получить информацию о поведении слоя. Несмотря на то что модель (36) является приближенной, она, тем не менее, позволяет построить решение, соответствующее прецессии слоя в азимутальном направлении, определить форму свободной поверхности и скорость прецессии.

Приведенные расчеты показывают, что волны на поверхности жидкости возможны лишь в случае $s \leq 0,16304$. Такое значение параметра является достаточно малым для того, чтобы рассматривать так называемый гармонический предел решений уравнения КдВ ($s \rightarrow 0$), когда кноидальные волны фактически являются гармоническими. Использование разложений в ряды по параметру s позволит существенно упростить формулы (38)–(42).

Укажем на некоторое расширение результатов работы. Строго говоря, если считать (36) самостоятельной моделью, то условие гиперболичности (39) не является обязательным, и его можно заменить условием $R_{\min} \geq a$, сохраняя при этом неравенство

$Z_0 > 1$, которое необходимо для вычисления коэффициентов α, β при помощи (32)–(34). В этом случае максимальное значение параметра нелинейности s , при котором возможно возникновение волны $m=1$, будет $s \approx 0,42$. Даже при таком сравнительно большом значении s картина эволюции волн существенно не изменится, и они по-прежнему будут близки к гармоническим.

Возможно и дальнейшее развитие результатов. Во-первых, интересно рассмотреть солитонный предел решения (37) при $s=1$. В этом случае длина волны $\Lambda = 0$ (см. (38)), что формально соответствует случаю $m=0$ в (39). Во-вторых, можно отказаться от целочисленности параметра m и пытаться строить решения, близкие к разрывным. В принципе, модель «низшего приближения» (20), (21) – это система гиперболических уравнений, записанная в консервативной форме, что легко позволяет записать условие Ренкина – Гюгонио на разрывах. Наличие дисперсионных членов в более точной модели (18), (19) позволит сгладить разрывы решений. В-третьих, модель (36) соответствует амплитудному уравнению в окрестности характеристики λ_1 (см. (28)) и в предположении, что $F = \mu\omega$ (т.е. достаточно мало (24)). Можно отказаться строить решение в окрестности характеристики λ_2 , либо отказаться от условия (31), заменив его, например, условием $F = -\Omega R^2 + \mu\omega$, что, естественно, приведет к новым значениям параметров α, β , отличных от заданных формулами (32)–(34).

Литература

1. Ляпидевский В.Ю., Тешуков В.М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск, 2000. 420 с.
2. Овсянников Л.В., Макаренко Н.И., Налимов В.И. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск, 1985. 319 с.

3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М., 1977. 622 с.
4. Korteweg D., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves // Phil. Mag. 1985. Vol. 5, № 39. P. 422–443.
5. Zhukov M.Yu., Morad A.M. Thin Film Motion of an Ideal Fluid on the Rotating Cylinder Surface // arXiv: 1303.2327. 2013. Vol. 1. 10 p.
6. Жуков М.Ю., Морад А.М., Ширяева Е. В. Исследование уравнений мелкой воды на поверхности неподвижного цилиндра // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2014. № 5. С. 32–36.
7. Morad A.M., Zhukov M.Yu. The motion of a thin liquid layer on the outer surface of a rotating cylinder // European Phys. J. Plus. 2015. Vol. 130. 8 p.
8. Додд Р., Эйльбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М., 1988. 694 с.

References

1. Lyapidevskii V.Yu., Teshukov V.M. *Matematicheskie modeli rasprostraneniya dlinnykh voln v neodnorodnoi zhidkosti* [Mathematical models of propagation of long waves in an inhomogeneous liquid]. Novosibirsk, 2000, 420 p.
2. Ovsyannikov L.V., Makarenko N.I., Nalimov V.I. *Nelineinye problemy teorii poverkhnostnykh i vnutrennikh voln* [Non-linear problems of the theory of surface and internal waves]. Novosibirsk, 1985, 319 p.
3. Uizem Dzh. *Lineinye i nelineinye volny* [Linear and non-linear waves]. Moscow, 1977, 622 p.
4. Korteweg D., de Vries G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular channel, and on a new type of long stationary waves. *Phil. Mag.*, 1985, vol. 5, no 39, pp. 422–443.
5. Zhukov M.Yu., Morad A.M. Thin Film Motion of an Ideal Fluid on the Rotating Cylinder Surface. *arXiv:1303.2327*, 2013, vol. 1, 10 p.
6. Zhukov M.Yu., Morad A.M., Shiryayeva E.V. *Issledovanie uravnenii melkoi vody na poverkhnosti nepodvizhnogo tsilindra* [Study of shallow water equations on the surface of the fixed cylinder]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2014, no 5, pp. 32–36.
7. Morad A.M., Zhukov M.Yu. The motion of a thin liquid layer on the outer surface of a rotating cylinder. *European Phys. J. Plus.*, 2015, vol. 130, 8 p.
8. Dodd R., Eilbek Dzh., Gibbon Dzh., Morris Kh. *Solitony i nelineinye volnovye uravneniya* [Solitons and nonlinear wave equations]. Moscow, 1988, 694 p.

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СКОЛЬЗЯЩЕГО ТЕРМОФРИКЦИОННОГО КОНТАКТА ЖЕСТКОГО ТЕЛА С УПРУГИМ ПОКРЫТИЕМ, СОДЕРЖАЩИМ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКУЮ ПРОСЛОЙКУ*

© 2015 г. В.Б. Зеленцов, Б.И. Митрин, С.М. Айзикович, Л.Л. Кэ

Зеленцов Владимир Борисович – кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, руководитель ресурсного центра коллективного пользования научно-образовательного центра «Материалы», Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов н/Д, 344000, e-mail: vbzelen@gmail.com

Zelentsov Vladimir Borisovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Senior Researcher, Head of Scientific Equipment Joint Use Center, Research and Education Center «Materials», Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: vbzelen@gmail.com

Митрин Борис Игоревич – младший научный сотрудник, лаборатория функционально-градиентных и композиционных материалов научно-образовательного центра «Материалы», Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов н/Д, 344000, e-mail: bmitrin@dstu.edu.ru

Mitrin Boris Igorevich – Junior Researcher, Functionally Graded and Composite Materials Laboratory of the Research and Education Center «Materials», Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: bmitrin@dstu.edu.ru

Айзикович Сергей Михайлович – доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник, заведующий лабораторией функционально-градиентных и композиционных материалов научно-образовательного центра «Материалы», Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону, 344000, e-mail: saizikovich@gmail.com

Aizikovich Sergei Mikhailovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Senior Researcher, Head of Functionally Graded and Composite Materials Laboratory of the Research and Education Center «Materials», Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: saizikovich@gmail.com

Ляо Лян Кэ – кандидат наук, доцент, кафедра механики, факультет гражданского строительства, Пекинский транспортный университет, ул. Шанюаньцунь, 3, округ Хайдянь, Пекин, 100044, КНР, e-mail: llke@bjtu.edu.cn

Liao-Liang Ke – Ph.D., Associate Professor, Department of Mechanics, Faculty of Civil Engineering, Beijing Jiaotong University, Shangyuancun, 3, Haidan District, Beijing, 100044, China, e-mail: llke@bjtu.edu.cn

При эксплуатации триботехнических устройств неустойчивость скользящего контакта приводит к возникновению нештатных ситуаций. Для их предотвращения применяются системы мониторинга, в том числе на основе пьезодатчиков. Процесс мониторинга описывается задачей о скользящем термофрикционном контакте жесткого тела с упругим покрытием, содержащим пьезокерамическую прослойку, при этом покрытие сцеплено с жесткой подложкой. Предварительный анализ полученных решений проводится на основе решений сопутствующих задач.

Ключевые слова: неустойчивость термофрикционного контакта, диагностика, электроупругость, пьезокерамика, термоупругость.

Operation of frictional joints is subjected to sliding instability, which leads to incidents and faults. To prevent this, monitoring systems are used, including those based on piezosensors. In this paper, such system is studied in contact problem on frictional sliding of a rigid body with an elastic coating on a piezoceramic interlayer, bonded to a rigid foundation. Frictional heat generation is taken into account. Some introductory analysis of obtained solutions is carried out, based on solutions of particular problems.

Keywords: sliding thermoelastic instability, diagnostics, piezoelectricity, piezoceramics, thermoelasticity.

Постановка задачи

В целях исследования степени влияния термофрикционного скользящего контакта, возникающего между жестким телом и упругим покрытием, на пьезоэлектрическую прослойку рассматривается нестационарная контактная задача термоупругости о скольжении с постоянной скоростью жесткой полу-

плоскости I по поверхности упругого покрытия, сцепленного с электроупругой прослойкой конечной толщины, жестко соединенной с недеформируемой подложкой в виде полуплоскости II (рис. 1). Полуплоскость I в процессе скольжения внедряется в упругое покрытие по нормали к его поверхности. Скольжение между теплоизолированной недеформируемой полуплоскостью I и поверхностью упру-

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 14-08-91166-ГФЕН_а, № 15-38-20790-мол_а_вед). Участие Б.И. Митрина поддержано стипендией Президента РФ для молодых ученых и аспирантов № СП-137.2015.1.

ного покрытия осуществляется с учётом кулоновского трения, но без учёта степени износа. Поток тепла, образующийся за счёт трения на контакте, направлен в упругое покрытие, сцепленное по нижней своей поверхности с пьезоэлектрической прослойкой конечной толщины. Прослойка, в свою очередь, сцеплена с недеформируемой подложкой в виде полуплоскости II, а её грани покрыты электродами с подведенной разностью потенциалов. Так как покрытие и электроупругая прослойка до начального момента находились в покое, то упругие смещения и их скорости в покрытии и в прослойке в начальный момент времени равны нулю, как и начальная температура.

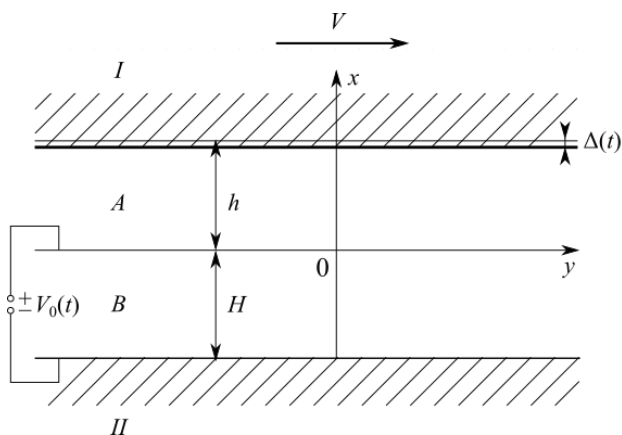


Рис. 1. К постановке контактной задачи об упругом покрытии с пьезоэлектрической прослойкой

Сформулированная задача приводит к следующим граничным условиям:

механическим

$$x = h, \quad u(h, t) = -\Delta(t), \quad \sigma_{xy}(h, t) = -f\sigma_{xx}(h, t), \quad (1)$$

$$x = 0, \quad u(0, t) = u_1(0, t), \quad \sigma_{xx}(0, t) = \sigma_{1xx}(0, t),$$

$$w(0, t) = w_1(0, t), \quad \sigma_{xy}(0, t) = \sigma_{1xy}(0, t) \quad (2)$$

$$x = -H, \quad u_1(-H, t) = 0, \quad w_1(-H, t) = 0;$$

температурным

$$x = h, \quad K \frac{\partial T(h, t)}{\partial x} = -fV\sigma_{xx}(h, t), \quad (3)$$

$$x = 0, \quad T(0, t) = 0,$$

электрическим

$$x = 0, \quad \psi(0, t) = V_0(t), \quad (4)$$

$$x = -H, \quad \psi(-H, t) = -V_0(t)$$

где $\sigma_{xx}(x, t)$, $\sigma_{1xx}(x, t)$, $\sigma_{xy}(x, t)$, $\sigma_{1xy}(x, t)$, $u(x, t)$, $w(x, t)$, $u_1(x, t)$, $w_1(x, t)$, $T(x, t)$, $\psi(x, t)$ – нормальные и касательные напряжения в покрытии и прослойке; вертикальные и горизонтальные смещения в покрытии и прослойке; температура в покрытии; электрический потенциал в электроупругой прослойке; h – толщина покрытия; H – толщина

прослойки; $\Delta(t)$ – закон внедрения полуплоскости I в упругое покрытие; f – коэффициент трения; K – коэффициент теплопроводности; V – скорость скольжения полуплоскости I по поверхности покрытия; $2V_0(t)$ – разность потенциалов между электродами электроупругой прослойки.

Изменение $\sigma(x, t)$ и $u(x, t)$ описывается в покрытии уравнением движения динамической теории упругости

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < h, \quad t > 0,$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}, \quad (5)$$

где u , w – смещения в покрытии.

Изменение $\sigma_1(x, t)$ и $u_1(x, t)$ в прослойке описывается уравнением

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x} - \rho_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} = 0, \quad 0 < x < h, \quad t > 0,$$

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} \sigma_{1xx} \\ \sigma_{1xy} \end{pmatrix}, \quad u_1 = \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

где σ_{1xx} , σ_{1xy} – нормальные и касательные напряжения в прослойке; u , w – смещения в прослойке.

Температура $T(x, t)$ в покрытии описывается уравнением теплопроводности (при нулевой в ненапряженном начальном состоянии)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad 0 < x < h, \quad t > 0, \quad (7)$$

где κ – коэффициент температуропроводности материала покрытия.

Электрическая индукция $D_x(x, t)$ и напряженность электрического поля $E(x, t)$ в прослойке описываются уравнениями вынужденной электростатики [1]

$$\frac{\partial D_x}{\partial x} = 0, \quad E = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad -H < x < 0, \quad t > t_d. \quad (8)$$

Связь между $\sigma_{xx}(x, t)$, $u(x, t)$, $T(x, t)$, а также $\sigma_{xy}(x, t)$, $w(x, t)$ в покрытии устанавливается формулами [2]

$$\sigma_{xx}(x, t) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2\mu(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha T(x, t),$$

$$\sigma_{xy}(x, t) = \mu \frac{\partial w}{\partial x}, \quad (9)$$

где μ , ν , α – модуль сдвига, коэффициент Пуассона, коэффициент линейного теплового расширения материала покрытия соответственно.

Соотношение между $\sigma_{1xx}(x, t)$, $u_1(x, t)$, $\psi(x, t)$ в прослойке из пьезоэлектрики устанавливается формулой

$$\sigma_1(x, t) = \frac{1}{s_{33}^E} \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{d_{33}^E}{s_{33}^E} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (10)$$

в которой s_{33}^E , d_{33}^E – электрическая податливость (определяемая при постоянном значении электрического поля), пьезоэлектрическая постоянная соответственно.

К дифференциальным уравнениям (5)–(8) необходимо добавить нулевые начальные условия на u , w , u_1 , w_1 , ψ , Δ

$$\begin{aligned} u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x, 0) = \frac{\partial u_1(x, 0)}{\partial t} = \\ = w(x, 0) = \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = w_1(x, 0) = \frac{\partial w_1(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad (11) \\ T(x, 0) = 0, \quad \psi(x, 0) = 0, \quad \Delta(0) = 0. \end{aligned}$$

Решение задачи

Для решения динамической начально-краевой задачи (1)–(11) интегральное преобразование Лапласа [3] применяется к дифференциальным уравнениям (5)–(8) и граничным условиям (1)–(4) с учётом начальных условий (11), и после несложных преобразований её решения $T(x, t)$, $u(x, t)$, $\sigma_{xx}(x, t)$, $u_1(x, t)$, $\sigma_{1xx}(x, t)$, $\psi(x, t)$ записываются в виде контурных квадратур обратного преобразования Лапласа

$$\begin{aligned} T(x, t) = \frac{1-\nu}{1+\nu} \frac{\gamma \hat{V}}{a h} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{N_T(x, z)}{R(z)} \left[D(z)(1-M_1(z)) + \right. \\ \left. + V_0(t) \frac{N(z)}{R_1(z)l(x, z)} (1-M_2(z)) \right] e^{z\tilde{t}} dz, \\ 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \\ N_T(x, z) = \sqrt{z}(1-\gamma^2 z) \operatorname{ch}(\gamma z)(\sqrt{z} x h^{-1}), \\ l(x, z) = \operatorname{ch}(\gamma z a_* H_*) \operatorname{sh}(\sqrt{z} x h^{-1}), \\ m(z) = \left(-\gamma^2 z \operatorname{ch} \sqrt{z} - \gamma \hat{V} \left(\operatorname{sh} \gamma z - \gamma \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} \right) \right), \\ m_1(z) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \gamma z H_* \operatorname{sh}(\gamma z a_* H_*) m(z), \\ m_2(z) = \frac{2\mu(1-\nu)}{1-2\nu} \gamma z H_* \operatorname{sh}(\gamma z a_* H_*) \left[-\gamma^2 z \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{ch} \gamma z - \right. \\ \left. - \gamma \hat{V} \left(\operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{sh} \gamma z - \gamma \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{ch} \gamma z \right) \right], \\ M_k(z) = m_k(z) R_0^{-1}(z), \quad k=1, 2, \\ R_0(z) = m_2(z) - R(z) R_1(z), \quad N(z) = 2 \frac{d_{33}^E}{s_{33}^E} \operatorname{sh}(\gamma z a_* H_*), \\ R(z) = \left(-\gamma^2 z \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{sh} \gamma z - \right. \\ \left. - \gamma \hat{V} \left(\operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{ch} \gamma z - \gamma \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{sh} \gamma z - 1 \right) \right), \\ R_1(z) = b^2 \frac{d_{33}^E}{s_{33}^E} \operatorname{sh}(\gamma z a_* H_*) - \frac{1+d_{33}^E b^2}{s_{33}^E} \gamma z a_* H_* \operatorname{ch}(\gamma z a_* H_*), \end{aligned} \quad (12)$$

где $a_* = a/c$, $H_* = H/h$.

$$\begin{aligned} u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int \left[D(z) \left(\frac{N_u(z)}{R(z)} - M_1(z) U(x, z) \right) - \right. \\ \left. - V_0(t) \frac{N(z)}{R_1(z)} (1-M_2(z)) U(x, z) \right] e^{z\tilde{t}} dz, \end{aligned}$$

$$0 \leq x \leq h, \quad t > 0,$$

$$\begin{aligned} N_u(x, z) = \left(-\gamma^2 z \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{sh} \gamma z \operatorname{ch} x h^{-1} \right) - \\ - \gamma \hat{V} \left(\operatorname{sh} \left(\sqrt{z} x h^{-1} \right) \operatorname{ch} \gamma z - \gamma \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{sh} \gamma z \operatorname{ch} x h^{-1} \right) - \\ - \operatorname{ch} \left(\sqrt{z} (h-x) h^{-1} \right), \\ U(x, z) = \left[m(z) \operatorname{sh}(\gamma z h^{-1} x) - R(z) - \gamma \hat{V} \operatorname{ch}(\gamma z h^{-1} x) - \right. \\ \left. - \gamma V \operatorname{ch}(\sqrt{z} h^{-1} x) R(z) \right] R^{-1}(z), \\ \sigma_{xx}(x, t) = -\frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \frac{1}{2\pi i} \int \left[D(z) \left(\frac{N_\sigma^0(z)}{R(z)} - M_1(z) \Sigma(x, z) \right) + \right. \\ \left. + V_0(t) \frac{N(z)}{R_1(z)} (1-M_2(z)) \Sigma(x, z) \right] e^{z\tilde{t}} dz, \quad 0 \leq x \leq h, \quad t > 0, \\ N_\sigma^0(x, z) = \gamma z \left[-\gamma^2 z \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{ch} \gamma z \operatorname{ch} x h^{-1} \right] + \\ + \gamma \hat{V} \left(\sqrt{z} \left(\operatorname{sh} \sqrt{z} \operatorname{ch} \gamma z \operatorname{ch} x h^{-1} \right) \operatorname{sh} \left(\sqrt{z} x h^{-1} \right) \operatorname{ch} \gamma z \right) \operatorname{sh} \gamma z (h-x) h^{-1} \Big], \\ \frac{2\mu(1-\nu)}{(1-2\nu)h} \Sigma(x, z) = \left[h(z) \operatorname{ch}(\gamma z h^{-1} x) - \right. \\ \left. - R(z) - \gamma \hat{V} \operatorname{sh} \gamma z h^{-1} x - \gamma \hat{V} \operatorname{sh}(\gamma z h^{-1} x) R(z) \right] R^{-1}(z), \\ u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int \left[D(z) M_1(z) \frac{\operatorname{sh}(\gamma z a_* (H+x) h^{-1})}{\operatorname{sh}(\gamma z a_* H_*)} - \right. \\ \left. - V_0(t) \frac{N(z)}{R_1(z)} (1-M_2(z)) \frac{\operatorname{sh}(\gamma z a_* (H+x) h^{-1})}{\operatorname{sh}(\gamma z a_* H_*)} \right] e^{z\tilde{t}} dz, \\ -H \leq x \leq 0, \quad t > t_a, \\ \sigma_{1xx}(x, t) = \\ = -\frac{1}{2\pi i} \int \left[D(z) M_1(z) \Sigma_1(x, z) + V_0(t) \frac{N(z)}{R_1(z)} \Sigma_2(x, z) \right] e^{z\tilde{t}} dz, \\ -H \leq x \leq 0, \quad t > t_a, \\ \Sigma_1(x, t) = \\ = \frac{1+d_{33}^E b^2}{s_{33}^E} \gamma z a_* H_* \left(\frac{\operatorname{ch}(\gamma z a_* (H+x)^{-1})}{\operatorname{sh}(\gamma z a_* H_*)} + \frac{d_{33}^E b^2}{1+d_{33}^E b^2} \frac{1}{\gamma z a_* H_*} \right), \\ \Sigma_2(x, t) = \frac{1+d_{33}^E b^2}{s_{33}^E} \left(-M_2(z) \frac{\operatorname{ch}(\gamma z a_* H_*)}{\operatorname{sh}(\gamma z a_* H_*)} - \right. \\ \left. - 2 \frac{d_{33}^E b^2}{s_{33}^E} \gamma z a_* \left(-M_2(z) \frac{\operatorname{th}(\gamma z a_* H_*)}{\gamma z a_* H_*} + \frac{1}{s_{33}^E} \frac{\gamma z a_*}{\operatorname{th}(\gamma z a_* H_*)} \right) \right), \\ \psi(x, t) = -b^2 \frac{1}{2\pi i} \int \left[D(z) \psi_1(z) - V_0(z) \frac{N(z)}{R_1(z)} \psi_2(x, z) \right] e^{z\tilde{t}} dz, \\ -H \leq x \leq 0, \quad t > t_a, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned}\psi_2(x,t) &= (1-M_2(z)) \frac{\operatorname{sh}(\gamma a_*(H+x)h^{-1})}{\operatorname{sh}(\gamma a_* H_*)} \\ &- \operatorname{cth}(\gamma a_* H_*) (1-M_2(z) \operatorname{th}(\gamma a_* H_*)) \frac{x}{H} + M_2(z) - \\ &- \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1+d_{33}b^2}{d_{33}b^2} \gamma a_* H_* \operatorname{ch}(\gamma a_* H_*) \right), \\ \psi_1(x,t) &= \frac{\operatorname{sh}(\gamma a_*(H+x)h^{-1})}{\operatorname{sh}(\gamma a_* H_*)} \frac{x}{H} - 1.\end{aligned}$$

Параметры $a, b, c, \gamma, \hat{V}, \tilde{t}, t_k, t_a$ задаются формулами

$$\begin{aligned}a &= \sqrt{\frac{2\mu(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)}}, \quad b = \sqrt{\frac{k_{33}^2}{d_{33}(1-k_{33}^2)}}, \quad c = \sqrt{\frac{1}{\rho s_{33}^E(1-k_{33}^2)}}, \\ \tilde{t} &= \frac{t}{t_k}, \quad t_k = \frac{h^2}{\kappa}, \quad t_a = \frac{h}{a}, \\ \gamma &= \frac{\kappa}{ah}, \quad \hat{V} = \frac{fV\alpha}{K} \frac{2\mu(1+\nu)h}{1-2\nu}.\end{aligned}\quad (14)$$

Исследование подынтегральных функций в (12), (13) показывает, что все они мероморфны в комплексной плоскости переменной интегрирования $z = \xi + i\eta$, т.е. имеют в качестве изолированных особых точек только полюсы. Параметр d подбирается таким образом, что все полюсы лежат левее Γ в комплексной плоскости.

При вычислении контурных квадратур в (12), (13) методами теории функций комплексного переменного необходимо знание полюсов подынтегральных функций, что является достаточно трудоемкой задачей. Для решения поставленной задачи предлагается исследовать частные задачи: при $H=0$ (эластичная прослойка нулевой толщины) и при $H=\infty$ (пьезокерамическая прослойка в виде полуплоскости). Решение частных задач можно получить предельным переходом при $H \rightarrow 0$ и $H \rightarrow \infty$ в (12), (13), либо поставить эти задачи и, получив их решение, также сравнить с предельным переходом.

Замечание. В граничных условиях задачи (1)–(4) вертикальные смещения $u(x,t)$ не зависят от горизонтальных смещений $w(x,t)$ и определяются независимо от них. Горизонтальные смещения $w(x,t)$ зависят от вертикальных $u(x,t)$ через второе условие в граничном условии (1). Так как ведущая роль в описании напряженно-деформированного состояния в рамках рассматриваемой задачи принадлежит вертикальным смещениям $u(x,t)$, то горизонтальные смещения $w(x,t)$ здесь не рассматриваются.

Постановка частной задачи ($H=0$)

Рассматривается задача плоской деформации о скольжении с постоянной горизонтальной скоростью V жесткой полуплоскости I по поверхности

упругого покрытия толщины h . Жесткая полуплоскость I в процессе скольжения внедряется в покрытие по нормали к его поверхности. Нижняя грань покрытия жестко соединена с недеформируемой подложкой в виде полуплоскости II . Постановка задачи в плане схематично изображена на рис. 2. Скольжение недеформируемой полуплоскости I по верхней грани упругого покрытия происходит с учетом кулоновского трения, но без учета его износа. Движущаяся полуплоскость I теплоизолирована, а поток тепла, образующийся за счет трения, направлен в покрытие. На нижней поверхности упругого покрытия поддерживается нулевая температура. Так как покрытие до начального момента находилось в покое, то его смещения и скорость смещений в начальный момент нулевые, как и начальная температура.

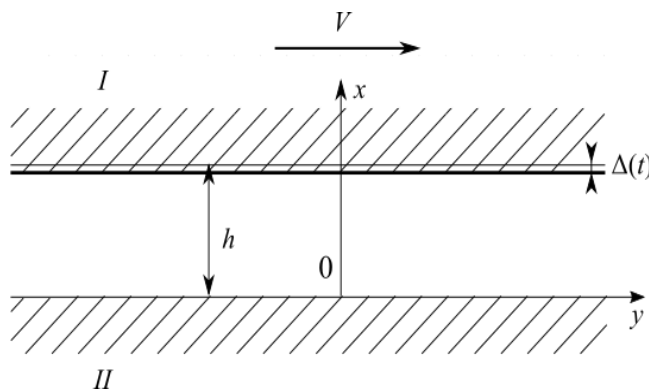


Рис. 2. К постановке частной задачи ($H=0$)

Сформулированная задача приводит к начально-краевой задаче со следующими механическими и температурными граничными условиями:

$$\begin{aligned}x=h, \quad u(h,t) &= -\Delta(t), \quad K \frac{\partial T(h,t)}{\partial x} = -fV\sigma_{xx}(h,t), \\ \sigma_{xy}(h,t) &= -f\sigma_{xx}(h,t),\end{aligned}\quad (15)$$

$$x=0, \quad u(0,t)=0, \quad T(0,t)=0, \quad w(0,t)=0,$$

где $\sigma_{xx}(x,t)$, $\sigma_{xy}(x,t)$, $u(x,t)$, $w(x,t)$, $T(x,t)$ – нормальные и касательные напряжения, вертикальные и горизонтальные смещения и температура в покрытии. Закон внедрения $\Delta(t)$ принимается в виде

$$\begin{aligned}\Delta(t) &= \Delta_0[(-1+e^{\varepsilon t})H(t-t_\varepsilon) + H(t-t_\varepsilon)], \\ \varepsilon > 0, \quad t > 0, \quad t_\varepsilon > 0,\end{aligned}\quad (16)$$

с нулевым начальным условием

$$\Delta(0)=0, \quad (17)$$

где $t_\varepsilon = \varepsilon^{-1} \ln 2$ – момент окончания активного промежутка внедрения полуплоскости I в упругое покрытие по закону $\Delta_0(-1+e^{\varepsilon t})$ с последующим при $t > t_\varepsilon$ удержанием полуплоскости I на достигнутом

заглублении Δ_0 ($\Delta_0 < h$). При заданном Δ_0 и начальной скорости внедрения $v_0 = \dot{\Delta}(0) = \varepsilon \Delta_0$ параметр $\varepsilon = v_0/\Delta_0$; K – коэффициент теплопроводности материала покрытия; $H(t)$ – функция Хевисайда.

Изменение смещений $u(x, t)$ и напряжений $\sigma_{xx}(x, t)$ в покрытии описывается уравнением движения динамической теории упругости (5), а температуры $T(x, t)$ (при нулевой в ненапряженном начальном состоянии) – уравнением теплопроводности (7).

Связь между $\sigma_{xx}(x, t)$, $u(x, t)$, $T(x, t)$, а также между $\sigma_{xy}(x, t)$, $w(x, t)$ устанавливается формулами (9).

Начальные условия на $u(x, t)$, $T(x, t)$ нулевые:

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad T(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq h. \quad (18)$$

Решение частной задачи ($H = 0$)

Решение нестационарной начально-краевой контактной задачи с дифференциальными уравнениями (5), (7), граничными (15)–(17) и начальными (18) условиями записывается в виде контурных квадратур обратного преобразования Лапласа

$$T(x, t) = \frac{1-v}{1+v} \frac{\gamma \hat{V}}{\alpha h} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) N_T \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) dz, \quad (19)$$

$$0 \leq x \leq h, \quad t > 0.$$

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) N_u \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) dz,$$

$$0 \leq x \leq h, \quad t > 0,$$

$$\sigma(x, t) = \quad (20)$$

$$= -\frac{2\mu(1-v)}{(1-2v)h} \left[\delta(x, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} D(z) N_{\sigma} \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) dz \right],$$

$$0 \leq x \leq h, \quad t > 0,$$

$$\delta(x, t) = t_a \sum_{n=1}^{[at/2h]} \Delta_n \left(\frac{x}{h}, t \right) \Delta_n^+ \left(\frac{x}{h}, t \right), \quad (21)$$

$$\Delta_0^{-1} D(z) = z^{-1} \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) + \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) - \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right),$$

$$N_T(x, z) = \sqrt{z} \left(-\gamma^2 z \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} \right), \quad (22)$$

$$R(z) = \left(-\gamma^2 z \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} - \gamma \hat{V} \left(\operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} - \gamma \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} \right) \right), \quad (23)$$

$$N_u(x, z) = \left(-\gamma^2 z \operatorname{ch} \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} - \gamma \hat{V} \left(\operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} - \gamma \sqrt{z} \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{ch} \sqrt{z} (h-x) h^{-1} \right) \right), \quad (24)$$

$$N_{\sigma}(x, z) = \gamma z \left[V_{\sigma}^0(x, z) \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} - \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} \right] R_{\sigma}^0(x, z) + \gamma \hat{V} \left(\sqrt{z} \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{sh} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} - \operatorname{sh} \sqrt{z} (h-x) h^{-1} \right) R_{\sigma} \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right), \quad (25)$$

где $s_n^{\pm} \left(\frac{z}{h}, t \right) = t - \frac{(n-1)h \pm x}{a}$; $t_{\varepsilon k} = \frac{t_{\varepsilon}}{t_k}$; контур интегрирования $\Gamma = \{ -i\infty + dt_k, i\infty + dt_k \}$; $\tilde{t}$, t_k , t_a , γ , $\hat{V}$, a указаны в (14). Внеинтегральные слагаемые в (20) получены после регуляризации квадратуры с помощью выражения $D \left(\frac{z}{h} \right) \operatorname{ch} \sqrt{z} x h^{-1} \operatorname{sh}^{-1} \sqrt{z} x h^{-1}$.

Исследование подынтегральных функций в (19), (20), составленных из (20)–(25), показывает, что все они мероморфны в комплексной плоскости переменной интегрирования $z = \xi + i\eta$ и имеют в качестве изолированных особых точек только полюсы. Контур интегрирования Γ находится правее всех полюсов подынтегральных функций.

Замечание. Функции, стоящие под интегралами в (19), (20), имеют при $z = 0$ и $z = \gamma^{-2}$ устранимые особые точки [3].

Анализ решений.

Область неустойчивых решений

После вычисления контурных квадратур в (19), (20) методами теории функций комплексного переменного [4] решение задачи в динамической постановке записывается с помощью бесконечных функциональных рядов

$$T(x, t) = \frac{1-v}{1+v} \frac{\gamma \hat{V}}{\alpha h} \sum_{k=1}^2 S_k \left(\frac{x}{h}, t \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) - t_{\varepsilon k}, \quad (26)$$

$$0 \leq x \leq h, \quad t > 0,$$

$$u \left(\frac{x}{h}, t \right) = -\Delta_0 \sum_{k=1}^2 S_k \left(\frac{x}{h}, t \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) - t_{\varepsilon k},$$

$$0 \leq x \leq h, \quad t > 0,$$

$$\sigma \left(\frac{x}{h}, t \right) = -\frac{2\mu}{1-2v} \frac{1-v}{h} \times$$

$$\times \left[\delta \left(\frac{x}{h}, t \right) + \sum_{k=1}^2 S_k \left(\frac{x}{h}, t \right) S_k^0 \left(\frac{x}{h}, t \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) \exp \left(\frac{z}{h} \right) - t_{\varepsilon k} \right], \quad (27)$$

$$0 \leq x \leq h, \quad t > 0,$$

в которых $S_k(x, t)$, $k=1, 2$ даются формулами

$$S_1(x, t) = G(x, t) + s_1(x, t), \quad (28)$$

$$S_2(x, t) = G(x, t) - 2G(x, t - t_{\varepsilon k}) + s_2(x, t),$$

единенной с недеформируемой подложкой в виде полуплоскости Π , при произвольном значении H ($0 < H < \infty$) можно получить по формулам (26), (27) в соответствующих обозначениях (12).

С.М. Айзикович благодарит Министерство образования и науки РФ за финансовую поддержку в рамках выполнения работы «Организация проведения научных исследований» Госзадания.

Литература

1. Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость. Киев, 1989. 134 с.
2. Коваленко А.Д. Введение в термоупругость. Киев, 1965. 204 с.
3. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М., 1975. 409 с.
4. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. М., 1968. 648 с.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1965. 331 с.
6. Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Васильев А.С., Волков С.С. Термоупругодинамическая неустойчивость решения контактной задачи для покрытия с учетом тепловыделения от трения // Вестн. ДГТУ. 2014. Т. 14, № 4. С. 17–29.
7. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability // Proc. R. Soc. A. 2006. Vol. 462. P. 2161–2176.
8. Afferrante L., Ciavarella M. A note on thermoelastodynamic instability (TEDI) for a 1D elastic layer: Force control // Int. J. Sol. Struct. 2007. T. 44. C. 1380–1390.
9. Afferrante L., Ciavarella M. Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces // J. Mech. Phys. Sol. 2007. Vol. 55. P. 744–764.
10. Ke L. L., Yang J., Kitipornchai S., Wang Y.-S. Frictionless contact analysis of a functionally graded piezoelectric layered half-plane // Smart Mater. Struct. 2008. Vol. 17, № 2.
11. Elloumi R., Guler M.A., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S. Closed-form solutions of the frictional sliding contact problem for a magneto-electro-elastic half-plane indented by a rigid conducting punch // Int. J. Solids Struct. 2013. Vol. 50, № 24. P. 3778–3792.
12. Zhou Y.-T., Lee K.Y. Investigation of frictional sliding contact problems of triangular and cylindrical punches on mo-

noclinic piezoelectric materials // Mech. Mater. 2014. Vol. 69, № 1. P. 237–250.

References

1. Grinchenko V.T., Ulitko A.F., Shul'ga N.A. *Elektrouprugost'* [Electroelasticity]. Kyiv, 1989, 134 p.
2. Kovalenko A.D. *Vvedenie v termouprugost'* [Introduction to thermoelasticity]. Kyiv, 1965, 204 p.
3. Ditkin V.A., Prudnikov A.P. *Operatsionnoe ischislenie* [Operational calculus]. Moscow, 1975, 409 p.
4. Gurvits A., Kurant R. *Teoriya funktsii* [Theory of functions]. Moscow, 1968, 648 p.
5. Pontryagin L.S. *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary differential equations]. Moscow, 1965, 331 p.
6. Zelentsov V.B., Mitrin B.I., Vasil'ev A.S., Volkov S.S. *Termouprugodinamicheskaya neustoychivost' resheniya kontakt-noi zadachi dlya pokrytiya s uchetom teplovydeleniya ot treniya* [Thermo elastic dynamical instability of the solution of the contact problem for coverage based on heat from friction]. *Vestn. DGTU*, 2014, vol. 14, no 4, pp. 17–29.
7. Afferrante L., Ciavarella M., Barber J.R. Sliding thermoelastodynamic instability. *Proc. R. Soc. A*, 2006, vol. 462, pp. 2161–2176.
8. Afferrante L., Ciavarella M. A note on thermoelastodynamic instability (TEDI) for a 1D elastic layer: Force control. *Int. J. Sol. Struct.*, 2007, vol. 44, pp. 1380–1390.
9. Afferrante L., Ciavarella M. Thermo-elastic dynamic instability (TEDI) in frictional sliding of two elastic half-spaces. *J. Mech. Phys. Sol.*, 2007, vol. 55, pp. 744–764.
10. Ke L. L., Yang J., Kitipornchai S., Wang Y.-S. Frictionless contact analysis of a functionally graded piezoelectric layered half-plane. *Smart Mater. Struct.*, 2008, vol. 17, no 2.
11. Elloumi R., Guler M.A., Kallel-Kamoun I., El-Borgi S. Closed-form solutions of the frictional sliding contact problem for a magneto-electro-elastic half-plane indented by a rigid conducting punch. *Int. J. Solids Struct.*, 2013, vol. 50, no 24, pp. 3778–3792.
12. Zhou Y.-T., Lee K.Y. Investigation of frictional sliding contact problems of triangular and cylindrical punches on monoclinic piezoelectric materials. *Mech. Mater.*, 2014, vol. 69, no 1, pp. 237–250.

СТОХАСТИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ k -ДВИЖЕНИЯ РЕГУЛЯРНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ГАУССОВОЙ КРИВИЗНЫ В ТРЁХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

©2015 г. Д.С. Климентов

Климентов Дмитрий Сергеевич – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра геометрии, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: dklimentov75@gmail.com

Klimentov Dmitrii Sergeevich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Senior Lecturer, Department of Geometry, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov st., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: dklimentov75@gmail.com

В предлагаемой статье рассматривается стохастический критерий изгибания (бесконечно малого изгибания) и k -движения регулярной поверхности положительной гауссовой кривизны в трёхмерном евклидовом пространстве.

Ключевые слова: варьированные уравнения Гаусса – Петерсона – Кодаци, диффузионный процесс, основная теорема теории изгибаний.

This article examines the stochastic criterion of a bending (infinitesimal deformation) and a k -motion for a regular surface S . The surface S is supposed of positive Gaussian curvature and placed in a three-dimensional Euclidean space.

Keywords: variation of the Gauss-Peterson-Codazzi equations, diffusion process, fundamental theorem of the theory of deformations.

В работе [1] приводится строгое определение понятия изгибания (бесконечно малого изгибания) регулярной поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве. Следует отметить, что изгибание поверхности долгое время не имело законченного определения, которое было дано геометрами Ростовского государственного университета. В [2] был предложен стохастический подход к формулировке основной теоремы теории поверхностей, следуя идеям, развитым в работе [1].

Необходимые сведения из теории изгибания поверхностей

Будем рассматривать регулярные, класса C^n , $n \geq 2$ поверхности, параметризованные в некотором круге D , лежащем в (x^1, x^2) -плоскости. Границу круга будем обозначать ∂D ; полагаем $\bar{D} = D \cup \partial D$.

Введём следующие обозначения: $C^n(\bar{D})$, $n = 1, 2, \dots, \infty$, ω – множество вектор-функций, определённых в $\bar{D}$ и обладающих в $\bar{D}$ непрерывными частными производными до порядка n (аналитическими в случае $n = \omega$). Частные производные на ∂D понимаются как предельные значения частных производных в D при стремлении точки, в которой они вычисляются, к ∂D .

Регулярную поверхность S , заданную вектор-функцией $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2) \in C^n(\bar{D})$, будем отождеств-

лять с этой вектор-функцией и мыслить как точку в пространстве $C^n(\bar{D})$.

На линейном пространстве вектор-функций класса $C^n(\bar{D})$, $n < \infty$, будем считать заданной топологию нормы

$$\|\mathbf{r}\|_{C^n(\bar{D})} = \|\mathbf{r}\|_n = \sum_{i=0}^n \sum_{\alpha=0}^i \max_{(u^1, u^2) \in \bar{D}} \left| \frac{\partial^i \mathbf{r}}{\partial u^1 \partial u^2} \right|.$$

Эта норма превращает $C^n(\bar{D})$ в банахово пространство.

Определение 1 [1, с. 3]. Непрерывной по параметру τ деформацией S^τ поверхности S называется непрерывное отображение интервала $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $(-\infty, \infty)$, $[0, 1]$ (любого промежутка, содержащего 0) в банахово пространство $C^n(\bar{D})$ такое, что $S^0 \equiv S$, а S^τ для любого τ из рассматриваемого промежутка есть регулярная поверхность класса $C^n(\bar{D})$.

Определение 2 [1, с. 5]. Если для любого значения параметра τ из рассматриваемого промежутка поверхность S^τ изометрична поверхности S , то такая деформация называется непрерывным изгибанием поверхности S .

Определение 3 [1, с. 5]. Пусть функция $\mathbf{r}^\tau$ дифференцируема по параметру τ . Функция

$$\delta^l \mathbf{r}(u^1, u^2) = \frac{1}{2l!} \frac{d^l \mathbf{r}^\tau}{d\tau^l} \Big|_{\tau=0}$$

называется l -й вариацией

(по Рембсу) радиус-вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2)$ поверхности S при деформации S^r .

Аналогично определяются вариации других величин, связанных с поверхностью S , причём по определению полагаем $\delta^0 f \equiv f$.

Определение 4 [1, с. 6]. Пусть S^r – деформация поверхности S класса C^m по параметру, $m=1, K, \infty, \omega$, $1 \leq k \leq m$; S^r называется бесконечно малым изгибанием k -го порядка поверхности S , если $\delta^l g_{ij} = 0$, $l=1, \dots, k$, где g_{ij} – метрический тензор поверхности S .

Приведём формулировку основной теоремы теории бесконечно малых изгибаний.

Теорема 1 [1, с. 30]. Для того чтобы S^r была бесконечно малым изгибанием k -го порядка, необходимо и достаточно выполнение уравнений

$$\begin{cases} \sum_{s=1}^l (\delta^{l-s} b_{11} \delta^s b_{22} + \delta^s b_{11} \delta^{l-s} b_{22} - 2\delta^{l-s} b_{12} \delta^s b_{12}) = 0, \\ \partial_2(\delta^l b_{11}) - \partial_1(\delta^l b_{12}) = \Gamma_{12}^\alpha \delta^l b_{\alpha 1} - \Gamma_{11}^\alpha \delta^l b_{\alpha 2}, \\ \partial_2(\delta^l b_{21}) - \partial_1(\delta^l b_{22}) = \Gamma_{22}^\alpha \delta^l b_{\alpha 1} - \Gamma_{21}^\alpha \delta^l b_{\alpha 2}, \end{cases} \quad (1)$$

$$l=1 \dots k,$$

где b_{ij} – коэффициенты второго основного тензора поверхности S ; Γ_{ij}^k – символы Христовфеля второго рода поверхности S .

Необходимые сведения из теории случайных процессов

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство и $(F_t)_{t \geq 0}$ – возрастающее семейство σ -полей из $\mathcal{F}$, т.е. $F_t \subseteq F_s$ при $0 \leq t \leq s$. Семейство $(F_t)_{t \geq 0}$ будем называть потоком на Ω и предполагать, что поток непрерывен справа, т.е. $F_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} F_{t+\varepsilon}$ [3, с. 29].

Определение 5 [4, с. 184]. Функцию $\xi = \xi(\omega)$ со значениями в некотором топологическом измеримом пространстве U , определённую на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, назовём случайной величиной, если для любого борелевского множества $B \in \mathcal{B}(U)$ $\{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$. Здесь через $\mathcal{B}(U)$ обозначено σ -поле борелевских множеств на U .

Пусть $W^d = C([0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ – множество всех непрерывных функций $w: [0, \infty) \ni t \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^d$. Определим на W^d метрику ρ_w следующим образом [3, с. 25]:

$$\rho_w(w_1, w_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\max_{0 \leq t \leq n} |w_1(t) - w_2(t)| \right) \wedge 1 \right],$$

где $a \wedge b = \min(a, b)$ и $w_1, w_2 \in W^d$. Можно показать, что пространство W^d полно и сепарабельно в этой

метрике [3, с. 25]. Через $\mathcal{B}(W^d)$ мы будем обозначать борелевское σ -поле, натянутое на пространство W^d с топологией, порождённой метрикой ρ_w .

Определение 6 [3, с. 25]. Непрерывным d -мерным случайным процессом, заданным на $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ с фазовым пространством $\mathbb{R}^d$, будем называть случайную величину со значениями в множестве $W^d = C([0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d)$ $W^d = C([0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d)$, всех непрерывных функций $w: [0, \infty) \ni t \mapsto w(t) \in \mathbb{R}^d$, т.е. $\mathcal{F}/\mathcal{B}(W^d)$ – измеримое отображение $X: \Omega \rightarrow W^d$. При всяком фиксированном $\omega \in \Omega$ функция $X(t, \omega)$ называется траекторией случайного процесса.

Если в определении 6 заменить пространство $\mathbb{R}^d$ произвольным банаховым пространством E , то мы получим определение случайного процесса с фазовым пространством E .

Рассмотрим произвольное фазовое пространство $(E, \mathcal{B})$ [5, с. 74].

Определение 7 [5, с. 74]. Функция $P(t, x, \Gamma)$ ($t \geq 0, x \in E, \Gamma \in \mathcal{B}$) называется переходной функцией, если выполнены следующие условия:

1. При фиксированных t и x функция $P(t, x, \Gamma)$ является мерой на σ -алгебре $\mathcal{B}$.
2. При фиксированных t и Γ функция $P(t, x, \Gamma)$ есть $\mathcal{B}$ -измеримая функция точки x .
3. $P(t, x, E) \leq 1$.
4. $P(0, x, E \setminus x) = 0$.
5. $P(s+t, x, \Gamma) = \int_E P(s, x, dy) P(t, y, \Gamma)$, $t, s \geq 0$.

С переходной функцией $P(t, x, \Gamma)$ можно связать сжимающую полугруппу операторов с помощью формулы [5, с. 14] $T_t f(x) = \int_E P(t, x, dy) f(y)$.

С помощью этой полугруппы определяется инфинитезимальный оператор A по формуле [5, с. 14] $Af = \lim_{t \downarrow 0} \frac{T_t f - f}{t}$.

Определение 8 [5, с. 75]. Функция $p(t, x, y)$ называется переходной плотностью для переходной функции $P(t, x, \Gamma)$, если выполняется равенство

$$P(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \int_{\Gamma} p(t, x, y) dy, & t > 0, \\ I_{\Gamma}, & t = 0. \end{cases}$$

В [5] показано, что при самых широких предположениях инфинитезимальный оператор однозначно определяет переходную функцию.

Необходимо отметить, что инфинитезимальный оператор связан с переходной функцией формулой [5, с. 80] $Af(x) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\int_E P(t, x, dy) f(y) - f(x)}{t}$.

Переходная плотность связана с инфинитезимальным оператором случайного процесса соотношением [5, с. 15]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = Ap, \quad (2)$$

где оператор A сужен на дважды непрерывно дифференцируемые функции (полагается, что в фазовом пространстве введена структура гладкого многообразия).

Оператор A в формуле (2) совпадает с некоторым эллиптическим (полуэллиптическим) дифференциальным оператором второго порядка.

Определение 9 (марковского процесса) [5, с. 116].

Пусть даны:

1. Функция $\zeta(\omega)$ на вероятностном пространстве Ω , принимающая значения из $[0, \infty]$.

2. Функция $X(t, \omega) = X_t(\omega)$, определённая для $\omega \in \Omega$ и $t \in [0, \zeta(\omega)]$ и принимающая значения из фазового пространства $(T, B(T))$.

3. Для каждого $t \geq 0$ σ -поле F_t в пространстве $\Omega_t = \{\omega : \zeta(\omega) > t\}$.

4. Для каждого $x \in T$ функция $P_x(A)$ на некотором σ -поле F_0 в пространстве Ω , содержащем F_t при всех $t \geq 0$.

Будем говорить, что эти элементы определяют марковский процесс $X = (X_t, \zeta, F_t, P_x)$, если выполнены следующие условия:

1. Если $t \leq u$ и $A \in F_t$, то $\{A, \zeta > u\} \in F_u$.

2. $\{X_t \in \Gamma\} \in F_t$, где $t \geq 0, \Gamma \in B(T)$.

3. P_x есть вероятностная мера на σ -поле F_0 .

4. При любых $t \geq 0, \Gamma \in B(T)$ функция $P(t, x, \Gamma) = P_x\{X_t \in \Gamma\}$ есть $B(T)$ – измеримая функция от x .

5. $P(0, x, T \setminus x) = 0$.

6. Для любых $t, h \geq 0, \Gamma \in B(T), A \in F_t$

$P_x\{A, X_{t+h} \in \Gamma\} = E_x[\chi_A P(h, X_t, \Gamma)]$, где E_x – математическое ожидание по мере P_x ; χ_A – индикатор множества A .

7. Для каждого $\omega \in \Omega_t$ найдётся $\omega' \in \Omega$, такое что $X_u(\omega') = X_{t+u}(\omega)$, где $0 \leq u < \zeta(\omega') = \zeta(\omega) - t$.

Функция $P(t, x, \Gamma) = P_x\{X_t \in \Gamma\}$ является переходной функцией и называется переходной функцией марковского процесса. Инфинитезимальный оператор, построенный по этой функции, называется инфинитезимальным оператором марковского процесса. Аналогично определяется переходная плотность марковского процесса [5, с. 144].

Определение 10 [5, с. 144]. Марковский процесс $X = (X_t, \zeta, F_t, P_x)$ называется строго марковским, если для любого марковского момента τ и любых $x \in T, \Gamma \in B(T)$ выполняется соотношение $P_x\{X_{\tau+t} \in \Gamma | F_t\} = P(t, X_\tau, \Gamma)$, где $P_x\{X_{\tau+t} \in \Gamma | F_t\}$ – условная вероятность относительно σ -поля F_t .

Определение 11 [5, с. 15]. Инфинитезимальный оператор, суженный на дважды непрерывно дифференцируемые функции, называется генератором строго марковского процесса

$$A = \sum_{i,j=1}^2 a^{ij} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + \sum_{i=1}^2 b^i \frac{\partial}{\partial x^i} + c.$$

Матрица $(a^{ij})_{i,j=1}^2$ называется матрицей диффузии; (b^1, b^2) – вектор сноса; функция c – коэффициент плотности вероятности обрыва марковского процесса. Функции a^{ij}, b^i называются коэффициентами диффузии, коэффициентами сноса соответственно.

Определение 12. Диффузионным процессом (диффузией) мы будем называть строго марковский процесс с непрерывными траекториями.

Отметим, что всякому полуэллиптическому оператору A второго порядка соответствует диффузионный процесс с генератором A .

Теорема 2 [3, с. 185]. Если диффузия, отвечающая генератору с нулевым сносом, определена единственным образом для каждой стартовой точки, то диффузия с ненулевым сносом, отвечающая той же матрице диффузии, и ненулевым сносом, также единственным образом определена для каждой стартовой точки и получается из первой диффузии посредством преобразования сноса.

Теорема 2 даёт нам возможность изучать диффузионные процессы с нулевым сносом и позволяет сделать выводы о поведении процесса с ненулевым сносом. Таким образом, условие нулевого сноса не является слишком ограничительным.

Если в качестве фазового пространства будем рассматривать регулярную поверхность, то такой диффузионный процесс будем называть диффузией на поверхности.

Формулировка результата

Пусть S – регулярная поверхность класса C^3 положительной гауссовой кривизны с первой квадратичной формой $I = g_{ij}dx^i dx^j$, второй формой $II = b_{ij}dx^i dx^j$. Пусть на S заданы две диффузии X_t, Y_t , порождённые квадратичными формами I и II соответственно (т.е. генератор диффузии X_t $A = g^{ij}\partial_{ij}^2$, для диффузии Y_t аналогично). Переходную плотность процесса X_t будем обозначать $p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})$ (отметим, что $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ являются точками на поверхности S с контравариантными внутренними координатами $(x^1, x^2), (y^1, y^2)$), переходную функцию процесса Y_t будем обозначать $P(t, \mathbf{x}, \Gamma)$. Кроме того, будем требовать, чтобы поверхность S была односвязной, конформно эквивалентной кругу.

Теорема 3. Для того чтобы поверхность S допускала нетривиальные бесконечно малые изгибания k -го порядка, необходимо и достаточно выполнение системы уравнений

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{s=1}^l \left[\delta^{l-s} \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^2}{2} \right] \delta^s \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^2}{2} \right] + \right. \\ & + \delta^s \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^2}{2} \right] \delta^{l-s} \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^2}{2} \right] - \\ & - 2\delta^{l-s} \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^1 y^2}{2} \right] \delta^s \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^1 y^2}{2} \right] \Big] = 0, \\ & \partial_2(\delta^l \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^1 y^2}{2} \right]) - \partial_1(\delta^l \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^1 y^2}{2} \right]) = \\ & = \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial p} \Gamma_{12,\beta} \delta^l \left[\delta_{\gamma\alpha} \left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^\gamma y^1}{2} \right] - \\ & - \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial p} \Gamma_{11,\beta} \delta^l \left[\delta_{\gamma\alpha} \left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^\gamma y^2}{2} \right], \\ & \partial_2(\delta^l \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^1 y^2}{2} \right]) - \partial_1(\delta^l \left[\left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^2}{2} \right]) = \\ & = \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial p} \Gamma_{22,\beta} \delta^l \left[\delta_{\gamma\alpha} \left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^\gamma y^1}{2} \right] - \\ & - \delta^{\alpha\beta} \frac{\partial p}{\partial p} \Gamma_{21,\beta} \delta^l \left[\delta_{\gamma\alpha} \left(\frac{\Delta p}{\partial_t p} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial_t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^\gamma y^2}{2} \right], \end{aligned} \right.$$

где частные производные переходной функции берутся в момент времени $t = 0$,

$$\Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{ik} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{jk} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta_{ij} \frac{\Delta p}{\partial_t p} \right) \right],$$

δ^{ij} – символ Кронекера.

Для доказательства теоремы потребуется несколько лемм.

Лемма 1. Изотермический элемент поверхности S представим в виде $\lambda = \frac{\Delta p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial_t p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}$, где Δ – обычный лапласиан.

Доказательство. В [6, с. 89] показано, что первую квадратичную форму поверхности S можно привести к изотермическому виду $I = \lambda(\mathbf{x}) (x^{1^2} + dx^{2^2})$, где функция λ называется изотермическим элементом поверхности.

Переходная плотность процесса X_t удовлетворяет уравнению теплопроводности (2): $\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\lambda} \Delta p$.

Так как коэффициент λ строго положителен, то выражения $\frac{\partial p}{\partial t}$ и Δp если и обращаются в нуль, то

одновременно, причём эти нули имеют одинаковый порядок. Следовательно, после умножения на λ и деления на $\frac{\partial p}{\partial t}$ мы получим верное равенство.

Лемма 2. Контравариантные коэффициенты второй формы b^{ij} поверхности S и переходная функция $P(t, \mathbf{x}, \Gamma)$ процесса Y_t связаны равенством

$$b^{ij} = \int \frac{\partial}{\partial t} P(t, \mathbf{x}, dy) \frac{y^i y^j}{2}. \quad (4)$$

Доказательство. В [5, с. 80] выводится формула $T_t f = \int P(t, \mathbf{x}, dy) f(y)$. По определению инфинитезимальный оператор диффузии Y_t задаётся равенством

$$A_Y f = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{T_t f - f}{t}. \quad (5)$$

Отметим, что переходная плотность процесса Y_t дифференцируема не менее двух раз по внутренним координатам и по крайней мере один раз по переменной t . Так как переходная функция диффузии Y_t связана с переходной плотностью p_Y равенством $P(t, \mathbf{x}, \Gamma) = \int_\Gamma p_Y(t, \mathbf{x}, \mathbf{y}) d\mathbf{y}$, то и функция $P(t, \mathbf{x}, \Gamma)$ дифференцируема

по крайней мере один раз по переменной t .

Рассмотрим подробнее равенство (5). Для дважды непрерывно дифференцируемых функций f левая часть определена, в правой части в знаменателе стоит бесконечно малая величина, следовательно, в числителе также находится бесконечно малая величина. Применим к пределу правило Лопиталя:

$$A_\gamma f = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{\frac{\partial}{\partial t} T_t f - f}{1} = \frac{\partial}{\partial t} T_t f \Big|_{t=0}.$$

В нашем случае генератор процесса Y_t имеет вид $A_\gamma f = b^{ij} \partial_i \partial_j f$. Выбирая в качестве f функцию

$f = \frac{y^i y^j}{2}$ и подставляя в последнее равенство для генератора, получим утверждение леммы.

Лемма 3. Для Христоффелей первого рода поверхности S имеет место равенство

$$\Gamma_{ij,l} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta_{ik} \frac{\Delta p}{\partial_i p} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{jk} \frac{\Delta p}{\partial_i p} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta_{ij} \frac{\Delta p}{\partial_i p} \right) \right].$$

Доказательство очевидным образом следует из формулы для вычисления Христоффелей и леммы 1.

Лемма 4. Вариации выражений в системе уравнений (3) определены корректно.

Доказательство следует из результатов работы [2]: выражения, стоящие под знаком вариации, являются коэффициентами основных форм поверхности S .

Лемма 5. Для Христоффелей второго рода поверхности S имеет место равенство

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} \delta^{kl} \frac{\partial_i p}{\Delta p} \times \\ \times \left[\frac{\partial}{\partial x^j} \left(\delta_{ik} \frac{\Delta p}{\partial_i p} \right) + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\delta_{jk} \frac{\Delta p}{\partial_i p} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\delta_{ij} \frac{\Delta p}{\partial_i p} \right) \right].$$

Доказательство очевидным образом следует из леммы 1 и известной формулы для Христоффелей второго рода.

Доказательство основного результата

В систему (1) подставим выражения для коэффициентов второй основной формы и Христоффелей из доказанных лемм.

Достаточность следует из того, что поверхность положительной кривизны однозначно определяется двумя случайными процессами [2].

В качестве иллюстрации приведённой выше техники рассмотрим стохастический критерий k -движения.

Теорема 4. Для того чтобы деформация поверхности S была k -движением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства

$$\delta^l \left(\frac{\Delta p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial_i p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})} \right) = 0, \quad l = 1, \dots, k, \quad (6)$$

$$\delta^l \left(\left(\frac{\Delta p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial_i p(t, \mathbf{x}, \mathbf{y})} \right)^2 \int \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, d\mathbf{y}) \Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} \frac{y^i y^j}{2} \right) = 0, \quad (7)$$

$$l = 1, \dots, k.$$

Докажем две вспомогательные леммы.

Лемма 6. Для того чтобы деформация была k -изгибанием, необходимо и достаточно выполнение равенства (6).

Доказательство непосредственно следует из определения бесконечно малого изгиба поверхности k -го порядка [1, с. 6] и леммы 1.

Лемма 7. Для того чтобы k -изгибание было k -движением, необходимо и достаточно выполнение равенств (7).

Доказательство. В [1, с. 36] доказана теорема о том, что k -изгибание является k -движением тогда и только тогда, когда выполняются равенства $\delta^l b_{ij} = 0$, $l = 1, \dots, k$. Подставим в последние формулы выражение для коэффициентов второй формы (4), предварительно опустив индексы.

Литература

1. Климентов С.Б. Введение в теорию изгибаний. Двумерные поверхности в трёхмерном евклидовом пространстве. Ростов н/Д., 2014. 168 с.
2. Климентов Д.С. Стохастический аналог основной теоремы теории поверхностей для поверхностей положительной кривизны // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2013. № 6. С. 24–26.
3. Ватанабэ С., Икэда Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
4. Ширяев А.Н. Вероятность. М., 1989.
5. Дынкин Е.Б. Марковские процессы. М., 1963.
6. Векуа И.Н. Обобщённые аналитические функции. М., 1988. 509 с.

References

1. Klimentov S.B. Vvedenie v teoriyu izgibanii. Dvumernye poverkhnosti v trekhmernom evklidovom prostranstve [Introduction to the theory of bending. Two-dimensional surface in three-dimensional Euclidean space]. Rostov-on-Don, 2014, 168 p.
2. Klimentov D.S. Stokhasticheskii analog osnovnoi teoremy teorii poverkhnostei dlya poverkhnostei polozhitel'noi krivizny [Stochastic analysis of the fundamental theorem of surface theory to surfaces of positive curvature]. Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki, 2013, no 6, pp. 24-26.
3. Vatanabe S., Ikeda N. Stokhasticheskie differentsial'nye uravneniya i diffuzionnye protsessy [Stochastic differential equations and diffusion processes]. Moscow, 1986.
4. Shiryaev A.N. Veroyatnost' [Probability]. Moscow, 1989.
5. Dynkin E.B. Markovskie protsessy [Markov processes]. Moscow, 1963.
6. Vekua I.N. Obobshchennye analiticheskie funktsii [Generalized analytic functions]. Moscow, 1988, 509 p.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ ВНУТРИ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ*

© 2015 г. Л.Г. Куракин, А.П. Мелехов, И.В. Островская

Куракин Леонид Геннадиевич – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090; главный научный сотрудник, Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, ул. Маркуса, 22, г. Владикавказ, 362027, e-mail: kurakin@math.sfedu.ru

Kurakin Leonid Gennadievich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Professor, Department of the Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Main Researcher, Southern Institute of Mathematics of Vladikavkaz Scientific Center RAS, Marcus St., 22, Vladikavkaz, 362027, Russia, e-mail: kurakin@math.sfedu.ru

Мелехов Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, старший преподаватель, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: melehov@math.sfedu.ru

Melekhov Andrei Petrovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Department of the Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: melehov@math.sfedu.ru

Островская Ирина Владимировна – кандидат физико-математических наук, ассистент, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: ostrov@math.sfedu.ru

Ostrovskaya Irina Vladimirovna – Candidate of Physical and Mathematical Science, Assistant, Department of the Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: ostrov@math.sfedu.ru

Рассматривается задача устойчивости системы точечных вихрей, расположенных в вершинах правильного N -угольника ($N = 2, \dots, 6$) внутри круговой области. Потенциал взаимодействия между вихрями обратно пропорционален расстоянию между ними. Аналитически исследованы квадратичная часть гамильтониана и собственные значения матрицы линеаризации. Получены условия устойчивости по Раусу и экспоненциальной неустойчивости. Указаны области параметров, требующие дополнительного нелинейного анализа. Перечислены и исследованы численно все резонансы до четвертого порядка включительно, возникающие в этой задаче. В двух из них численно обнаружена неустойчивость. Результаты теоретического анализа подтверждаются численным расчетом траекторий точечных вихрей.

Ключевые слова: точечный вихрь, стационарное вращение, гамильтоновы системы, устойчивость по Раусу, резонанс.

The stability problem of a system of point vortices is considered. The charges are located in the vertices of a regular N -gon ($N = 2, \dots, 6$) in a circular area. The interaction potential between the vortices is inversely proportional to the distance between them. The quadratic terms of the Hamiltonian and the eigenvalues of the linearization matrix are studied analytically. The conditions of Routh stability and exponential instability are obtained. The range of parameters that require additional non-linear analysis is indicated. All the resonances arising in this problem up to fourth order has been listed and investigated numerically. Instability is found numerically in two of them. The results of the theoretical analysis are confirmed by numerical calculation of the trajectories of point vortices.

Keywords: point vortices, stationary rotation, Hamiltonian systems, Routh stability, resonance.

Уравнения движения

Рассмотрим модель N точечных вихрей на плоскости внутри круга радиуса R

$$\gamma_k \dot{\bar{z}}_k = 2i \frac{\partial H}{\partial z_k}, \quad \gamma_k \dot{z}_k = -2i \frac{\partial H}{\partial \bar{z}_k}, \quad k = 1, \dots, N \quad (1)$$

с гамильтонианом H

$$H = \frac{1}{4\pi} \sum_{1 \leq j < k \leq N} \frac{\gamma_k \gamma_j}{|z_k - z_j|} - \frac{1}{8\pi} \sum_{j,k=1}^N \frac{\gamma_k \gamma_j}{|z_k - \hat{z}_j|} \quad (2)$$

Здесь $z_k = x_k + iy_k$, $k = 1, \dots, N$ – комплексные переменные; x_k, y_k – декартовы координаты k -го вихря; $\hat{z}_k = \frac{R^2}{z_k}$ – отражение k -го вихря границей

*Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности (задание № 2014/174, код проекта 1367).

круга; черта означает комплексное сопряжение; γ_k – интенсивность k -го вихря.

Уравнения движения (1), (2) возникают в случае, когда сила взаимодействия между j -м и k -м вихрями потенциальна с потенциалом $\gamma_j \gamma_k / r_{jk}$, где r_{jk} – расстояние между этими вихрями. Такое предположение о потенциале сделали Дж.Дж. Томсон [1] при построении одной из своих моделей атома и В.М. Гряник [2] при построении модели вращающейся бароклинной жидкости в квазигеострофическом приближении. Точечные вихри в работе [1] названы корпускулами, а в [2] – вихревыми зарядами. Устойчивость относительного равновесия трех вихревых зарядов с нулевой суммарной интенсивностью исследовалась в [3]. Случай логарифмического потенциала вихревого взаимодействия разобран на плоскости в работах [4, 5], а внутри круга – в [4, 6].

Система (1), (2) имеет два интеграла: энергию H и суммарный момент инерции $M = \sum_{k=1}^N \gamma_k |z_k|^2$.

Система (1) инвариантна относительно группы G , образующие которой суть зеркальное отражение $j: z \mapsto \bar{z}$ и вращение $g^{\text{rot}}: z \mapsto e^{i\alpha} z$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Действие $g \mapsto L_g$ группы G на фазовом пространстве Z определяется равенством $L_g z = (gz_1, \dots, gz_N)$, для $z = (z_1, \dots, z_N) \in Z$ и $g \in G$.

Напомним [5, 7], что стационарным называется движение, которое осуществляется преобразованиями некоторой однопараметрической подгруппы группы симметрии данного уравнения.

Стационарное движение, отвечающее подгруппе вращений g^{rot} , ищется в виде $z_k = e^{i\omega t} u_k$, $k = 1, \dots, N$.

Для неизвестных $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$ получаем систему

$$-i\omega \bar{u}_k = 2i \frac{\partial H}{\partial u_k}, \quad k = 1, \dots, N. \quad (3)$$

Далее будем считать, что все вихри имеют одинаковую интенсивность $\gamma = 1$. Решая (3), находим одно из стационарных движений:

$$z_k = \exp\left(\frac{i}{4\pi} \omega_N t\right) u_k, \\ u_k = R_0 e^{2\pi i(k-1)/N}, \quad k = 1, \dots, N, \quad (4)$$

где $\omega_N = \omega_N(p)$, $p = \frac{R_0^2}{R^2}$, и выполняется неравенство $0 < p < 1$. На рис. 1 приведены графики $\omega_N(p)$, $N = 2, \dots, 6$. Функции ω_2 и ω_3 заданы формулами

$$\omega_2 = -\frac{1}{4} - \frac{p(3p^2 + 1)}{1 - p^2},$$

$$\omega_3 = -\frac{2\sqrt{3} + 3}{6} \frac{p^2 + (6\sqrt{3} - 11)p + 4 - 2\sqrt{3}}{1 - p^2} - \frac{p(1 - p^2)}{(p^2 + p + 1)^{3/2}}.$$

Аналогичные аналитические формулы для остальных ω_N здесь не приводятся ввиду их громоздкости.

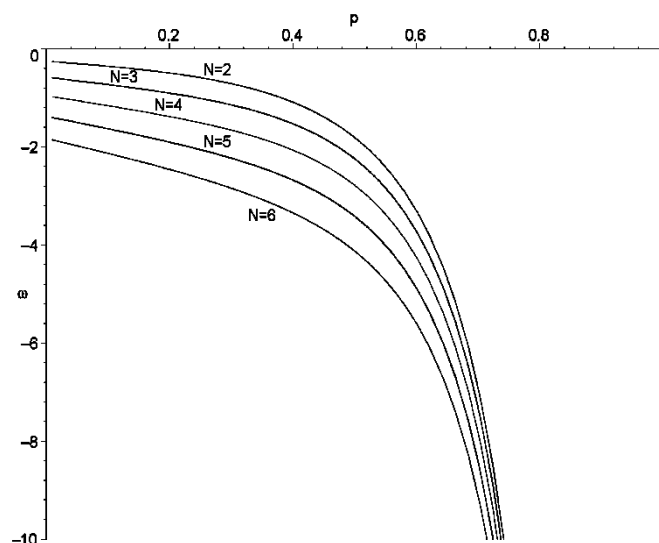


Рис. 1. Графики угловых скоростей ω_N в зависимости от параметра p , $N = 2, \dots, 6$

Таким образом, конфигурация одинаковых вихрей, расположенных внутри круговой области радиуса R на окружности радиуса R_0 в вершинах правильного N -угольника, вращается с постоянной угловой скоростью.

Исследование устойчивости

Замена переменных $z_k(t) = \exp\left(\frac{i}{4\pi} \omega_N t\right) v_k(t)$ в системе (1), (2) приводит к гамильтоновой системе уравнений относительного движения с относительным гамильтонианом (по терминологии работ [5, 7]) $E(v) = H(v) + \frac{\omega_N}{8\pi} M(v)$, $M = \sum_{k=1}^N |v_k|^2$, где $v = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{C}^N$.

На каждой плоскости переменных v_k введем новые координаты и запишем v_k в виде

$$v_k = \sqrt{R_0^2 + 2r_k} e^{i(\frac{2\pi}{N}(k-1) + \theta_k)}. \quad (5)$$

Замена переменных (5) сохраняет гамильтонову структуру системы.

В переменных $r = (r_1, \dots, r_N)$, $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ уравнение относительного движения принимает вид

$$\dot{r}_k = \frac{\partial E}{\partial \theta_k}(v(r, \theta)), \quad \dot{\theta}_k = -\frac{\partial E}{\partial r_k}(v(r, \theta)). \quad (6)$$

Стационарному движению (4) отвечает непрерывное семейство равновесий системы (6), расположенное на прямой $\Gamma = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^{2N} : r = 0, \theta_1 = \dots = \theta_N\}$.

Режим стационарного вращения (4) неустойчив по Ляпунову при любых N (см., например, [7]). Далее будет использоваться наиболее сильное из возможных в данной задаче определений устойчивости – устойчивость по Раусу [5, 7]. Под устойчивостью по Раусу решения (4) понимается устойчивость по Ляпунову семейства равновесий Γ (см. [7]). Заметим, что для доказательства такого рода устойчивости достаточно найти знакоположительный интеграл, являющийся положительно-определенным по части переменных в подпространстве, ортогональном семейству равновесий Γ .

Разложение функции $E(v(\rho))$, $\rho = (r, \theta)$ в ряд Тейлора – одно и то же в окрестности любого равновесия семейства Γ : $E(v(\rho)) = \frac{\gamma^2}{4\pi}(E_0 + E_2(v(\rho)) + \dots)$, где точками обозначены слагаемые выше второй степени по переменной ρ . Квадратичная форма E_2 представима в виде $E_2 = (S_N \rho, \rho)$,

$S_N = \begin{pmatrix} F_{1N} & G_{0N} \\ -G_{0N} & F_{2N} \end{pmatrix}$, где F_{1N} , F_{2N} – симметричные, а G_{0N} – кососимметричная матрица размером $N \times N$.

Матрица линеаризации системы (6) на нулевом равновесии имеет вид $L_N = 2 \begin{pmatrix} -G_{0N} & F_{2N} \\ -F_{1N} & -G_{0N} \end{pmatrix}$.

Матрица S_N симметрична, и поэтому все ее собственные значения вещественны. Она имеет нулевое собственное значение, отвечающее семейству Γ . Достаточное условие устойчивости по Раусу решения (4) означает, что все остальные собственные значения матрицы S_N имеют одинаковый знак. Экспоненциальная неустойчивость имеет место, когда у матрицы L_N есть собственные значения с положительной действительной частью.

Матрицы F_{1N} , F_{2N} , G_{0N} являются циркулянтами (см. [8]): $F_{mN} = \sum_{k=0}^{N-1} f_{mk} C^k$, $G_0 = \sum_{k=0}^{N-1} g_{0k} C^k$, где C – циклическая матрица.

Величины f_{mk} , g_{0k} не выписаны здесь ввиду их громоздкости. Собственные значения λ_{1k} , λ_{2k} и $i\lambda_{0k}$, $k = 1, \dots, N$ матриц F_{1N} , F_{2N} , G_{0N} соответственно заданы явными формулами: $\lambda_{mk} = \sum_{j=0}^{N-1} f_{mj} e^{\frac{2\pi k i j}{N}}$,

$$m = 1, 2, \lambda_{0k} = \sum_{j=0}^{N-1} g_{0j} e^{\frac{2\pi k i j}{N}}.$$

Собственные значения матрицы S_N являются корнями полиномов [6]

$$P_k(\Lambda) = \Lambda^2 - (\lambda_{1k} + \lambda_{2k})\Lambda + \lambda_{1k}\lambda_{2k} - \lambda_{0k}^2, \quad k = 1, \dots, 5.$$

Собственные значения матрицы S_N отрицательны, если выполнены условия $\lambda_{1k} + \lambda_{2k} < 0$, $\lambda_{1k}\lambda_{2k} - \lambda_{0k}^2 > 0$.

Собственные значения матрицы линеаризации L_N , согласно [4], определены формулой $\sigma_k^\pm = -4i\lambda_{0k} \pm 4\sqrt{-\lambda_{1k}\lambda_{2k}}$, $k = 1, \dots, 5$. В случае если хотя бы при одном значении $k = 1, \dots, N$ справедливо неравенство $\lambda_{1k}\lambda_{2k} < 0$, матрица линеаризации L_N имеет собственные значения в правой полуплоскости.

Анализ собственных значений матриц S_N и L_N при $N = 2, \dots, 6$ показал справедливость следующей теоремы. Указанные в ней критические точки p_{0N} и p_{*N} приведены в таблице.

Теорема. Стационарное вращение (4) правильного вихревого N -угольника устойчиво по Раусу (все собственные значения матрицы S_N , кроме простого нуля, имеют один знак) в случаях:

- 1) $0 < p < p_{0N}$ для $N = 3, 5$;
- 2) $0 < p < p_{*4}$ для $N = 2, 4$;
- 3) $p_{06} < p < p_{*6}$ для $N = 6$

и экспоненциально неустойчиво, когда:

- 4) $p_{*N} < p < 1$ при $N = 2, \dots, 5$;
- 5) $0 < p < p_{06}$ и $p_{*6} < p < 1$ при $N = 6$.

При выполнении условий:

- 6) $p_{03} < p < p_{*3}$ для $N = 3$;
- 7) $p_{05} < p < p_{*5}$ для $N = 5$;

- 8) в точках p_{*N} , p_{0N} при $N = 2, \dots, 6$

требуется нелинейный анализ. Все собственные значения матрицы линеаризации L_N лежат на мнимой оси, квадратичная форма E_2 знакопеременна в случаях 6, 7, а в случае 8 она знакоопределена и матрица S имеет двукратное нулевое собственное значение.

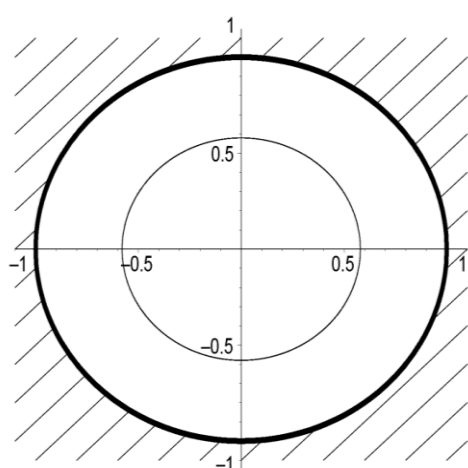
Случай $N = 4$ был ранее исследован в работе [9]. Случаи 6, 7, 8 требуют нелинейного анализа

методами КАМ-теории [10]. В частности, требуется перечислить и исследовать все резонансные соотношения до четвертого порядка включительно, возникающие в задаче. Они найдены численно и представлены в таблице.

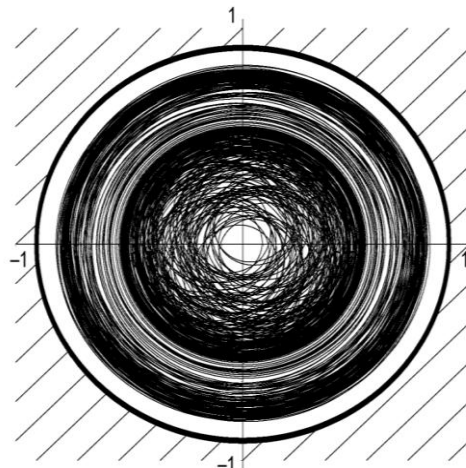
В каждом резонансном случае из таблицы устойчивость N -угольника исследовалась прямым численным счетом траекторий движения вихрей в исходных декартовых координатах. Неустойчивыми оказались только два случая: правильный треугольник при $p = p_{03} \approx 0,336116$ и правильный пятиугольник при $p = p_{1:2} \approx 0,381682$. Траектории движения вихрей для них приведены на рис. 2 и 3 соответственно.

Критические значения p_{*N} , p_{0N} и список резонансных значений параметра p : p_{00} – двукратный диагоназируемый нуль; $p_{k:m}$ – резонанс $k:m$

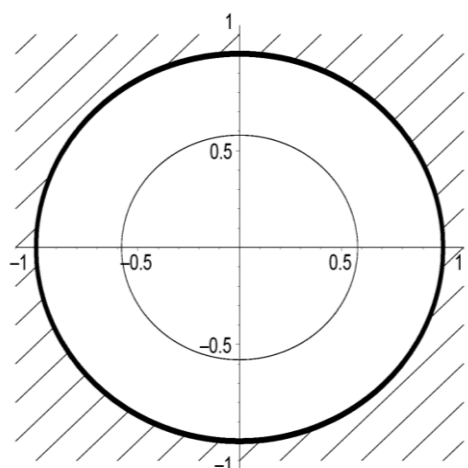
$N = 2$	$p_{00} = p_{*2} \approx 0,264956$
$N = 3$	$p_{00} = p_{03} \approx 0,336116$, $p_{1:2} \approx 0,344528$, $p_{1:3} \approx 0,343230$, $p_{1:1} = p_{*3} \approx 0,345561$
$N = 4$	$p_{00} = p_{*4} \approx 0,364916$
$N = 5$	$p_{00} = p_{05} \approx 0,379449$, $p_{1:2} \approx 0,381682$, $p_{1:2} \approx 0,383153$, $p_{1:3} \approx 0,381066$, $p_{1:3} \approx 0,382575$, $p_{1:1} \approx 0,382965$, $p_{1:1} = p_{*5} \approx 0,383615$, $p_{1:1:2} \approx 0,383537$
$N = 6$	$p_{*6} \approx 0,364916$, $p_{06} \approx 0,005983$



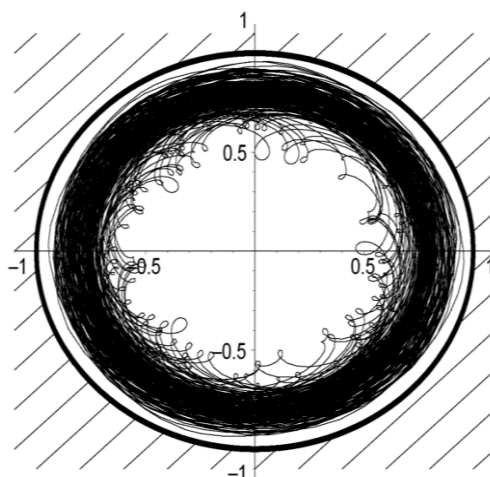
а



б



в



г

Рис. 2. Случай $N = 3$. Панели а – в демонстрируют неустойчивость при резонансном значении параметра $p = p_{03}$; г – экспоненциальная неустойчивость при $p > p_{*3}$

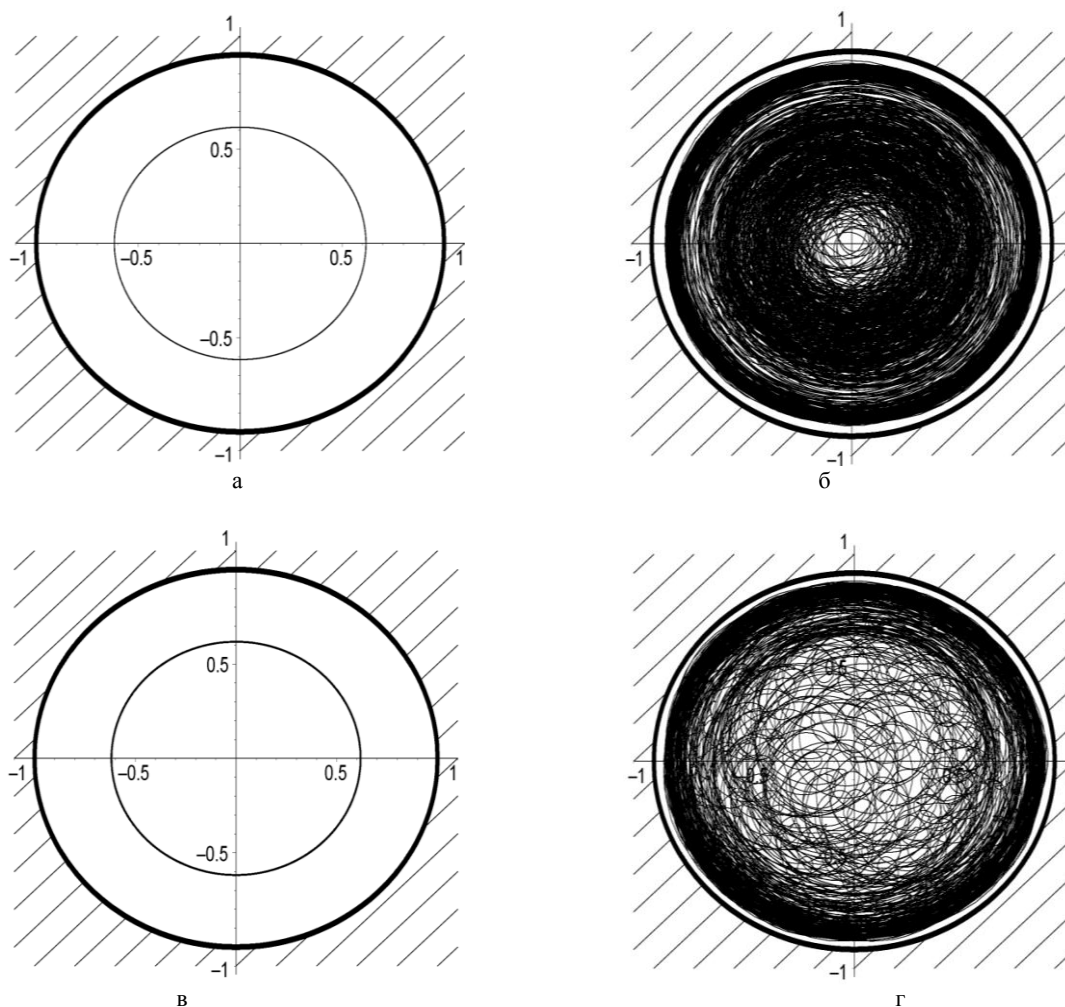


Рис. 3. Случай $N = 5$. Панели а – в демонстрируют неустойчивость пентагона при резонансном значении параметра $p = p_{1;2}$; г – экспоненциальная неустойчивость при $p > p_{*5}$

На рис. 2а–в демонстрируется неустойчивость треугольника при изолированном значении параметра $p = p_{03}$. В начальный момент времени он возмущается на величину порядка 10^{-4} . Траектории движения вихрей выводятся для времени t от 400 до 500. На рис. 2б в районе $t = 450$ происходит срыв со стационарного решения. При малых отклонениях значения параметра p от p_{03} в обе стороны наблюдается устойчивость (рис. 2а, в).

На рис. 3а – в решения выводятся для времени t от 0 до 100. На рис. 3б в районе $t = 60$ происходит срыв со стационарного решения. При малых отклонениях наблюдается устойчивость (рис. 3а, в).

При выполнении условий 4, 5 теоремы многочисленные расчеты подтвердили неустойчивость. Примеры приведены на рис. 2г, 3г. Срыв со стационарного вращения правильного N -угольника наблюдается даже без внесения возмущений в на-

чальные данные (возмущения возникают только из-за погрешности метода и вычислительной погрешности). На рис. 2г решения выводятся для времени t от 0 до 50, срыв происходит в районе $t=20$. На рис. 3г решения выводятся для времени t от 0 до 20, срыв происходит в районе $t = 5$.

В случаях 6, 7 теоремы требуется применение методов КАМ-теории, которые требуют приведения гамильтониана к нормальной форме до четвертого порядка. Такая работа для случая точечных вихрей внутри круга проделана в работе [6].

Литература

1. Томсон Дж.Дж. Электричество и материя. М.; Ижевск, 2004. 264 с.
2. Гряник В.М. Динамика сингулярных геострофических вихрей в двухуровневой модели атмосферы (океана) // Изв. АН СССР. ФАО. 1983. Т. 19, № 3. С. 227–240.

3. Гудименко А.И., Захаренко А.Д. Устойчивость относительного равновесия трех вихревых зарядов с нулевой суммарной интенсивностью // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2012. № 4. С. 43–54.

4. Havelock T.H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation // Phil. Mag. 1931. Vol. 11, № 70. P. 617–633.

5. Куракин Л.Г., Юдович В.И. О нелинейной устойчивости стационарного вращения правильного вихревого многоугольника // Докл. РАН. 2002. Т. 384, № 4. С. 476–482.

6. Куракин Л.Г. Устойчивость, резонансы и неустойчивость правильных вихревых многоугольников внутри круговой области // Докл. РАН. 2004. Т. 399, № 1. С. 52–55.

7. Kurakin L.G., Yudovich V.I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon // Chaos. 2002. Vol. 12. P. 574–595.

8. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М., 1984. 336 с.

9. Островская И.В. Об устойчивости системы частиц в вершинах квадрата внутри круговой области // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств науки. 2009. Спецвыпуск. Актуальные проблемы математической гидродинамики. С. 178–180.

10. Маркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М., 1978. 312 с.

References

1. Tomson Dzh.Dzh. *Elektrichestvo i materiya* [Electricity and matter]. Moscow; Izhevsk, 2004, 264 p.

2. Gryanik V.M. Dinamika singulyarnykh geostroficheskikh vikhrei v dvukhurovnevoi modeli atmosfery (okeana) [Geostrophic dynamics of singular vortices in a two-level model

of the atmosphere (ocean)]. *Izv. AN SSSR. FAO*, 1983, vol. 19, no 3, pp. 227–240.

3. Gudimenko A.I., Zakharenko A.D. Ustoichivost' otnositel'nogo ravnovesiya trekh vikhrevykh zaryadov s nulevoi sum-marnoi intensivnost'yu [Stability of relative equilibrium three vortex charges with zero total intensity]. *Izv. RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza*, 2012, no 4, pp. 43–54.

4. Havelock T.H. The stability of motion of rectilinear vortices in ring formation. *Phil. Mag.*, 1931, vol. 11, no 70, pp. 617–633.

5. Kurakin L.G., Yudovich V.I. O nelineinoi ustoichivosti statsionarnogo vrashcheniya pravil'nogo vikhrevogo mnogougol'nika [Nonlinear stability of stationary rotation right vortex polygon]. *Dokl. RAN*, 2002, vol. 384, no 4, pp. 476–482.

6. Kurakin L.G. Ustoichivost', rezonansy i neustoichivost' pravil'nykh vikhrevykh mnogougol'nikov vntri krugovoi oblasti [Stability, resonances and instability regular vortex polygon inside a circular area]. *Dokl. RAN*, 2004, vol. 399, no 1, pp. 52–55.

7. Kurakin L.G., Yudovich V.I. The stability of stationary rotation of a regular vortex polygon. *Chaos*, 2002, vol. 12, pp. 574–595.

8. Proskuryakov I.V. *Sbornik zadach po lineinoi algebra* [Collection of problems in linear algebra]. Moscow, 1984. 336 s.

9. Ostrovskaya I.V. Ob ustoichivosti sistemy chastits v ver-shinakh kvadrata vntri krugovoi oblasti [On the stability of the particles in the corners of a square within a circular area]. *Izv. vuzov Sev.-Kavk. region. Estestv nauki. 2009. Spetsvypusk. Aktual'nye problemy matematicheskoi gidrodinamiki* [Special Issue. Actual problems of mathematical hydrodynamics], pp. 178–180.

10. Markeev A.P. *Tochki libratsii v nebesnoi mekhanike i kosmodinamike* [Libration points in celestial mechanics and cosmodynamics]. Moscow, 1978. 312 s.

УДК 532.593

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-74-79

ВЫСОКОЧАСТОТНАЯ АСИМПТОТИКА ВОЛНОВОГО ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОГО ВИБРАЦИЕЙ ПЛАСТИНЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ

© 2015 г. Э.Н. Потетюнко

Потетюнко Эдуард Николаевич – доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теории упругости, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090.

Potetyunko Eduard Nikolaevich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Department of the Elasticity Theory, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia.

В линейной постановке с учётом исчезающе малых диссипативных сил, пропорциональных скорости частиц жидкости, решается задача о плоском периодическом по времени волновом движении жидкости бесконечной глубины, вызванном вертикальными колебаниями пластины, лежащей на верхней поверхности жидкости. Выписываются уравнения движения идеальной жидкости и граничные условия затухания на бесконечности по вертикали, смешанные граничные условия на верхней границе жидкости. Исходная краевая задача сводится к задаче для функции потенциала скоростей. Под колеблющейся пластиной вводится в рассмотрение неизвестное контактное напряжение. Задача сводится к решению исходного уравнения относительно этого контактного напряжения. При больших безразмерных частотах ядро интегрального уравнения заменяется его асимптотическим приближением. Полученное приближенное интегральное уравнение решается в явном виде. Найдены контактные напряжения под пластиной и вид свободной поверхности вне пластины. Дана оценка погрешности замены точного интегрального уравнения на приближенное.

Ключевые слова: идеальная жидкость, волновое движение, интегральное уравнение, высокочастотная асимптотика, частота, погрешность.

In linear statement taking into account disappearing small dissipative forces proportional to the speed of particles of liquid, the problem about the flat periodic wave movement of liquid of infinite depth on time caused by vertical fluctuations of the plate lying on the top surface is solved. It is written out the equations of the movement of ideal liquid and boundary conditions of attenuation on infinity down, and the mixed boundary conditions on the upper bound of liquid. The initial regional task is reduced to a task for function of potential of speeds. Under the fluctuating plate it is entered into consideration the unknown contact tension and a task is reduced to the solution of the initial equation concerning this contact tension. With big dimensionless frequencies the kernel of the integrated equation is replaced with its asymptotic approach. The received approximate integrated equation is solved in an explicit form and contact tension under a plate and a type of a free surface out of a plate is found. The assessment of an error of replacement of the exact integrated equation by the approximate is given.

Keywords: ideal liquid, wave movement, integrated equation, high-frequency asymptotics, frequency, error.

Рассмотрим задачу о плоском волновом движении жидкости бесконечной глубины, вызванном вертикальными колебаниями пластины, лежащей на верхней поверхности жидкости.

В [1] описано содержание работ [2–6] по волновым движениям жидкости, вызванным деформацией пластины, лежащей на поверхности жидкости, и построена низкочастотная асимптотика решения этой задачи.

В данной работе построена высокочастотная асимптотика этой задачи.

Математическая постановка задачи о волновом движении жидкости, вызванном колебаниями пластины, лежащей на поверхности жидкости

В линейной постановке с учётом исчезающе малых диссипативных сил, пропорциональных скорости частиц жидкости, задача о плоском установившемся периодическом по времени волновом движении жидкости бесконечной глубины, вызванном

вертикальными колебаниями точек пластины, лежащей на верхней поверхности жидкости, сводится к следующей краевой задаче [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mu \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \nabla P, \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0, \quad P = p + \rho g z - p_0,$$

$$-\infty < z \leq 0, \quad \mathbf{U} = \Delta \Phi, \quad P = -\rho \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu \Phi \right],$$

$$\operatorname{div} \nabla \Phi \equiv \Delta \Phi = 0, \quad \nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{x}^0 + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{z}^0, \quad \Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$-P + \rho g \zeta = -P_* \mathbf{e}^{\zeta}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = U_z, \quad z = 0, \quad |x| > a, \quad (1)$$

$$U_z = V_* \mathbf{e}^{\zeta} \frac{\partial}{\partial t} W_* \mathbf{e}^{\zeta}, \quad W_* \mathbf{e}^{\zeta} = W \mathbf{e}^{i\omega t}, \quad |x| \leq a,$$

$$z = 0, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \Phi = 0, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \mathbf{F} = 0,$$

$$\mathbf{F} = \Phi, \zeta, p, P_* \mathbf{e}^{\zeta}, \quad \mathbf{F} \left(x, z, t + \frac{2\pi}{\omega} \right) = \mathbf{F} \mathbf{e}^{\zeta}, \quad \mathbf{F} \mathbf{e}^{\zeta}, \quad \mathbf{F} \mathbf{e}^{\zeta}.$$

Здесь Φ – потенциал скорости; $\mathbf{U} = \{U_x, U_z\}$ – вектор скорости частиц жидкости; $\mathbf{x}^0, \mathbf{z}^0$ – единичные векторы осей Ox, Oz ; p – гидродинамическое давление; P – динамическая часть гидродинамического давления; $\rho g \zeta$ – гидростатическая часть гидродинамического давления; ζ – возвышение свободной поверхности; $V_* x, t = V_0 x e^{i\omega t}$ – скорость колебаний точек пластины; $W_* x, t = W x e^{i\omega t}$ – заданные вертикальные перемещения точек пластины от равновесного состояния; P_* – заданное внешнее динамическое давление на свободной поверхности жидкости; p_0 – внешнее атмосферное давление, которое полагаем равным нулю; ρ – плотность жидкости; g – ускорение свободного падения; μ – коэффициент диссипации ($\mu > 0$); $2a$ – ширина пластины; t – время; ω – частота колебаний точек пластины. Начало координат взято посередине пластины в положении равновесия, ось Ox направлена горизонтально, ось Oz – вертикально вверх.

Сведение исходной краевой задачи к задаче для функции потенциала скоростей

Полагая $P_* = \Pi_* e^{i\omega t}$, решение задачи (1) ищем в виде $\Phi = \varphi e^{i\omega t}$, $\zeta = \eta e^{i\omega t}$.

Здесь $\varphi(x, z)$ и $\eta(x)$ – амплитудные функции для потенциала скорости и возвышения свободной поверхности.

Для φ и η выводим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < z < 0, \quad i\omega \eta = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0}, \\ -\gamma \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= -\frac{i\omega}{\rho g} \Pi_*, \quad \gamma = \frac{\omega^2 - i\omega\mu}{g}, \quad z=0, \quad |x| > a, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= V_0 e^{i\omega t} i\omega W e^{i\omega t}, \quad z=0, \quad |x| \leq a, \\ \left\{ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \Pi_* \right\} &\rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \left\{ \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\} \rightarrow 0, \\ z &\rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Сведение решения исходной краевой задачи к решению интегрального уравнения относительно контактных напряжений

Продолжим граничное условие при $z=0$, $|x| > a$ вовнутрь интервала $|x| \leq a$, введя в рассмотрение функцию $q_*(x)$

$$-\gamma \varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{i\omega}{\rho g} q_*(x), \quad q_*(x) = \begin{cases} \Pi_*, & |x| > a, \\ Q_*(x), & |x| \leq a \end{cases}. \quad (3)$$

В данной задаче $Q_*(x)$ представляет собой амплитудную функцию контактных напряжений $Q(x, t) = Q_* e^{i\omega t}$ под пластиной.

Полагаем $\Pi_* e^{i\omega t} = 0$, $|x| > a$.

Применим преобразование Фурье по x [7]

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \tilde{\varphi}}{dz^2} - \xi^2 \tilde{\varphi} &= 0, \quad \tilde{\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{i\xi x} dx, \\ \varphi &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-i\xi x} d\xi, \\ -\gamma \tilde{\varphi} + \frac{d\tilde{\varphi}}{dz} &= -\frac{i\omega}{\rho g} \tilde{q}_*, \quad z=0, \quad \tilde{\varphi}, \frac{d\tilde{\varphi}}{dz} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (4)$$

Решение уравнения в (4) имеет вид $\tilde{\varphi} = C_1 e^{\xi z} + C_2 e^{-\xi z}$.

При этом переменная z меняется в пределах от минус бесконечности до нуля: $-\infty < z \leq 0$, а переменная ξ согласно формуле обращения (4) меняется в пределах от минус бесконечности до плюс бесконечности: $-\infty < \xi < \infty$. Поэтому для ограниченности решения $\tilde{\varphi}$ берём в виде $\tilde{\varphi} = C_1 e^{-\xi z}$, $-\infty < \xi \leq 0$, $z \leq 0$, $\tilde{\varphi} = C_2 e^{\xi z}$, $0 \leq \xi < \infty$, $z \leq 0$, т.е. $\tilde{\varphi} = C e^{|\xi|z}$, $z \leq 0$.

Из (4) вытекает

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} &= C e^{|\xi|z}, \quad z \leq 0, \quad \gamma + |\xi| = -\frac{i\omega}{\rho g} \tilde{q}_*, \quad z=0, \\ C &= -\frac{i\omega}{\rho g} \frac{\tilde{q}_*}{|\xi| - \gamma}. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Из (2) и (5) } i\omega \tilde{\eta} = \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial z} \Big|_{z=0} = C|\xi| = -\frac{i\omega}{\rho g} \frac{|\xi|}{|\xi| - \gamma} \tilde{q}_*.$$

Сократим на $i\omega$. В числителе дроби в правой части последнего равенства добавим и вычтем величину γ .

Почленно разделив, получим

$$\tilde{\eta} = -\frac{\tilde{q}_*}{\rho g} - \frac{\tilde{q}_*}{\rho g} \gamma \frac{1}{|\xi| - \gamma}.$$

Обращая по Фурье, находим интегральные уравнения для $Q_*(x)$

$$\eta(x) = -\frac{q_*}{\rho g} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{q}_*(\xi) e^{-i\xi x}}{|\xi| - \gamma} d\xi. \quad (6)$$

Согласно теореме о свёртках [7]:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}_1(\xi) \tilde{f}_2(\xi) e^{-i\xi v} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi) f_2(\xi) \delta(v - \xi) d\xi. \text{ Находим}$$

$$\eta(\xi) = -\frac{q_*}{\rho g} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma}{\rho g} \int_{-\infty}^{\infty} q_*(\xi) \tilde{f}_2(\xi) e^{-i\xi v} d\xi,$$

$$K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi v}}{|\xi| - \gamma} d\xi, \quad v = x - u. \quad (7)$$

Рассмотрим интервал $|x| \leq a$. На этом интервале задана деформация пластины $w(\xi)$; амплитудная функция контактного напряжения $q_*(\xi)$ обозначена через $Q_*(\xi)$. Положим $\Pi_*(\xi) = 0$, т.е. считаем, что всё движение жидкости вызвано лишь вибрацией пластины. Тогда из (7) следует интегральное уравнение для $Q_*(\xi)$

$$\rho g w(\xi) Q_*(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \gamma \int_{-a}^a Q_*(\xi) \tilde{f}_2(\xi) e^{-i\xi v} d\xi, \quad |x| \leq a. \quad (8)$$

Ядро интегрального уравнения (8) имеет вид, указанный в (7).

Вычислим $K(\xi)$. Имеем

$$K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-i\xi v}}{-\xi - \gamma} d\xi + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\xi v}}{\xi - \gamma} d\xi, \quad v = x - u.$$

В первом интеграле сделаем замену $\xi = -\tau$. Тогда

$$K(\xi) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{i\tau v}}{\tau - \gamma} d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\tau v}}{\tau - \gamma} d\tau, \quad v = x - u,$$

или

$$K(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\tau v)}{\tau - \gamma} d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{i \sin(\tau v)}{\tau - \gamma} d\tau, \quad v = x - u.$$

После приведения подобных

$$K(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos(\tau v)}{\tau - \gamma} d\tau, \quad v = x - u. \quad (9)$$

Последний интеграл (9) табличный [8]

$$K(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos v \chi}{\beta - \chi} d\chi = \quad (10)$$

$$= \cos(\beta) \operatorname{ci}(\beta) - \sin(\beta) \operatorname{si}(\beta) \pi, \quad \beta = \gamma.$$

Здесь $\operatorname{ci}(\xi)$ – интегральный косинус [8]

$$\operatorname{ci}(\xi) = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt = C + \ln \xi + \int_0^{\xi} \frac{\cos t - 1}{t} dt; \quad C - \text{постоянная Эйлера; } C = 0,57721566;$$

$\operatorname{si}(\xi)$ – интегральный синус [8] $\operatorname{si}(\xi) = -\int_{\xi}^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{\xi} \frac{\sin t}{t} dt$.

Таким образом, для определения амплитудной функции контактных напряжений $Q_*(\xi)$ под пла-

стиной $|\xi| \leq a$ получено уравнение (8) с ядром (10). Затем по (6) вычисляется возвышение свободной поверхности $\eta(\xi)$ вне пластины $|\xi| > a$. При этом $q_*(\xi)$ определяется в (3). Считаем $\Pi_* = 0$.

Низкочастотная асимптотика решения интегрального уравнения для амплитудной функции контактных напряжений $Q_*(\xi)$ построена в [1].

Проведена оценка погрешности точности решения интегрального уравнения для амплитудной функции контактных напряжений и даётся оценка погрешности определения амплитудной функции свободной поверхности.

Решение интегрального уравнения для амплитудной функции $Q_*(\xi)$: контактных напряжений при высоких частотах

В интегральном уравнении (8) сделаем замену переменных, положив $x = ax_1$, $u = au_1$, $\lambda = \gamma a$. Тогда

$$Q_*(ax_1) = -\rho g w(ax_1) \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 Q_*(au_1) \tilde{f}_2(au_1) e^{-i\lambda u_1} du_1, \quad \lambda = \gamma a,$$

$$K(\lambda \xi_1 - u_1) = g(\lambda \xi_1 - u_1) + \pi \sin(\lambda \xi_1 - u_1), \quad (11)$$

$$g(\lambda \xi_1 - u_1) = \cos(\lambda \xi_1 - u_1) \operatorname{ci}(\lambda \xi_1 - u_1) + \sin(\lambda \xi_1 - u_1) \operatorname{si}(\lambda \xi_1 - u_1), \quad |\lambda \xi_1| \leq a, \quad |u_1| \leq 1.$$

Поскольку $|g(\lambda \xi_1)| = O\left(\frac{1}{v^2}\right)$ при $|v| \gg 1$ [9], то в

интегральном уравнении заменяем ядро K на приближенное $\bar{K}$: $\bar{K} = \pi \sin(\lambda \xi_1 - u_1)$. Тогда для $\bar{Q}$ (приближенного значения контактных напряжений) имеем

$$\bar{Q}(ax_1) = -\rho g w(ax_1) \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \pi \int_{-1}^1 \bar{Q}(au_1) \cos(au_1) du_1 \sin(\lambda x_1) + \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \pi \int_{-1}^1 \bar{Q}(au_1) \sin(au_1) du_1 \cos(\lambda x_1). \quad (12)$$

Введём обозначения: $C_1 = \int_{-1}^1 \bar{Q}(au_1) \cos(au_1) du_1$,

$C_2 = \int_{-1}^1 \bar{Q}(au_1) \sin(au_1) du_1$. Тогда интегральное уравнение (12) запишется в виде

$$\bar{Q}(ax_1) = \quad (13)$$

$$= -\rho g w(ax_1) - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda C_1 \sin(\lambda x_1) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda C_2 \cos(\lambda x_1).$$

Подставив в (13) выражение для $\bar{Q}$ из (12), получим систему уравнений относительно C_1 и C_2

$$C_1 = -\rho g \int_{-1}^1 \cos \varphi(u_1) \varphi(u_1) du_1 - \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} C_1 \int_{-1}^1 \cos \varphi(u_1) \sin \varphi(u_1) du_1 + \\ + \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} C_2 \int_{-1}^1 \cos \varphi(u_1) \cos \varphi(u_1) du_1. \quad (14)$$

$$C_2 = -\rho g \int_{-1}^1 \sin \varphi(u_1) \varphi(u_1) du_1 - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda \int_{-1}^1 \sin^2 \varphi(u_1) du_1 C_1 + \\ + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda \int_{-1}^1 \sin \varphi(u_1) \cos \varphi(u_1) du_1 C_2.$$

Запишем систему (14) в виде

$$\begin{cases} C_1 + C_2 \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_{-1}^1 \frac{1 + \cos \varphi(u_1)}{2} du_1 = b_1, \\ b_1 = -\rho g \int_{-1}^1 \cos \varphi(u_1) \varphi(u_1) du_1 \\ C_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos \varphi(u_1)}{2} du_1 + C_2 = b_2, \\ b_2 = -\rho g \int_{-1}^1 \sin \varphi(u_1) \varphi(u_1) du_1 \end{cases}. \quad (15)$$

$$\text{Или } \begin{cases} C_1 + \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} C_2 = b_1 \\ C_1 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda + C_2 = b_2 \end{cases}.$$

Вычислим основной определитель системы Δ_0 и вспомогательные определители Δ_1 и Δ_2

$$\Delta_0 = 1 - \lambda^2 \frac{\pi}{2}. \quad (16)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ b_2 & 1 \end{vmatrix} = b_1 - b_2 \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & b_1 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \lambda & b_2 \end{vmatrix} = b_2 - b_1 \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (17)$$

Тогда

$$C_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} = \frac{b_1 - b_2 \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1 - \lambda^2 \frac{\pi}{2}}, \quad C_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_0} = \frac{b_2 - b_1 \lambda \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{1 - \lambda^2 \frac{\pi}{2}}. \quad (18)$$

Приближенное выражение для $\bar{Q}(\varphi_1)$ имеет вид (13). Оценки величин b_1 и b_2 находим интегрированием по частям, полагая

$$\cos \varphi(u_1) du_1 = \frac{1}{\lambda} d \sin \varphi(u_1) \text{ и } \sin \varphi(u_1) du_1 = -\frac{1}{\lambda} d \cos \varphi(u_1),$$

$$b_1 = -\rho g w \left. a u_1 \right|_{u_1=-1}^1 \frac{1}{\lambda} \sin \lambda u_1 + \\ + \rho g \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 w'_z z \sin \lambda u_1, \quad (19)$$

$$z = a u_1,$$

$$b_2 = \rho g w \left. \frac{1}{\lambda} \cos \varphi(u_1) \right|_{u_1=-1}^1 - \rho g \frac{1}{\lambda} \int_{-1}^1 w'_z \cos \varphi(u_1),$$

$$\lambda \rightarrow \infty.$$

Из (19) следует, что $b_1 = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$, $b_2 = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$. Тогда

из (18) следует, что $C_1 = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$, $C_2 = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right)$, $|\lambda| \rightarrow \infty$.

Таким образом, формулы (13)–(19) определяют приближенные значения амплитудных функций контактных напряжений для каждого фиксированного значения x , $|\varphi| \leq a$.

Интегральное уравнение (11) решаем по итерационной схеме

$$Q_*^{(n+1)}(\varphi_1) = \quad (20)$$

$$= -\rho g w \left. \varphi(x_1) \right|_{-1}^1 \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 Q_*^{(n)}(\varphi_1) \cos \varphi(u_1 - u_1) du_1 = \bar{Q}(\varphi_1).$$

За нулевое приближение примем $\bar{Q}(\varphi_1)$. $Q^{(0)}(\varphi_1) = \bar{Q}(\varphi_1)$. Функция $\bar{Q}(\varphi_1)$ определяется формулами (13)–(19).

Точность решения интегрального уравнения относительно контактных напряжений

Оценим точность решения интегрального уравнения (11). Об оценке точности решения можно судить по невязке – неточности (погрешности) решения исходной задачи при замене искомых величин их приближенными значениями. В частности, о точности решения интегрального уравнения (11) будем судить по той погрешности δ (невязке), которая возникает при замене в интегральном уравнении (11) искомой величины $Q_*(\varphi_1)$ её приближенным значением $\bar{Q}(\varphi_1)$ из (13). Имеем

$$\bar{Q}(\varphi_1) = -\rho g w \left. \varphi(x_1) \right|_{-1}^1 - \quad (21)$$

$$- \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \bar{Q}(\varphi_1) \cos \varphi(u_1 - u_1) du_1 + \pi \sin \varphi(u_1 - u_1) du_1.$$

Подставив в (21) выражение для $\bar{Q}$ из (13), находим невязку δ

$$\delta = -\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \bar{Q}(\varphi_1) \cos \varphi(u_1 - u_1) du_1, \quad \lambda = \gamma a,$$

$$\gamma = \sqrt{b^2 - i\omega\mu} g, \quad |x_1| \leq 1, \quad |u_1| \leq 1. \quad (22)$$

Будем считать $|\lambda| \gg 1$ (высокочастотная асимптотика) и воспользуемся асимптотическим представлением функции $g(\zeta)$ при $|z| \gg 1$ [9]:

$$g(\zeta) \sim \frac{1}{z^2} \left[1 - \frac{3!}{z^2} + \frac{5!}{z^4} - \frac{7!}{z^6} + \dots \right]. \quad (23)$$

Чтобы заменить в (22) функцию $g(\zeta)$, $z = \lambda(\zeta_1 - u_1)$ её асимптотическим представлением (23), выделим бесконечно малую ε -окрестность переменной u_1 , внутри которой аргумент z может обращаться и в нуль.

В этой ε -окрестности функцию $g(\zeta)$ заменим её интегральным представлением, воспользовавшись интегральными представлениями для функций $ci(\zeta)$ и $si(\zeta)$ [8]: $ci(\zeta) = C + \ln(z) + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt$,

$$si(\zeta) = -\frac{\pi}{2} + \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt.$$

Здесь C – постоянная Эйлера [8]: $C = 0,5772156649\dots$

В окрестности $u_1 = x_1$ заменим функцию $g(\zeta)$ её интегральным представлением, а вне этой окрестности заменим функцию $g(\zeta)$ её асимптотическим представлением (23). Имеем

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{\lambda}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-1}^{x_1-\varepsilon} F(\zeta_1) du_1 + \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} F(\zeta_1) du_1 + \int_{x_1+\varepsilon}^1 F(\zeta_1) du_1 \right], \\ F(\zeta_1) = & \bar{Q}(\zeta_1) \left[\cos(\zeta_1) ci(\zeta_1) + \sin(\zeta_1) si(\zeta_1) \right], \quad (24) \\ F(\zeta_1) \sim & \frac{\bar{Q}(\zeta_1)}{\lambda^2 (\zeta_1 - u_1)^2}, \quad u_1 \in [-1, x_1 - \varepsilon], \quad u_1 \in [x_1 + \varepsilon, 1], \\ F(\zeta_1) = & \bar{Q}(\zeta_1) \times \\ & \times \left\{ \cos(\zeta_1) \left[C + \ln(\zeta_1) + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt \right] + \sin(\zeta_1) \left[-\frac{\pi}{2} + \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt \right] \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим в (24) интервал $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$

$$\begin{aligned} & \int_{x_1-\varepsilon}^{x_1+\varepsilon} \bar{Q}(\zeta_1) \left\{ \cos(\zeta_1) \left[C + \ln(\zeta_1) + \int_0^z \frac{\cos t - 1}{t} dt \right] + \right. \\ & \left. + \sin(\zeta_1) \left[-\frac{\pi}{2} + \int_0^z \frac{\sin t}{t} dt \right] \right\} du_1, \quad z = \lambda(\zeta_1 - u_1). \quad (25) \end{aligned}$$

В (25) вместо $\bar{Q}(\zeta_1)$ подставим его выражение из (13)–(19). В результате перемножения слагаемых в $\bar{Q}(\zeta_1)$ и интегрального представления функции $g(\zeta)$ на интервале $[x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$, из (24) получим пятнадцать интегралов. Проведём вычис-

ление первых трёх из них. Сделаем на этом интервале замену переменной интегрирования, положив $u_1 = x_1 - u_2$, $u_2 = x_1 - u_1$, $du_1 = -du_2$.

$$J_1 = \quad (26)$$

$$= \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[\rho g w(\zeta_1 - u_2) \left[C + \ln(\zeta_1 - u_2) + \int_0^{\lambda u_2} \frac{\cos t - 1}{t} dt \right] \right] \cos(\zeta_1 - u_2) du_2.$$

Вычислим первый интеграл в (26), положив $\cos(\zeta_1 - u_2) = \frac{1}{\lambda} d \sin(\zeta_1 - u_2)$. Имеем

$$\begin{aligned} J_{11} = & \frac{-\rho g}{\lambda} \sin(\zeta_1 - u_2) w(\zeta_1 - u_2) \Big|_{u_2=-\varepsilon}^{u_2=\varepsilon} C + \\ & + \frac{\rho g}{\lambda} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{d}{du_2} w(\zeta_1 - u_2) \sin(\zeta_1 - u_2) du_2 C. \end{aligned}$$

Или

$$\begin{aligned} J_{11} = & -\rho g \left[\frac{\sin(\zeta_1 - \varepsilon)}{\lambda} w(\zeta_1 - \varepsilon) - \frac{\sin(\zeta_1 + \varepsilon)}{\lambda} w(\zeta_1 + \varepsilon) \right] + \\ & + \frac{\rho g}{\lambda} a \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \left[w'(\zeta_1 - u_2) \sin(\zeta_1 - u_2) du_2 \right] = O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right). \end{aligned}$$

Порядок малости остальных интегралов (25) оценивается аналогично.

Сравним порядки малости при $|\lambda| \rightarrow \infty$ значения интеграла на отрезке $[-1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$ со значениями интегралов на отрезках $[1, x_1 - \varepsilon]$ и $[x_1 + \varepsilon, 1]$, на которых использованы асимптотические представления функции $g(z)$ при больших по модулю аргументах z . Чтобы на концах указанных отрезков аргумент функции $g(z)$ оставался большим по модулю, необходимо, чтобы выполнялось условие $|\lambda \varepsilon| \gg 1$. Оно выполняется при $|\varepsilon| = |\lambda|^{-\nu}$, $0 < \nu < 1$,

например, при $|\varepsilon| = |\lambda|^{-\frac{1}{2}}$. Тогда уравниваются порядки малости асимптотического разложения функции $g(z)$ при $|\lambda \varepsilon| \rightarrow \infty$ и отбрасываемого интеграла по ε окрестности точки $u_1 = x_1$.

Таким образом, показано, что вклад бесконечно малого интервала не нарушает общности общей малости величин $|\delta|$, которая согласно (24) имеет

$$\text{порядок } O\left(\frac{1}{|\lambda|}\right), \quad |\lambda| > 1.$$

Определение возвышения свободной поверхности вне пластины

Возвышение свободной поверхности вне пластины находим из формулы (7) при $|x| > a$. Учтём формулы (3). Имеем

$$\eta(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma}{\rho g} \int_{-a}^a Q_*(x) K(x-u) du. \quad (27)$$

Функция $K(v)$ описана в (10). В формуле (27) заменим функцию $Q_*(v)$ на её приближенное выражение $\bar{Q}(u)$, а $K(v)$ – на $\bar{K}(v)$, равное $\pi \sin(v)$. В результате получаем приближенное выражение $\bar{\eta}(x)$ для возвышения свободной поверхности $\eta(x)$:

$$\bar{\eta}(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\gamma}{\rho g} \int_{-a}^a \bar{Q}(u) \bar{K}(x-u) du. \quad (28)$$

Входящая в (28) функция $\bar{Q}(u)$ описана формулой (20).

Формулы (13)–(19) и (28) дают высокочастотное решение задачи о колебании пластины на поверхности жидкости и определяют контактное напряжение под пластиной $|x| < a$ и возвышение свободной поверхности вне пластины $|x| > a$.

Литература

1. Потетюнко Э.Н. Низкочастотное асимптотическое решение задачи о волнах, вызванных вибрацией пластины, лежащей на поверхности жидкости // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2014. № 1. С. 37–41.
2. Потетюнко Э.Н. Волновое движение жидкости со свободными границами. Ростов н/Д., 1993. 318 с.
3. Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М., 1977. 816 с.
4. Трепачёв В.В. Влияние геометрии барических возмущений на характеристики капиллярно-гравитационных волн // Теоретические и экспериментальные исследования поверхностных и внутренних волн. Севастополь, 1980. С. 55–64.
5. Трепачёв В.В. Асимптотический анализ движения жидкости, вызванного возмущениями на её границах : дис. ... канд. физ.-мат. наук. Ростов н/Д., 1985. С. 95–114.
6. Хаскинд М.Д. Гидродинамическая теория качки корабля. М., 1973. 328 с.
7. Снеддон И.Н. Преобразования Фурье. М., 1955. 667 с.

8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е. М., 1962. 1100 с.

9. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1973. 832 с.

References

1. Potetyunko E.N. Nizkochastotnoe asimptoticheskoe reshenie zadachi o volnakh, vyzvannykh vibratsiei plastiny, lezhashchei na poverkhnosti zhidkosti [Low-frequency asymptotic solution of the waves caused by the vibration of the plate lying on the surface of the liquid]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2014, no 1, pp. 37–41.
2. Potetyunko E.N. *Volnovoe dvizhenie zhidkosti so svobodnymi granitsami* [The wave motion of a fluid with free boundaries]. Rostov-on-Don, 1993, 318 p.
3. Sretenskii L.N. *Teoriya volnovykh dvizhenii zhidkosti* [Theory of wave motions of fluid]. Moscow, 1977, 816 p.
4. Trepachev V.V. Vliyanie geometrii baricheskikh vozmushchenii na kharakteristiki kapillyarno-gravitatsionnykh voln [Influence of the geometry of the pressure disturbances on the characteristics of the capillary-gravity waves]. *Teoreticheskie i eksperimental'nye issledovaniya poverkhnostnykh i vnutrennikh voln* [Theoretical and experimental studies of surface and internal waves]. Sevastopol, 1980, pp. 55–64.
5. Trepachev V.V. *Asimptoticheskii analiz dvizheniya zhidkosti, vyzvannogo vozmushcheniyami na ee granitsakh*: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk [The asymptotic analysis of fluid motion caused by disturbances on its borders]. Rostov-on-Don, 1985, pp. 95–114.
6. Khaskind M.D. *Gidrodinamicheskaya teoriya kachki korablya* [Hydrodynamic Theory of a pitching ship]. Moscow, 1973, 328 p.
7. Sneddon I.N. *Preobrazovaniya Fur'e* [Fourier transforms]. Moscow, 1955, 667 p.
8. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products]. Vol. 4. Moscow, 1962, 1100 p.
9. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam* [Handbook of mathematical functions]. Moscow, 1973, 832 p.

ГОРИЗОНТАЛЬНЫЙ УДАР ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ, ПОЛНОСТЬЮ ПОГРУЖЕННОЙ В НЕСЖИМАЕМУЮ ЖИДКОСТЬ

© 2015 г. Б.И. Сметанин

Сметанин Борис Иванович – доктор технических наук, профессор, кафедра теоретической и компьютерной гидроаэродинамики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: smet@math.sfedu.ru

Smetanin Boris Ivanovich – Doctor of Technical Science, Professor, Department of Theoretical and Computer Hydroaerodynamics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: smet@math.sfedu.ru.

Рассмотрена плоская задача о горизонтальном ударе полностью погруженной в несжимаемую жидкость тонкой жесткой вертикальной пластинки. При ударе на некотором участке задней стороны пластинки образуется область отрыва жидкости от пластинки, которая является неизвестной. Использование метода интегральных преобразований позволило привести задачу к системе двух интегральных уравнений, для решения которой применен метод коллокации. Для определения положения граничных точек области отрыва построен итерационный процесс. Приведены графики нормальной скорости точек свободной поверхности жидкости.

Ключевые слова: пластинка, удар, несжимаемая жидкость, импульсивное давление.

There has been considered a 2D-problem of the horizontal impact of a thin rigid vertical plate which is completely immersed in an incompressible fluid. There is formed a region of separation of the fluid from the plate, which is unknown, during the impact on some part of the rear side of the plate. The use of integral transforms method allowed bringing the problem to a system of two integral equations for the solution of which the collocation method was applied. To determine the position of boundary points of separation there was built an iterative process. The graphs of normal speed of the free surface of the fluid are given.

Keywords: plate, impact, incompressible fluid, impulsive pressure.

В монографии Л.И. Седова [1] рассмотрена плоская задача о горизонтальном ударе вертикальной пластинки, помещенной в несжимаемую жидкость. Верхний конец пластинки выходит на свободную поверхность жидкости, при ударе пластинки на ее задней стороне образуется область отрыва жидкости. Вместе с тем на задней стороне пластинки сохраняется область контакта с жидкостью в некоторой окрестности ее нижнего конца.

В настоящей работе рассмотрен случай плоской задачи, когда вертикальная пластинка полностью помещена в несжимаемую жидкость. При горизонтальном ударе такой пластинки на ее задней стороне наряду с образованием области отрыва жидкости остаются области контакта в окрестности каждого из концов пластинки. Размер указанных областей заранее неизвестен, что делает рассматриваемую задачу нелинейной.

Пусть область, занятая жидкостью, определяется неравенствами: $0 \leq x < \infty$, $|y| < \infty$, где x, y – координаты точки в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости. Длина пластинки равна $2a$, расстояние центра пластинки от свободной поверхности жидкости в момент удара равно h . Пластинка расположена ортогонально к свободной поверхности жидкости при $y = 0$, $h - a \leq x \leq h + a$ (рис. 1).

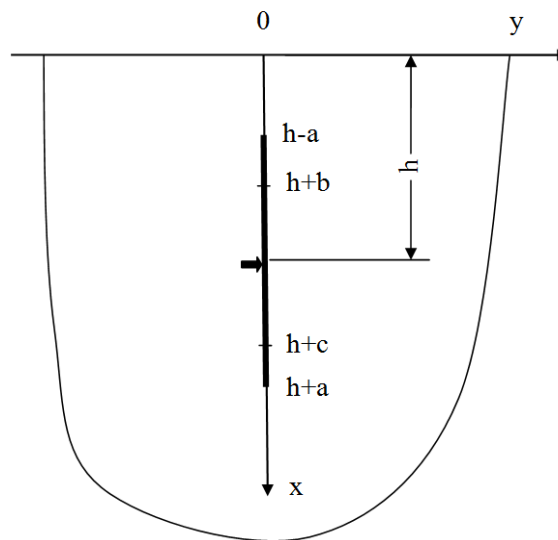


Рис. 1. Положение пластинки в жидкости в момент удара

В момент удара все точки пластинки приобретают одинаковую скорость, направленную горизонтально и равную U . В области отрыва жидкости от пластинки и на свободной поверхности жидкости импульсивное давление равняется нулю. Движение жидкости сразу после удара является потенциальным. Потенциал скорости $\phi(x, y)$ удовлетво-

ряет уравнению Лапласа $\Delta\varphi=0$. При этом вектор скорости жидких частиц $\mathbf{v}$ определяется формулой

$$\mathbf{v} = \text{grad}\varphi. \quad (1)$$

Импульсивное давление p_* связано с функцией φ соотношением

$$p_* = -\rho\varphi, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости.

Введём обозначение:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} \varphi_+(x, y), & 0 \leq x < \infty, \quad +0 \leq y < \infty \\ \varphi_-(x, y), & 0 \leq x < \infty, \quad -\infty < y \leq -0 \end{cases}.$$

В этом случае граничные условия и условие на бесконечности могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial\varphi_+}{\partial y} &= U \quad (h-a \leq x \leq h+a, \quad y=+0), \quad \frac{\partial\varphi_-}{\partial y} = U, \\ \varphi &\in [h-a, h+b] \cup [h+c, h+a], \quad y=-0, \\ \varphi_- &= 0 \quad (h+b < x < h+c, \quad y=-0), \\ \varphi_+ &= \varphi_- = 0 \quad (x=0, \quad -\infty < y < \infty), \\ \varphi &\rightarrow 0 \quad (\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (3)$$

Значения граничных точек области отрыва жидкости от пластинки $h+b$ и $h+c$ являются неизвестными и могут быть определены из условия непрерывности нормальной к пластинке составляющей скорости жидких частиц при $y=0$, $h-a \leq x \leq h+a$ [1].

Использование синус-преобразования Фурье приводит к следующим представлениям функций φ_+ и φ_- [2]:

$$\begin{aligned} \varphi_+(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty A(\xi) \exp(-\xi y) \sin(\xi x) d\xi, \\ \varphi_-(x, y) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty B(\xi) \exp(\xi y) \sin(\xi x) d\xi. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь $A(\xi)$ и $B(\xi)$ – достаточно произвольные функции. Введем в рассмотрение вспомогательные функции q и s формулами, в которых правая часть соотношений рассматривается при $y=0$,

$$\begin{aligned} q(x) &= \begin{cases} \frac{1}{U} \left(\frac{\partial\varphi_+}{\partial x} - \frac{\partial\varphi_-}{\partial x} \right), & h-a \leq x \leq h+a, \\ 0, & x \notin [h-a, h+a] \end{cases} \\ s(x) &= \begin{cases} \frac{1}{U} \left(\frac{\partial\varphi_+}{\partial y} - \frac{\partial\varphi_-}{\partial y} \right), & h+b \leq x \leq h+c, \\ 0, & x \notin [h+b, h+c] \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

Будем предполагать, что функции s и q представимы формулами $s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty S(\xi) \sin(\xi x) d\xi$,

$$q(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty Q(\xi) \cos(\xi x) d\xi.$$

В этом случае функции $A(\xi)$ и $B(\xi)$ могут быть выражены через функции $S(\xi)$ и $Q(\xi)$

$$A(\xi) = \frac{U}{2\xi} [Q(\xi) - S(\xi)], \quad B(\xi) = -\frac{U}{2\xi} [Q(\xi) + S(\xi)]. \quad (6)$$

Из (4) и (6) после перехода к оригиналам функций Q и S и использования значений интегралов 3,941 (1), 3,948 (2) [3] для функций φ_+ и φ_- может быть получено одно и то же представление

$$\varphi(x, y) = \frac{U}{2\pi} \int_{h-a}^{h+a} q(\eta) k_1(\eta, x, y) d\eta + \quad (7)$$

$$+ \frac{U}{4\pi} \int_{h+b}^{h+c} s(\eta) k_2(\eta, x, y) d\eta \quad (|y| < \infty),$$

$$k_1(\eta, x, y) = \arctg \frac{\eta+x}{y} - \arctg \frac{\eta-x}{y},$$

$$k_2(\eta, x, y) = \ln \frac{(\eta-x)^2 + y^2}{(\eta+x)^2 + y^2}.$$

Соотношения (7) с учетом граничных условий (3) приводят рассматриваемую задачу к решению системы интегральных уравнений относительно функций q и s

$$\begin{cases} \int_{h-a}^{h+a} q(\eta) \frac{2x}{\eta^2 - x^2} d\eta + \pi s(x) = 2\pi \\ \quad (h-a \leq x \leq h+a), \\ \frac{\pi}{2} \int_{h-a}^{h+a} q(\eta) [1 - \text{sign}(\eta-x)] d\eta - \\ - \int_{h+b}^{h+c} s(\eta) \ln \frac{|\eta-x|}{\eta+x} d\eta = 0 \\ \quad (h+b \leq x \leq h+c). \end{cases} \quad (8)$$

Далее в (8) перейдем к безразмерным величинам по формулам $\eta = h + a\eta'$, $x = h + a\alpha'$, $q(\eta) \equiv \hat{q}(\eta')$, $s(\eta) \equiv \hat{s}(\eta')$, $\lambda = \frac{h}{a}$ ($1 < \lambda < \infty$), $\alpha = \frac{b}{a}$, $\beta = \frac{c}{a}$.

В этом случае система интегральных уравнений (8) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \int_{-1}^1 q(\eta) k_3(\eta, x) d\eta + \pi s(x) = 2\pi \quad (|x| \leq 1) \\ \frac{\pi}{2} \int_{-1}^1 q(\eta) [1 - \text{sign}(\eta-x)] d\eta - \\ - \int_{\alpha}^{\beta} s(\eta) k_4(\eta, x) d\eta = 0 \quad (\alpha \leq x \leq \beta). \end{cases} \quad (9)$$

$$k_3(\eta, x) = \frac{2(x+\lambda)}{(\eta-x)(\eta+x+2\lambda)}, \quad k_4(\eta, x) = \ln \frac{|\eta-x|}{\eta+x+2\lambda}.$$

В (9) и далее знаки «штрих» и «крышка» опущены.

Так как жидкость является несжимаемой, то при ударе плавающей в ней пластинки отрыв жидкости от пластинки может произойти лишь при наличии у жидкости свободной поверхности. В случае если жидкость занимает все пространство ($\lambda = \infty$), отрыв жидкости от пластинки при ударе невозможен. В этом случае $\alpha = \beta = 0$, и решение системы интегральных уравнений (9) дается формулами

$$s(x) \equiv 0, \quad q(x) = 2 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При наличии свободной поверхности функция $s(x)$ имеет структуру [1]

$$s(x) = X(x)\Omega(x), \quad X(x) = \sqrt{(\beta-x)(x-\alpha)}, \quad (10)$$

где $\Omega(x)$ является непрерывной функцией. Из первого уравнения системы (9) в этом случае следует, что функция $q(x)$ должна иметь вид [4]

$$q(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \Phi(x), \quad (11)$$

а функция $\Phi(x)$ является непрерывной.

В [5] изложен итерационный метод для определения размера области отрыва несжимаемой жидкости от пластинки при ударе. В соответствии с этим методом функцию $s(x)$ целесообразно рассматривать в форме $s(x) = \frac{1}{X(x)} \Omega_1(x)$, (12)

где $\Omega_1(x)$ – непрерывная функция. На каждом шаге итерационного процесса при заданных значениях параметров α и β уравнение $\Omega_1(x) = 0$ в промежутке $(-1, 1)$ имеет два корня, которые можно рассматривать как уточненные значения этих параметров. Начальные значения величин α и β можно задать в следующем виде: $\alpha_0 = -1$, $\beta_0 = 1$. При достижении заданной точности значения α и β в (12) и соответственно в (10) приближенно можно считать равными, и тогда структура функции $s(x)$ в форме (12) может быть преобразована к виду (10).

Для решения системы (9) применен метод коллокации. В качестве точек коллокации были взяты чебышевские узлы. Приближенное решение системы выбрано в форме разложений по ортогональным многочленам. При этом у каждой искомой функции выделен множитель, содержащий ее особенность.

В соответствии с (11) приближенное представление функции $q(x)$ ищется в виде

$q(x) = \left(\sqrt{1-x^2}\right)^{-1} \sum_{n=0}^N Q_n T_n(x)$, где $T_n(x)$ – многочлены Чебышева первого рода; Q_n – коэффициенты, подлежащие определению.

В соответствии с (12) приближенное представление функции $s(x)$ можно рассматривать в виде разложения по многочленам $T_n(x)$

$s(x) = \frac{1}{X(x)} \sum_{n=0}^N S_n T_n\left(\frac{2x-\alpha-\beta}{\beta-\alpha}\right)$, где коэффициенты S_n подлежат определению.

Метод коллокации приводит систему интегральных уравнений (9) к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов указанных разложений Q_n и S_n .

После определения функций q и s можно найти по формулам (1), (2) и (7) скорость жидких частиц и импульсивное давление в области, занятой жидкостью. Нормальная скорость точек отрыва жидкости от пластинки $v_k(x)$ может быть определена по формуле, следующей из (5),

$$v_k(x) = U[1-s(x)] \quad (\alpha \leq x \leq \beta).$$

Нормальная скорость точек свободной поверхности $v_n(y)$ дается формулой

$$v_n(y) = -\frac{U}{\pi} \int_{h-a}^{h+a} q(\eta) \frac{y}{y^2 + \eta^2} d\eta + \frac{U}{\pi} \int_{h+b}^{h+c} s(\eta) \frac{\eta}{y^2 + \eta^2} d\eta \quad (|y| < \infty).$$

На рис. 2 приведены графики функции $V(y) = v_n(ay)/U$.

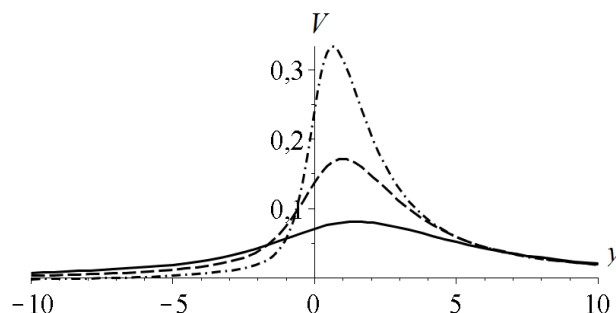


Рис. 2. Графики функции $V(y)$

Сплошная линия соответствует $\lambda=5$, штриховая – $\lambda=3$, штрихпунктирная – $\lambda=2$. При реализации итерационного процесса найдено для $\lambda=5$: $\alpha \approx -0,743$, $\beta \approx 0,743$; для $\lambda=3$: $\alpha \approx -0,796$, $\beta \approx 0,796$; для $\lambda=2$: $\alpha \approx -0,846$, $\beta \approx 0,847$. Как показали проведенные вычисления, для получения значений α и β с точностью до трех значащих

цифр при $2 \leq \lambda < \infty$ достаточно осуществить в итерационном процессе 30÷40 итераций.

При увеличении параметра λ размер области отрыва жидкости от пластины уменьшается.

Литература

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., 1966. 448 с.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье. М., 1955. 660 с.
3. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1971. 1108 с.
4. Александров В.М., Коваленко Е.В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. М., 1986. 336 с.
5. Сметанин Б.И., Федяева К.Е. Кавитационный отрыв при ударе по пластинке, расположенной в слое жидкости параллельно его свободной границе // Эколог. вестн. науч. центров ЧЭС. 2014. № 2. С. 51–57.

References

1. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow, 1966, 448 p.
2. Sneddon I. *Preobrazovaniya Fur'e* [Fourier transforms]. Moscow, 1955, 660 p.
3. Gradshtein I.S., Ryzhik I.M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedenii* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, 1971, 1108 p.
4. Aleksandrov V.M., Kovalenko E.V. *Zadachi mekhaniki sploshnykh sred so smeshannymi granichnymi usloviyami* [Problems of continuum mechanics with mixed boundary conditions]. Moscow, 1986, 336 p.
5. Smetanin B.I., Fedyaeva K.E. Kavitatsionnyi otryv pri udare o plastinke, raspolozhennoi v sloe zhidkosti parallel'no ego svobodnoi granitse [Cavitation stall when they hit the plate, located in the fluid layer parallel to its free edge]. *Ekol. vestn. nauch. tsentrov CHES*, 2014, no 4, pp. 51-57.

Поступила в редакцию

5 октября 2015 г.

УДК 517.9, 519.612

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-84-90

РЕШЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ДВУМЕРНЫХ УРАВНЕНИЙ ТИПА СВЁРТКИ НА БОЛЬШИХ ПРЯМОУГОЛЬНИКАХ

© 2015 г. Д.И. Ханин

Ханин Дмитрий Игоревич – аспирант, кафедра алгебры и дискретной математики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: dihan@mail.ru

Khanin Dmitry Igorevich – Post-Graduate Student, Department of Algebra and Discrete Mathematics, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: dihan@mail.ru

Статья посвящена решению многомерных дискретных уравнений типа свёртки на прямоугольниках и указывает пути реализации алгоритма, в котором для решения конечной системы используются некоторые вспомогательные уравнения с операторами типа свёртки, допускающие эффективное решение: уравнения с циклическими матрицами и уравнения свёртки в полупространстве. Для решения последних предлагается решать одномерные уравнения Винера – Хопфа.

Ключевые слова: многомерные дискретные свертки, уравнения на прямоугольнике, теплицевы матрицы, численное решение.

This paper is devoted to the solution to the multi-dimensional discrete convolution-type equations on the rectangles and points out the paths for realization of algorithm, in which some auxiliary equations with convolution-type operators, allowing an effective solution (equations with cyclic matrices and a convolution equation in the half-spaces) are used in the solution to the finite system. To solve the ones it is proposed to solve one-dimensional Wiener-Hopf equations.

Keywords: multidimensional discrete convolution, the equation on the rectangle, the Toeplitz matrices, numerical solution.

Решению одномерных и многомерных уравнений Винера – Хопфа, а также конечных систем линейных уравнений с теплицевыми матрицами посвящено большое количество работ (см., например, [1–8] и указанную там литературу), хотя остаётся открытым вопрос об оптимальном алгоритме решения подобных задач в случае систем большого размера.

Данная статья посвящена решению многомерных уравнений типа свёртки на многогранниках и основывается в первую очередь на работе [9], где излагаются основные теоретические положения, позволяющие приближенно решать дискретные уравнения типа свёртки на многогранниках, используя решения некоторых бесконечных систем с операторами типа свёртки. Во многих случаях приближённое решение бесконечных систем оказывается проще непосредственного решения исходной конечной, но достаточно большой системы. Однако в упомянутой работе не раскрываются детали алгоритма, необходимые для его численной реализации. Данная статья является продолжением работы [9], конкретизирующая и дополняющая её для непосредственного использования в расчётах. В большинстве ранее опубликованных исследований на оператор свёртки накладываются специфические требования, например положительная определенность, либо другие условия, сужающие класс рассматриваемых операторов (см., например, [4, 5, 7]), либо же для численной факторизации символа оператора решаются достаточно большие линейные системы уравнений с

теплицевыми матрицами (см., например, [3]), в то время как в данной работе, наоборот, производится численная факторизация символа с целью последующего приближённого решения определённых конечных систем уравнений.

Кроме того, теоретические исследования в данной работе подкреплены численными экспериментами, проведенными с помощью математического пакета MATLAB.

Вспомогательные утверждения и обозначения

Рассмотрим произвольное множество $u \subset Z^2$, где Z – множество целых чисел. Для введённого множества обозначим через P_u проектор, действующий в пространстве $l_p(Z^2)$, определённый по

$$\text{формуле } (P_u \psi)_i = \begin{cases} \psi_i, & i \in u, \\ 0, & i \notin u. \end{cases}$$

Здесь и далее в тексте работы p фиксировано и удовлетворяет неравенству $1 \leq p \leq \infty$.

Под P_+ будем понимать проектор, действующий в $l_p(Z)$ по правилу $(P_+ \psi)_i = \begin{cases} \psi_i, & i \geq 0, \\ 0, & i < 0. \end{cases}$

Определение. Оператор, действующий в пространстве $l_p(Z^2)$ ($1 \leq p \leq \infty$) по формуле

$(Ax)_i = \sum_{j \in Z^2} a_{i,j} x_j$, где $\mathbf{i} = (i_1, i_2) \in Z^2$, $a \in l_1(Z^2)$, на-

зывается оператором канонической свёртки (или просто оператором свёртки).

Если $a_i = 0$ при $|\mathbf{i}| > r$ ($|\mathbf{i}|$ – норма вектора $\mathbf{i}$) для некоторого r , то оператор свёртки A называется финитным.

Произвольному линейному ограниченному оператору A , действующему в $l_p(Z^2)$, можно поставить в соответствие функцию

$$\varphi_A(t) = \sup_{\rho(u,v) > t} \|P_u A P_v\|,$$

где $u, v \subset Z^2$ и $\rho(u, v)$ – расстояние между множествами u и v . Это функция обладает рядом свойств, описанных в работе [10] и позволяющих использовать её для эффективных оценок возникающих погрешностей при нахождении приближённого решения уравнений, рассматриваемых в статье [9] и в данной работе.

Далее будет использоваться конечное дискретное преобразование Фурье F_n , действующее в конечномерном пространстве C^n , по правилу

$$(F_n y)_k = \sum_{j=1}^n y_j e^{\frac{2\pi i(k-1)(j-1)}{n}}. \text{ Известно, что обратное}$$

преобразование Фурье действует по формуле

$$(F_n^{-1} z)_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n z_j e^{\frac{2\pi i(k-1)(j-1)}{n}}, \quad k = \overline{1, 2, \dots, n}.$$

Аналогично двумерное конечное дискретное преобразование Фурье определяется следующим образом:

$$F_{n_1 \times n_2} y = \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} y_{j_1, j_2} e^{\frac{2\pi i(k_1-1)(j_1-1)}{n_1}} e^{\frac{2\pi i(k_2-1)(j_2-1)}{n_2}}.$$

$$\text{Тогда } F_{n_1 \times n_2}^{-1} z = \frac{1}{n_1 n_2} \sum_{j_1=1}^{n_1} \sum_{j_2=1}^{n_2} z_{j_1, j_2} e^{\frac{2\pi i(k_1-1)(j_1-1)}{n_1}} e^{\frac{2\pi i(k_2-1)(j_2-1)}{n_2}}.$$

Кроме того, пусть $F^{(1)}: l_1(Z) \rightarrow W(\Gamma)$ и $F^{(2)}: l_1(Z^2) \rightarrow W(\Gamma^2)$ – одномерное и двумерное преобразования Фурье соответственно ($\Gamma = \{w \in C: |w|=1\}$ – единичная окружность; $W(\Gamma), W(\Gamma^2)$ – алгебры Винера). Если $\mathbf{a} \in l_1(Z)$,

$$\mathbf{a} = \{a_{j_1, j_2}\}_{j_1, j_2 \in Z}, \quad \text{то } (F^{(1)} \mathbf{a})(t) = a(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j t^j.$$

Если $\mathbf{a} \in l_1(Z^2)$, $\mathbf{a} = \{a_{j_1, j_2}\}_{j_1, j_2 \in Z}$, то

$$(F^{(2)} \mathbf{a})(t, \tau) = a(t, \tau) = \sum_{j_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{j_2=-\infty}^{+\infty} a_{j_1, j_2} t^{j_1} \tau^{j_2}.$$

Общая структура описываемого алгоритма

Целью данной работы является описание алгоритма приближённого решения уравнения $P_M A P_M x = b$, где $A: l_p(Z^2) \rightarrow l_p(Z^2)$ – оператор свёртки с ядром $\mathbf{a} \in l_1(Z^2)$; $M = [0, n_1 - 1] \times [0, n_2 - 1]$ – дискретный параллелепипед. Также предполагается, что существуют такие неотрицательные целые числа $m_1^{(1)} < n_1$, $m_2^{(1)} < n_1$, $m_1^{(2)} < n_2$ и $m_2^{(2)} < n_2$, что $a_{j_1, j_2} = 0$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий: $j_1 < -m_1^{(1)}$, $j_1 > m_2^{(1)}$, $j_2 < -m_1^{(2)}$, $j_2 > m_2^{(2)}$.

Опишем алгоритм нахождения приближённого решения $\hat{x}$ – массива с индексами из M .

Зададим натуральные числа $L_1 \leq \frac{n_1}{2}$ и $L_2 \leq \frac{n_2}{2}$.

Разобьём множество M на подмножества

$$u = [L_1, n_1 - L_1 - 1] \times [L_2, n_2 - L_2 - 1],$$

$$v_1 = [L_1, n_1 - L_1 - 1] \times [0, L_2 - 1],$$

$$v_2 = [n_1 - L_1, n_1 - 1] \times [L_2, n_2 - L_2 - 1],$$

$$v_3 = [L_1, n_1 - L_1 - 1] \times [n_2 - L_2, n_2 - 1],$$

$$v_4 = [0, L_1 - 1] \times [L_2, n_2 - L_2 - 1],$$

$$w_1 = [0, L_1 - 1] \times [0, L_2 - 1],$$

$$w_2 = [n_1 - L_1, n_1 - 1] \times [0, L_2 - 1],$$

$$w_3 = [n_1 - L_1, n_1 - 1] \times [n_2 - L_2, n_2 - 1],$$

$$w_4 = [0, L_1 - 1] \times [n_2 - L_2, n_2 - 1].$$

Введём полупространства $\Pi_1 = Z \times [0, +\infty)$,

$$\Pi_2 = (-\infty, n_1 - 1] \times Z, \quad \Pi_3 = Z \times (-\infty, n_2 - 1],$$

$$\Pi_4 = [0, +\infty) \times Z \text{ и углы } K_1 = [0, +\infty) \times [0, +\infty),$$

$$K_2 = (-\infty, n_1 - 1] \times [0, +\infty), \quad K_3 = (-\infty, n_1 - 1] \times (-\infty, n_2 - 1],$$

$$K_4 = [0, +\infty) \times (-\infty, n_2 - 1].$$

В работе [11] доказано, что операторы $P_M A P_M$ обратимы на достаточно больших прямоугольниках ($n_1 \geq n_0^1$, $n_2 \geq n_0^2$) и нормы обратных операторов $(P_M A P_M)^{-1}$ равномерно ограничены тогда и только тогда, когда обратимы операторы $P_{K_i} A P_{K_i}$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Будем предполагать эти условия выполненными. Как будет продемонстрировано ниже, данный алгоритм эффективно работает при больших n_1 и n_2 .

Приближённое решение на множестве u

Сопоставим оператору A и двумерному параллелепипеду M циклическую матрицу

$$C_M = (c_{i(-)j})_{i,j \in M},$$

где $i(-)j$ – вычитание по модулю $n = (n_1, n_2)$ для мультииндексов $i = (i_1, i_2)$, $j = (j_1, j_2)$, и $c_i = \sum_{\substack{j=i \\ (\text{mod } n), \\ |j_k| < n_k}} a_j$ для i таких, что $0 \leq i_k \leq n_k - 1$, $k = 1, 2$.

Пусть $K = \sup_M \|C_M^{-1}\|$. Известно, что $K < \infty$. Введём также константу $S = \sup_{n \geq n_0} \|(P_M A P_M)^{-1}\| < +\infty$. В работе [9] сформулирована и доказана следующая

Теорема 1. Пусть операторы $P_{K_i} A P_{K_i}$ обратимы во всех углах K_i , соответствующих углам параллелепипеда M . Приближённое решение $\bar{x}$ системы $P_M A P_M x = b$ на множестве u можно искать в виде $P_u \bar{x} = P_u C_M^{-1} b$.

$$\begin{aligned} &\text{При этом справедлива оценка } \|P_u x_0 - P_u \bar{x}\| \leq \\ &\leq \|A^{-1}\| \cdot \left(\sum_{|i|>l} |a_i|\right) \cdot K \cdot \|b\| + \\ &+ 2\varphi_{A^{-1}}(l) \cdot \|a\| \cdot K \cdot \|b\| + \varphi_{A^{-1}}(2l) \cdot \|a\| \cdot S \cdot \|b\|, \end{aligned}$$

где x_0 – точное решение, $l = \min \{L_1, L_2\}$ [9, теорема 5, с. 63].

Введём дополнительные двумерные массивы C и $\bar{x}$ размером $n_1 \times n_2$ (с индексами из M) каждый. Инициализируем массив C по формулам

$$\begin{aligned} C_{j_1, j_2} &= a_{j_1, j_2} + a_{j_1 - n_1, j_2} + a_{j_1, j_2 - n_2} + a_{j_1 - n_1, j_2 - n_2}; \\ C_{j_1, 0} &= a_{j_1, 0} + a_{j_1 - n_1, 0}; \quad C_{0, j_2} = a_{0, j_2 - n_2} + a_{0, j_2}; \\ C_{0, 0} &= a_{0, 0}; \quad \text{для } 0 < j_1 < n_1, \quad 0 < j_2 < n_2. \end{aligned}$$

Будем решать уравнение $C \bar{x} = b$.

Далее пусть $\tilde{x}_{j_1, j_2} = \bar{x}_{j_1, j_2}$, где упорядоченная пара индексов $(j_1, j_2) \in u$.

Решение линейных уравнений с циклической матрицей широко известно. Коротко изложим алгоритм для рассматриваемого случая.

Введём двумерные массивы C^F , B^F и X^F размером $n_1 \times n_2$ каждый и с помощью двумерного конечного преобразования Фурье заполним их соответствующим образом так, чтобы были выполнены равенства $C^F = (F_{n_1, n_2})^{-1} C$, $B^F = (F_{n_1, n_2})^{-1} b$,

$$X_{j_1, j_2}^F = \frac{B_{j_1, j_2}^F}{C_{j_1, j_2}^F}.$$

Проведём преобразование Фурье матрицы X^F , домножим элементы на коэффициент $\frac{1}{n_1 n_2}$ и запишем результат в массив $\bar{x}$: $\bar{x} = \frac{1}{n_1 n_2} F_{n_1, n_2} X^F$.

Замечание. Для ускорения работы алгоритма можно использовать быстрое преобразование Фурье. Для этого необходимо ввести натуральные числа $d_1 = 2^{\lceil \log_2 n_1 \rceil}$, $d_2 = 2^{\lceil \log_2 n_2 \rceil}$ и дополнительный двумерный массив $\hat{b}$, где $\hat{b}_{j_1, j_2} = b_{j_1, j_2}$ для $0 \leq j_1 \leq n_1 - 1$ и $0 \leq j_2 \leq n_2 - 1$ и $\hat{b}_{j_1, j_2} = 0$ – иначе.

Путём элементарного обобщения доказательства теоремы из статьи [9, теорема 5] получим, что для дискретного параллелепипеда

$$\begin{aligned} \hat{M} &= [0, d_1 - 1] \times [0, d_2 - 1] \text{ выполнено} \\ \|P_u x_0 - P_u C_M^{-1} \hat{b}\| &\leq \|A^{-1}\| \cdot \left(\sum_{|i|>l} |a_i|\right) \cdot K \cdot \|b\| + \\ &+ 2\varphi_{A^{-1}}(l) \cdot \|a\| \cdot K \cdot \|b\| + \varphi_{A^{-1}}(2l) \cdot \|a\| \cdot S \cdot \|b\|. \end{aligned}$$

Пусть $\hat{C} = C_{\hat{M}}$. Тогда для отыскания приближённого решения на множестве u следует решить уравнение $\hat{C} \bar{x} = \hat{b}$ и положить $\tilde{x}_{j_1, j_2} = \bar{x}_{j_1, j_2}$, где $(j_1, j_2) \in u$.

Приближённое решение на множествах v_i

В работе [9] сформулирована и доказана следующая

Теорема 2. Приближённое решение $\tilde{x}$ уравнения $P_M A P_M x = b$ на множествах v_i ($i = 1, 2, 3, 4$) можно искать в виде $P_{v_i} \tilde{x} = P_{v_i} (P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i})^{-1} b$.

При этом справедлива оценка $\|P_{v_i} x_0 - P_{v_i} \tilde{x}\| \leq \varphi_{(P_{\Pi_i} A P_{\Pi_i})^{-1}}(l) \cdot \|A\| \cdot S \cdot \|b\|$ где x_0 – точное решение; $l = \min \{L_1, L_2\}$ [9, теорема 2, с. 59].

Далее изложим алгоритм для нахождения приближённого решения на множествах v_i , основанный на численном решении одномерных уравнений Винера – Хопфа. Все рассуждения будут проведены для множества v_4 , однако путём несложных преобразований могут быть перенесены на любое v_i . Один из возможных способов решения одномерного уравнения Винера – Хопфа будет приведён ниже.

Опишем возможную процедуру приближённого нахождения первых L координат решения уравнения $P_{\Pi_4} A P_{\Pi_4} x = P_{\Pi_4} b$. Пусть $\hat{x} \in \text{Im } P_{\Pi_4}$ – точное решение системы $P_{\Pi_4} A P_{\Pi_4} x = P_{\Pi_4} b$.

Теорема 3. Пусть $\tau_0 \in \Gamma$ – фиксированное число. Тогда одномерные операторы Винера – Хопфа с ядром $a_{\tau_0}(t) = (F^{(1)})^{-1}a(t, \tau_0)$ обратимы.

Доказательство. Действительно, из обратимости операторов $P_{K_i}AP_{K_i}$ на $l_p(K_i)$ для всех $i (1 \leq i \leq 4)$ следует, что $a(t, \tau) \neq 0$ для всех $t \in \Gamma$ и $\tau \in \Gamma$, а также отсюда же следует равенство нулю двумерного вектора индекса $\kappa(a) = (\kappa_1, \kappa_2) = (0, 0)$. Первое из этих условий влечёт за собой тот факт, что $a_{\tau_0}(t) \neq 0$ при $t \in \Gamma$, а второе – что индекс $a_{\tau_0}(t)$ равен $\kappa_1 = 0$. Одновременное выполнение этих двух условий равносильно обратимости рассматриваемого одномерного оператора Винера – Хопфа. Теорема доказана.

Рассмотрим оператор $\hat{F}_2 = I \otimes F$, ставящий в соответствие вектору $\mathbf{a} \in l_p(Z^2)$ последовательность функций $a_k(\tau) = \sum_{j \in Z} a_{k,j} \tau^j$, $k \in Z$. На обе части уравнения $P_{\Pi_4}AP_{\Pi_4}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ подействуем оператором $\hat{F}_2$. Получим $\hat{F}_2P_{\Pi_4}AP_{\Pi_4}\mathbf{x} = \hat{F}_2\mathbf{b}$, или, что то же самое, $\hat{F}_2P_{\Pi_4}AP_{\Pi_4}\hat{F}_2^{-1}\hat{F}_2\mathbf{x} = (\hat{F}_2\mathbf{b})(\tau)$. Для простоты обозначим $\hat{b} = \hat{b}(\tau) = (\hat{F}_2\mathbf{b})(\tau)$, $\hat{x} = \hat{x}(\tau) = (\hat{F}_2\mathbf{x})(\tau)$, $P_+\hat{A}P_+ = P_+\hat{A}(\tau)P_+ = (\hat{F}_2P_{\Pi_4}AP_{\Pi_4}\hat{F}_2^{-1})(\tau)$ – оператор, который при каждом фиксированном $\tau = \tau_0$ становится оператором Винера – Хопфа с символом $a_{\tau_0} = a(t, \tau_0)$. Таким образом, приходим к уравнению $P_+\hat{A}(\tau)P_+\hat{x} = \hat{b}(\tau)$. Отсюда для каждого фиксированного τ получаем $\hat{x}(\tau) = (P_+\hat{A}(\tau)P_+)^{-1}\hat{b}(\tau)$. Далее $x = \hat{F}_2^{-1}\hat{x}$. Иными словами,

$$x_{k,m} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \hat{x}_k(\tau) \tau^{-(m+1)} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{x}_k(e^{i\varphi}) e^{-i\varphi m} d\varphi.$$

Значение последнего интеграла можно находить численно, используя, например, значения компонент решения при $\tau = e^{\frac{2\pi i(j-1)(m-1)}{n_c}}$, $j = 1, 2, \dots, n_c$, по приближённой формуле

$\frac{1}{n_c} \sum_{j=1}^{n_c} \hat{x}_k(e^{\frac{2\pi i(j-1)(m-1)}{n_c}}) \cdot e^{\frac{2\pi i(j-1)(m-1)}{n_c}}$, что можно делать с помощью быстрого преобразования Фурье, выбирая число n_c как достаточно большую степень двойки.

Приближённое решение линейных уравнений с одномерным оператором Винера – Хопфа

Пусть $a(t) \in W(\Gamma)$ – символ обратимого одномерного оператора Винера – Хопфа $T(a): l_p(Z_+) \rightarrow l_p(Z_+)$. Из общей теории известно, что $a(t) = a^+(t)a^-(t)$, где $a_+(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^+ t^k$, $a_-(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k^- t^{-k}$, при этом $a^+(t)$, $a^-(t)$ – символы обратимых операторов Винера – Хопфа $T(a^+)$ и $T(a^-)$. Также известно, что $T(a) = T(a^-)T(a^+)$, откуда $(T(a))^{-1} = (T(a^+))^{-1}(T(a^-))^{-1}$, причём $(T(a^+))^{-1} = T\left(\frac{1}{a^+}\right)$ и $(T(a^-))^{-1} = T\left(\frac{1}{a^-}\right)$. В случае когда $a(t)$ – конечный многочлен Фурье, $a^+(t)$ и $a^-(t)$ – также конечные многочлены Фурье, причём все корни уравнения $a^-(t) = 0$ лежат во внутренней области контура Γ , а все корни уравнения $a^+(t) = 0$ – во внешней. Однако отыскание коэффициентов $a^-(t)$ и $a^+(t)$ вызывает некоторую трудность.

Для соответствующей факторизации выпишем сопровождающую матрицу символа $a(t)$ и воспользуемся теоремой Рисса.

В данном случае мы имеем одномерный обратимый оператор Винера – Хопфа с символом $a(t)$. При этом для некоторых целых неотрицательных чисел m_1 и m_2 выполняется $a(t) = \sum_{k=-m_1}^{m_2} a_k t^k$, причём

$a_{m_1} \neq 0$ и $a_{m_2} \neq 0$. Для нормированного многочлена на $\frac{a(t)t^{m_2}}{a_{m_2}}$ выпишем сопровождающую матрицу $\mathbf{Y}$ размером $(m_1 + m_2) \times (m_1 + m_2)$

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{-m_1}}{a_{m_2}} \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{(-m_1+1)}}{a_{m_2}} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -\frac{a_{(-m_1+2)}}{a_{m_2}} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -\frac{a_{(-m_1+3)}}{a_{m_2}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -\frac{a_{(m_1-1)}}{a_{m_2}} \end{pmatrix}.$$

Сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Пусть матрица $\mathbf{G} \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ имеет

$$\text{вид } \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -g_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -g_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -g_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & -g_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -g_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $\mathbf{Q}(\lambda) \in \mathbf{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ с элементами

$$Q_{i,j}(\lambda) = -\frac{1}{\lambda^{i-j+1}} \frac{\sum_{k=i}^{n-1} g_k \lambda^k + \lambda^n}{\sum_{k=0}^{n-1} g_k \lambda^k + \lambda^n} \quad \text{при } i \geq j \quad \text{и}$$

$$Q_{i,j} = \frac{1}{\lambda^{i-j+1}} \frac{\sum_{k=0}^{i-1} g_k \lambda^k}{\sum_{k=0}^{n-1} g_k \lambda^k + \lambda^n} \quad \text{при } i < j \quad \text{является обрат-$$

ной к матрице $(\mathbf{G} - \lambda \mathbf{E})$ при $\lambda \neq 0$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица размера $n \times n$.

Доказательство. Требуемый результат легко получить путём нахождения матрицы, обратной к матрице $(\mathbf{G} - \lambda \mathbf{E})$, методом Гаусса.

С помощью сформулированной леммы и формул численного интегрирования приближённо определим матрицу $\mathbf{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\lambda \mathbf{E} - \mathbf{Y})^{-1} d\lambda$, где $\mathbf{E}$ –

единичная матрица размером $(m_1 + m_2) \times (m_1 + m_2)$. Из теоремы Рисса [12, с. 445], вытекает, что $\mathbf{P}$ – матрица проектора на максимальное инвариантное подпространство матрицы $\mathbf{Y}$, соответствующее тем её собственным числам, которые лежат внутри единичного круга. При этом $\mathbf{PY} = \mathbf{YP}$. С другой стороны, по свойствам сопровождающей матрицы собственными числами $\mathbf{Y}$ являются корни многочлена $a(t)t^{m_1}$, причём геометрическая кратность каждого собственного числа равна кратности соответствующего корня многочлена $a(t)t^{m_1}$. Предполагая, что индекс функции $a(t)$ равен 0, приходим к выводу, что проектор $\mathbf{P}$ действует на m_1 -мерное собственное подпространство матрицы $\mathbf{Y}$. Спектр оператора $\mathbf{PYP} = \mathbf{PY}$, рассматриваемого как оператор на образе проектора $\mathbf{P}$, состоит из корней функции $a_-(t)$, а спектр оператора $\mathbf{PYP}$, рассматриваемого как оператор на всём множестве векторов длины $(m_1 + m_2)$, включает в себя корни многочлена Фурье $a_-(t)$ и число 0 алгебраической кратности m_2 . Таким образом, для приближённой

спектральной факторизации функции $a(t)$ вычислим характеристический многочлен матрицы $\mathbf{PY}$. Если бы коэффициенты матрицы $\mathbf{PY}$ были бы определены точно, то этот многочлен имел бы вид $(\lambda^{m_1} + \sum_{k=1}^{m_1-1} h_k \lambda^{m_1-k}) \lambda^{m_2} = a_-(\lambda) \cdot \lambda^{m_2}$. Численно же мы придём к многочлену вида $\lambda^{m_1+m_2} + \sum_{k=1}^{m_1+m_2-1} h_k \lambda^{m_1+m_2-k}$, отбросив последние m_2 членов которого, получим приближённое значение коэффициентов многочлена $a_-(t)$. При увеличении точности подсчёта интеграла отбрасываемые коэффициенты стремятся к нулю. Разделив многочлен $a(t)$ на найденное приближённое значение многочлена $a_-(t)$, получим приближённое значение коэффициентов многочлена $a_+(t)$ (остаток также отбрасываем).

С помощью найденных приближённых коэффициентов $a_+(t)$, $a_-(t)$ приближённо посчитаем

$$\mathbf{z} = T \left(\frac{1}{a_-} \right) \mathbf{b}, \quad \text{а затем } \mathbf{x} = T \left(\frac{1}{a_+} \right) \mathbf{z},$$

первые L координат которого послужат искомым приближением.

Решение на множествах w_i

Пусть $W = \bigcup_{i=1}^4 w_i$, $V = u \cup v_1 \cup v_2 \cup v_3 \cup v_4$ и пусть на множестве V приближённое решение уравнения $P_M AP_M \mathbf{x} = \mathbf{b}$ уже найдено.

В работе [9] была сформулирована и доказана

Теорема 4. Пусть $P_w \tilde{\mathbf{x}}$ – точное решение системы уравнений $P_w AP_w \tilde{\mathbf{x}} = P_w \mathbf{b} - P_w AP_v \tilde{\mathbf{x}}$, а $\mathbf{x}_0$ – точное решение системы уравнений $P_M AP_M \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Тогда $\|P_w \mathbf{x}_0 - P_w \tilde{\mathbf{x}}\| \leq C \cdot \|A\| \cdot \|P_v(\mathbf{x}_0 - \tilde{\mathbf{x}})\|$.

Введём двумерный теплицев оператор $\hat{A}$, действующий в пространстве $l_p([0, L_1 - 1] \times [0, L_2 - 1])$ (и соответствующую ему матрицу) с ядром $\hat{\mathbf{a}}$, таким что $\hat{a}_{j_1, j_2} = a_{j_1, j_2}$ при $|j_1| \leq L_1 - 1$, $|j_2| \leq L_2 - 1$.

Необходимо найти недостающую часть решения на множествах w_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

При $m_1 < L_1$ и $m_2 < L_2$ уравнение $P_w AP_w \tilde{\mathbf{x}} = P_w \mathbf{b} - P_w AP_v \tilde{\mathbf{x}}$ распадается на 4 уравнения $\hat{A}_{w_i} \tilde{\mathbf{x}} = P_{w_i} \mathbf{b} - P_{w_i} AP_v \tilde{\mathbf{x}}$, где $i = 1, 2, 3, 4$. Каждое из последних уравнений решим численно одним из методов решения системы линейных уравнений (например, методом Гаусса).

Численные эксперименты

Для иллюстрации эффективности описанного алгоритма данный метод реализован с помощью программного пакета MATLAB. Осуществлён ряд

численных экспериментов для матриц с разным числом диагоналей и с разными символами. Для относительно небольших размерностей полученное приближённое решение сравнивалось со стандартным решением заданного уравнения как системы линейных уравнений (функция *mlgdivide* пакета MATLAB). При этом наряду с относительной погрешностью фиксировалось время вычислений. Для больших размерностей решение исходного уравнения с помощью стандартных методов не проводилось, так как это требовало бы использования значительных ресурсов времени и оперативной памяти, поэтому для найденного приближённого уравнения вычислялась невязка, делённая на норму вектора правой части.

Ниже приведена табл. 1 для операторов с символом вида $a(t_1, t_2) = a_1(t_1)a_2(t_2)$ с корнями, указанными в таблице (для операторов такого вида легко проверять условие обратимости). Значения L_1 и L_2 имеют тот же смысл, какой они имели на протяжении всей статьи, погрешность понимается в смысле относительной погрешности; время 1 – это время, затраченное на исполнение описываемого алгоритма; время 2 – на реализацию стандартного алгоритма решения СЛАУ.

Таблица 2 иллюстрирует эффективность алгоритма для двумерных теплицевых матриц с диагональным преобладанием. Так называемый коэффициент доминирования показывает, во сколько раз модуль диагонального элемента превосходит сумму модулей всех остальных элементов ядра.

Таблица 1

Операторы с символом вида $a(t_1, t_2) = a_1(t_1)a_2(t_2)$

n_1	n_2	L_1	L_2	Время1	Невязка	Время2	Погрешность
Старший коэффициент равен $3,273767 + 2,045127i$; $a_1(t_1)$, $a_2(t_2)$ имеют по 6 случайных корней							
45	60	8	10	5,043242	$3,622571e-02$	2,063022	$3,083128e-02$
90	100	15	17	5,629513	$5,964019e-03$	30,586821	$6,933378e-03$
50	300	9	50	9,682352	$2,604296e-02$		
100	200	17	34	6,932107	$3,970006e-03$		
300	250	50	42	13,593646	$4,097647e-06$		
300	320	50	54	18,582094	$4,167530e-06$		
370	450	62	75	29,721631	$3,558741e-07$		
490	500	82	84	51,675819	$6,411211e-09$		
Старший коэффициент равен $4,962705 - 1,640351i$; $a_1(t_1)$, $a_2(t_2)$ имеют по 16 случайных корней							
45	60	8	10	27,106256	$3,583960e+00$	2,072358	$1,196969e-01$
90	100	15	17	27,584938	$6,794564e-01$	30,726489	$3,216360e-02$
50	300	9	50	31,672393	$8,976235e-01$		
100	200	17	34	28,804012	$2,866609e-01$		
300	250	50	42	35,495961	$8,122787e-03$		
300	320	50	54	40,556332	$2,062627e-03$		
370	450	62	75	51,912124	$2,785353e-04$		
490	500	82	84	74,367843	$2,262839e-05$		

Таблица 2

Иллюстрация эффективности алгоритма. Коэффициент доминирования $1,030000e+00$. Размер носителя 13×11

n_1	n_2	L_1	L_2	Время1	Невязка	Время2	Погрешность
45	60	8	10	13,551939	$9,478900e-04$	2,085164	$1,722827e-03$
90	100	15	17	14,191773	$4,548298e-05$	31,122900	$7,587489e-05$
50	300	9	50	17,823183	$4,659534e-04$		
100	200	17	34	15,359406	$3,015529e-05$		
300	250	50	42	21,601895	$4,353699e-10$		
300	320	50	54	26,220531	$8,728183e-11$		
370	450	62	75	37,031220	$5,831880e-13$		
490	500	82	84	58,624726	$1,216229e-14$		

Литература

1. Тиртышников Е.Е. Тёплые матрицы, некоторые их аналоги и приложения. М., 1989. 184 с.
2. Воеводин В.В., Тиртышников Е.Е. Вычислительные процессы с тёплыми матрицами. М., 1987. 320 с.
3. Bini D.A., Fiorentino G., Gemignani L., Meini B. Effective fast algorithms for polynomial spectral factorization // Numer. Algorithms. 2003. Vol. 34. P. 217–227.
4. Boettcher A., Halwass M. Wiener-Hopf and spectral factorization of real polynomials by Newton's method // Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438. P. 4760–4805.
5. Goodman T.N.T., Micchelli C.A., Rodriguez G., Seatzu S. Spectral factorization of Laurent polynomials // Adv. Comput. Math. 1997. Vol. 7. P. 429–454.
6. Sayed A.H., Kailath T. A survey of spectral factorization methods // Numer. Linear Algebra Appl. 2001. № 8. P. 467–496.
7. Bottcher A., Halwass M. A Newton method for canonical Wiener-Hopf and spectral factorization of matrix polynomials // Electron. J. Linear Algebra. 2013. Vol. 26. P. 873–897.
8. Bottcher A., Silbermann B. Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices. N.Y., 1999. 259 p.
9. Козак А.В., Ханин Д.И. Приближенное решение больших систем уравнений с многомерными теплыми матрицами // Сиб. журн. вычисл. математики. 2015. № 1. С. 55–64.
10. Козак А.В., Симоненко И.Б. Проекционные методы решения многомерных дискретных уравнений в свёртках // Сиб. мат. журн. 1980. Т. XXI, № 2. С. 119–127.
11. Козак А.В. Локальный принцип в теории проекционных методов // Докл. АН СССР. 1973. Т. 212, № 6. С. 1287–1289.
12. Рисс Ф., Сёкефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. М., 1979. 592 с.

References

1. Tyrtshnikov E.E. *Teplitseye matrity, nekotorye ikh analogi i prilozheniya* [Toeplitz matrix, some of their analogs and applications]. Moscow, 1989, 184 p.
2. Voevodin V.V., Tyrtshnikov E.E. *Vychislitel'nye protsessy s teplitsevymi matritsami* [Computational processes with Toeplitz matrices]. Moscow, 1987, 320 p.
3. Bini D.A., Fiorentino G., Gemignani L., Meini B. Effective fast algorithms for polynomial spectral factorization. *Numer. Algorithms*, 2003, vol. 34, pp. 217–227.
4. Boettcher A., Halwass M. Wiener-Hopf and spectral factorization of real polynomials by Newton's method. *Linear Algebra Appl.*, 2013, vol. 438, pp. 4760–4805.
5. Goodman T.N.T., Micchelli C.A., Rodriguez G., Seatzu S. Spectral factorization of Laurent polynomials. *Adv. Comput. Math.*, 1997, vol. 7, pp. 429–454.
6. Sayed A.H., Kailath T. A survey of spectral factorization methods. *Numer. Linear Algebra Appl.*, 2001, no 8, pp. 467–496.
7. Bottcher A., Halwass M. A Newton method for canonical Wiener-Hopf and spectral factorization of matrix polynomials. *Electron. J. Linear Algebra*, 2013, vol. 26, pp. 873–897.
8. Bottcher A., Silbermann B. *Introduction to Large Truncated Toeplitz Matrices*. New York, 1999, 259 p.
9. Kozak A.V., Khanin D.I. Priblizhennoe reshenie bol'shikh sistem uravnenii s mnogomernymi teplitsevymi matritsami [An approximate solution of large systems of equations with multidimensional Toeplitz matrices]. *Sib. zhurn. vychisl. matematiki*, 2015, no 1, pp. 55–64.
10. Kozak A.V., Simonenko I.B. Proektsionnye metody resheniya mnogomernykh diskretnykh uravnenii v svertkakh [Projection methods for solving multidimensional discrete convolution equations]. *Sib. mat. zhurn.*, 1980, vol. XXI, no 2, pp. 119–127.
11. Kozak A.V. Lokal'nyi printsip v teorii proektsionnykh metodov [Local principle in the theory of projection methods]. *Dokl. AN SSSR*, 1973, vol. 212, no 6, pp. 1287–1289.
12. Riss F., Sekefal'vi-Nad' B. *Leksii po funktsional'nomu analizu* [Lectures on functional analysis]. Moscow, 1979, 592 p.

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 544.65

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-91-95

**О КИНЕТИКЕ ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКОГО ОКИСЛЕНИЯ
5-ГИДРОКСИМЕТИЛФУРФУРОЛА И 2,5-ДИФОРМИЛФУРАНА
НА ПЛАТИНОВОМ ЭЛЕКТРОДЕ В ВОДНОЙ СРЕДЕ***

© 2015 г. Д.В. Леонтьева, Н.В. Смирнова

Леонтьева Дарья Викторовна – кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт «Нанотехнологии и новые материалы», ул. Просвещения, 132, г. Новочеркасск, Ростовская обл., 346428, e-mail: da.leontyva@mail.ru

Leont'yeva Dar'ya Viktorovna – Candidate of Technical Science, Senior Researcher, Scientific Research Institute "Nanotechnology and New Materials", Prosveshchenie St., 132, Novocherkassk, Rostov Region, 346428, Russia, e-mail: da.leontyva@mail.ru

Смирнова Нина Владимировна – доктор химических наук, профессор, кафедра химических технологий, Южно-Российский государственный технический университет, ул. Просвещения, 132, г. Новочеркасск, Ростовская обл., 346428, e-mail: smirnova_nv@mail.ru.

Smirnova Nina Vladimirovna – Doctor of Chemical Science, Professor, Department of the Chemical Technology, South Russian State Technical University, Prosveshchenie St., 132, Novocherkassk, Rostov Region, 346428, Russia, e-mail: smirnova_nv@mail.ru.

Исследована кинетика электрохимического окисления 5-ГМФ и 2,5-ДФФ на платиновом электроде. Оба соединения окисляются в области потенциалов 0,2-0,7 В, причем наличие двух пиков на кривой окисления 5-ГМФ свидетельствует о поэтапном окислении спиртовой и альдегидной групп. Логарифмические зависимости скорости окисления от концентрации и скорости изменения потенциала электрода свидетельствуют об участии в реакции адсорбированных на неоднородной поверхности электрода молекул. Скорость окисления 2,5-ДФФ значительно (~ в 3 раза) превышает скорость окисления 5-ГМФ, поэтому возможность селективного окисления 5-ГМФ до 2,5-ДФФ путем прямого электроокисления в водных растворах представляется маловероятной.

Ключевые слова: 5-гидроксиметилфурфурол, 2,5-диформилфуран, платиновый электрод, электрохимическое окисление.

The kinetics of the electrochemical oxidation of 5-HMF and 2,5-DFF on a platinum electrode was investigated. Both compounds are oxidized in the potential range 0.2-0.7 V. The presence of two peaks in the curve of oxidation of 5-HMF indicates stepwise oxidation of an alcohol group and an aldehyde group. The logarithmic dependence of the oxidation rate on the concentration and on the potential sweep rate evidence of participation of molecules which adsorbed on the non-uniform electrode surface. The rate of 2,5-DFF oxidation significantly (~ 3 times) exceeds the rate of oxidation of 5-HMF, so the possibility of a selective oxidation of 5-HMF to 2,5-DFF by direct electrooxidation in aqueous solution is unlikely.

Keywords: 5-hydroxymethylfurfural, 2,5-diformilfuran, platinum electrode, electrochemical oxidation.

Основой устойчивого развития цивилизации будущего является производство топлива и химических веществ из возобновляемой биомассы, что обеспечит надежный путь к устранению сильной зависимости мировой промышленности от запасов ископаемого топлива [1]. Получение сахаров из биомассы и на их основе молекул-платформ для синтеза биотоплива и ряда других важных соединений [2] является в последние годы стратегией развития многих стран. Одной из таких multifunctional молекул-платформ служит 5-гидроксиметилфурфурол (5-

ГМФ), который, с одной стороны, может быть довольно просто получен из фруктозы, глюкозы и даже целлюлозы [3], а с другой – на его основе при эффективной каталитической переработке могут быть получены различные ценные химические вещества, такие как 2,5-фурандикарбоновая кислота (ФДКК), 2,5-диформилфуран (2,5-ДФФ), 5-формилфуран-2-карбоновая кислота и 5-гидроксиметилфуран-2-карбоновая кислота. Так, например, 2,5-ДФФ является важным предшественником синтеза фунгицидов, лекарственных препаратов [4], полимеров для раз-

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-23-00078).

личных приложений [5], а также перспективной добавкой к бензину (его октановое число 119) [6].

Селективное окисление 5-ГМФ до 2,5-ДФФ предполагает только один путь – окисление первичной гидроксильной группы, а не более реакционно активной альдегидной группы. Был исследован ряд гомогенных и гетерогенных катализаторов, большинство из которых на основе соединений ванадия, и молекулярный кислород в качестве окислителя [7, 8]. Так, в гомогенно-каталитической системе $\text{VOSO}_4/\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ при 353K в ацетонитриле реакция окисления 5-ГМФ проведена почти с количественным выходом ДФФ [7]. В толуоле на $\text{V}_2\text{O}_5/\text{TiO}_2$ при 363K, давлении воздуха 1,6 МПа и при высоком весовом отношении катализатора выход 2,5-ДФФ составил 85 % [8]. В [9] исследовано влияние природы растворителя (толуола, бензотрифторида, диметилсульфоксида, диметилформамида, 1,4-диоксана и H_2O с различной полярностью и протонной природой) и природы носителя (C , Al_2O_3 , TiO_2 , ZrO_2 , CeO_2 , MgO , Ru и т.д.) на селективность и механизм окисления 5-ГМФ до 2,5-ДФФ. Авторами [10] было рассмотрено влияние pH-электролита на эффективность гетерогенного катализа 5-ГМФ с участием Pt/C , Au/TiO_2 , Ru/C , Rh/C и Pd/C -катализаторов. Показано, что наиболее эффективен Pt/C , однако и на нем при конверсии около 85 % выход 2,5-ДФФ составил всего 8,2 % при селективности 9,63 %, выход ФДКК не превысил 73 %.

Таким образом, селективное аэробное окисление 5-ГМФ до 2,5-ДФФ возможно в водных и неводных растворителях, но такие недостатки, как трудность отделения реакционных растворов от катализаторов, изменение состава катализаторов в результате выщелачивания активных компонентов и т.д., не позволяют считать вопрос создания эффективной методики препаративного получения 2,5-ДФФ решенным.

Альтернативой традиционным системам аэробного окисления с гетерогенным катализатором является электрокаталитическое окисление. Регулирование потенциала электрода, определяющего направленность и скорость электрохимических процессов, позволяет управлять и селективностью процессов. Было показано [10], что Pt/C -катализаторы обладают более высокой селективностью в процессе электрокаталитического окисления 5-ГМФ до 2,5-ДФФ по сравнению с химическим окислением. На Pd/C , PdAu/C и Au/C в водном 0,1 М КОН растворе конверсия 5-ГМФ достигает 100 %, однако образуется в основном ФДКК с селективностью 30–70 %, а ДФФ не образуется совсем [11]. Таким образом, прямое электрокаталитическое окисление 5-ГМФ в водных растворах на благородных металлах практически не

позволяет получать ДФФ, однако работ по изучению электрохимического поведения 2,5-ДФФ и возможных причин такого результата, который зависит от кинетики процессов, проходящих на электроде, практически нет. Поэтому целью данной работы стало сравнительное исследование кинетики электрохимического окисления 5-ГМФ и 2,5-ДФФ на платиновом электроде в водной среде.

Методика эксперимента

Исследование электрохимического окисления 5-ГМФ и 2,5-ДФФ проводили в 3-электродной электрохимической ячейке с помощью потенциостата Р-30J (Elins, Россия). В качестве рабочего электрода использовалась Pt -фольга (1 см^2), вспомогательным электродом служила Pt -проволока, потенциалы электродов измеряли относительно насыщенного хлор-серебряного электрода сравнения (Ag/AgCl). Потенциодинамические измерения проводились в растворе фонового электролита: 0,5 М NaHCO_3 + 0,5 М Na_2SO_4 (pH= 8,7) при температуре $23 \pm 25^\circ \text{C}$.

Результаты и обсуждение

На рис. 1 представлены анодные участки вольтамперных кривых 5-ГМФ и 2,5-ДФФ в эквимоллярных концентрациях, на которых видно, что 5-ГМФ окисляется на Pt -электроде в кислородной области потенциалов, начиная с потенциалов выше 0,1 В. Первый пик окисления 5-ГМФ наблюдается при 0,25 В, второй – более интенсивный при 0,57 В. Можно предположить, что это связано с окислением двух разных групп – спиртовой и альдегидной. Как было показано в [12], ОН-группа 5-ГМФ начинает окисляться раньше (первый пик на рис. 1) из-за возникающего сопряжения альдегидной группы с фурановым ядром. В водном электролите альдегидные группы гидратируются с образованием гемдиола, который из-за своей неустойчивости легко дегидрируется с образованием карбоксильной группы (второй пик на рис. 1). Поэтому, как было показано в [11], основным продуктом электрохимического окисления 5-ГМФ является ФДКК. В то же время кривая окисления 2,5-ДФФ имеет только один ярко выраженный пик в области потенциалов второго пика 5-ГМФ (рис. 1), что свидетельствует о схожем механизме окисления альдегидных групп обеих молекул.

Для алифатических спиртов и альдегидов характерна очень высокая скорость окисления на платине и металлах [13], тогда как для соединений фуранового ряда – фурфурола и фурфурилового спирта – она намного ниже [14]. Относительно низкие скорости окисления 5-ГМФ на Pt/C были получены в [10] и на Pd , Au , Pd-Au , нанесенных на углеродный носитель

катализаторах [11], что подтверждается и полученными нами данными (рис. 1). Однако скорость окисления 2,5-ДФФ в ~3 раза выше скорости окисления 5-ГМФ, о чем можно судить по плотности тока соответствующих пиков на рис. 1.

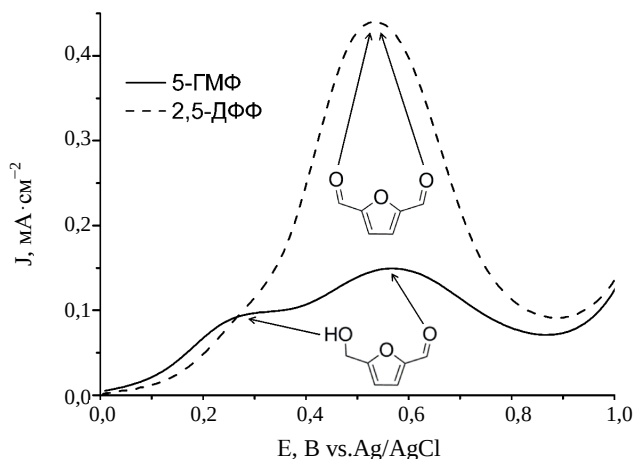


Рис. 1. Участки вольтамперных кривых Pt-электрода 0,05M 5-ГМФ и 0,05M 2,5-ДФФ в растворе фонового электролита 0,5 M NaHCO₃+0,5 M Na₂SO₄. Скорость развертки потенциала — 10 мВ/с

Высокая скорость окисления 2,5-ДФФ, по-видимому, связана с более низкой энергией активации процесса перехода электрона, вызванной эффектом сопряжения π -электронов карбонильной группы и π -электронов фуранового кольца. Такое сопряжение приводит к большей стабильности 2,5-ДФФ по сравнению с 5-ГМФ, цепь сопряжения у которого меньше, поскольку 5-ГМФ имеет только одну карбонильную группу, а 2,5-ДФФ — две.

При анализе ЦВА кривых окисления 5-ГМФ и 2,5-ДФФ, измеренных в буферном растворе (рис. 2), становится очевидно, что оба соединения адсорбируются и окисляются на Pt-электроде необратимо. О необратимой адсорбции (хемосорбции) свидетельствует снижение токов, соответствующих процессу адсорбции-десорбции водорода в области $E \leq -0,4$ В. Также снижаются токи в области реакции восстановления кислорода при $E = -0,2$ В, что характерно для соединений, необратимо адсорбирующихся на поверхности платины [13]. Взаимодействие 2,5-ДФФ с поверхностью платины более сильное, чем взаимодействие 5-ГМФ, поскольку наблюдается существенно большее снижение токов в водородной и кислородной областях. Уменьшение концентрации как 5-ГМФ (рис. 2а), так и 2,5-ДФФ (рис. 2б) приводит к увеличению пиков адсорбции и десорбции кислорода и водорода, свидетельствующих об освобождении заблокированной поверхности платины в

силу снижения количества адсорбированных на ней органических молекул.

Проведенные нами исследования в растворах с различной концентрацией реагентов показали, что скорость электроокисления 5-ГМФ и 2,5-ДФФ возрастает пропорционально логарифму концентрации реагентов (рис. 3). Порядок реакции $\left(\frac{\partial \log j}{\partial \log C}\right)_{E,v,T=const}$ составляет 0,28 и 0,42 для

5-ГМФ и 2,5-ДФФ соответственно. Дробные порядки реакции по реагентам говорят об участии в реакции частиц, адсорбированных на неоднородной поверхности электрода.

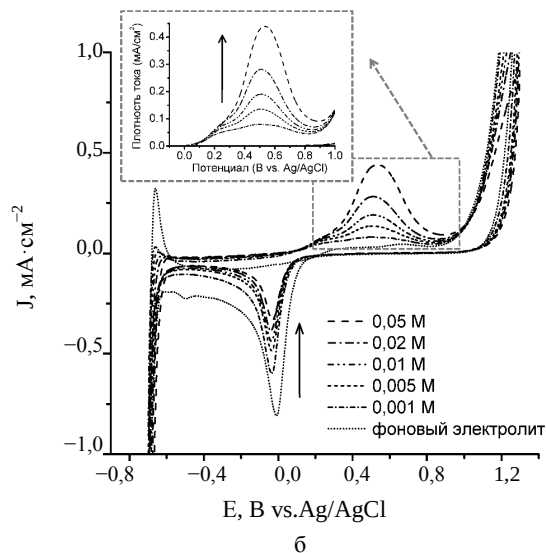
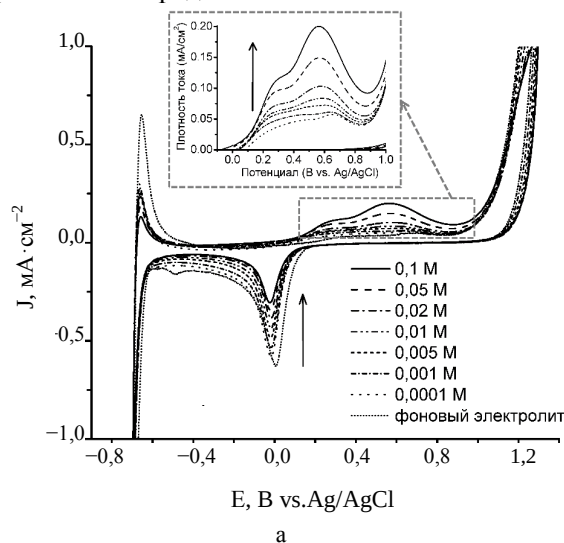


Рис. 2. Циклические вольтамперные кривые Pt-электрода в растворе фонового электролита 0,5 M NaHCO₃+ 0,4 M Na₂SO₄ с разными концентрациями: а — 5-ГМФ; б — 2,5-ДФФ. Скорость развертки потенциала — 10 мВ/с

Закключение

Таким образом, исследование особенностей электрохимического окисления 5-ГМФ и 2,5-ДФФ на платиновом электроде показало, что оба соединения окисляются в области потенциалов 0,2÷0,7 В. Логарифмические зависимости скорости окисления от концентрации и скорости изменения потенциала электрода свидетельствуют об участии в реакции адсорбированных на неоднородной поверхности электрода молекул. Поскольку скорость окисления 2,5-ДФФ значительно (~ в 3 раза) превышает скорость окисления 5-ГМФ, возможность селективного окисления 5-ГМФ до 2,5-ДФФ путем прямого электроокисления в водных растворах представляется маловероятной.

Литература

1. Tuck C.O., Pérez E., Horváth I.T., Sheldon R.A., Poliakoff M. Review. Valorization of Biomass: Deriving More Value from Waste // *Science*. 2012. № 337. P. 695–699.
2. Gallezot P. Conversion of biomass to selected chemical products // *Chem. Soc. Rev.* 2012. № 41. P. 1538–1558.
3. Putten R.-J., Waal J.C., Jong E., Rasrendra C.B., Heeres H.J., Vries J.G. Hydroxymethylfurfural, a versatile platform chemical made from renewable resources // *Chem. Rev.* 2013. № 113. P. 1499–1597.
4. Hopkins K.T., Wilson W.D., Bender B.C., McCurdy D.R., Hall J.E., Tidwell R.R., Kumar A., Bajic M., Boykin D.W. Extended aromatic furan amidinoderivatives as anti-pneumocystis cariniagents // *J. Med. Chem.* 1998. № 41. P. 3872–3878.
5. Amarasekara A.S., Green D., Williams L.D. Renewable resources based polymers: Synthesis and characterization of 2,5-diformylfuran-urea resin // *Eur. Polym. J.* 2009. № 45. P. 595–598.
6. Roman-Leshkov Yu., Barrett C.J., Liu Z.Y., Dumesic J.A. Production of dimethylfuran for liquid fuels from biomass-derived carbohydrates // *Nature*. 2007. № 447. P. 982–986.
7. Ma J., Du Z., Xu J., Chu Q., Pang Y. Efficient Aerobic Oxidation of 5-Hydroxymethylfurfural to 2,5-Diformylfuran, and Synthesis of a Fluorescent Material // *ChemSusChem*. 2011. № 4. P. 51–54.
8. Moreau C., Durand R., Pourcheron C., Tichit D. Selective oxidation of 5-hydroxymethylfurfural to 2,5-furandicarboxaldehyde in the presence of titania supported vanadia catalysts // *Stud. Surf. Sci. Catal.* 1997. № 108. P. 399–406.
9. Junfang Nie, Jiahua Xie, Haichao Liu. Efficient aerobic oxidation of 5-hydroxymethylfurfural to 2,5-diformylfuran on supported Ru catalysts // *J. of Catalysis*. 2013. № 301. P. 83–91.
10. Vuyyuru K.R., Strasser P. Oxidation of biomass derived 5-hydroxymethylfurfural using heterogeneous and electrochemical catalysis // *Catalysis Today*. 2012. № 195. P. 144–154.
11. Chadderton D.J., Xin Le, Qi Ji, Qiu Yang, Krishna Ph., More K.L., Li Wenzhen. Electrocatalytic oxidation of 5-hydroxymethylfurfural to 2,5-furandicarboxylic acid on supported Au and Pd bimetallic nanoparticles // *Green Chem.* 2014. № 16. P. 3778–3786.

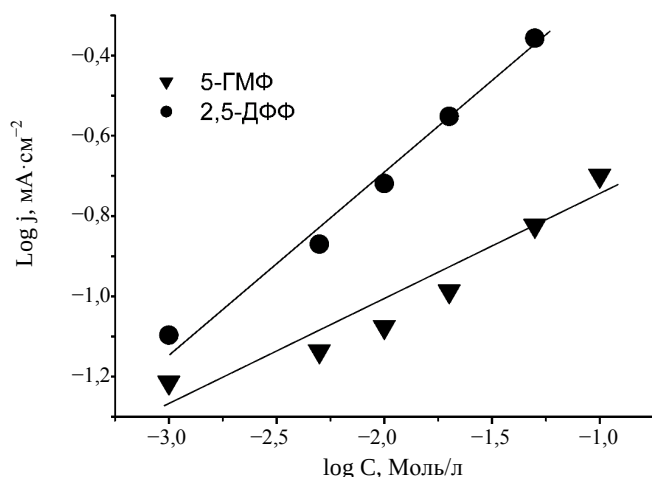


Рис. 3. Зависимость плотности тока от концентрации 5-ГМФ и 2,5-ДФФ в растворе фоновго электролита 0,5 М NaHCO₃ + 0,5 М Na₂SO₄. Скорость развертки потенциала – 10 мВ/с

Ток пика окисления обоих соединений возрастает при увеличении скорости развертки потенциала (рис. 4).

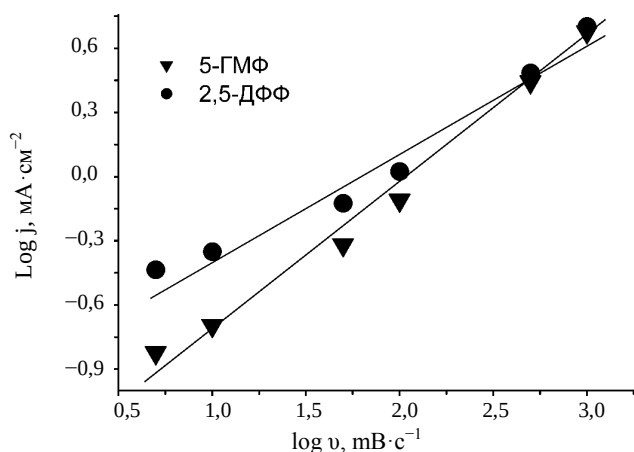


Рис. 4. Зависимость плотности тока от корня квадратного скорости развертки потенциала 0,05 М 5-ГМФ и 0,05 М 2,5-ДФФ в растворе фоновго электролита 0,5 М NaHCO₃ + 0,5 М Na₂SO₄

Линейная зависимость логарифма тока от логарифма скорости развёртки потенциала $\left(\frac{\partial \log j}{\partial \log v}\right)_{E,c,T=const}$ с наклоном 0,7 и 0,4 для 5-ГМФ

и 2,5-ДФФ соответственно позволяет предположить замедленность стадии адсорбции реагентов на поверхности платинового электрода.

12. Vinke P., H.E. van Dam, H. van Bekkum. New developments in selective oxidation, studies in surface science and catalysis. Amsterdam, 1990. P. 147–157.

13. Дамаскин Б.Б., Некрасов Л.Н., Петрий О.А., Подловченко Б.И., Стенина Е.В., Федорович Н.В. Электродные процессы в растворах органических соединений : учеб. пособие. М., 1985. 312 с.

14. Parpot P., Bettencourt A.P., Chamoulaud G., Kokoh K.B., Belgsir E.M. Electrochemical investigations of the oxidation - reduction of furfural in aqueous medium. Application to electro-synthesis // *Electrochimica Acta*. 2004. № 49. P. 397–403.

References

1. Tuck C.O., Pérez E., Horváth I.T., Sheldon R.A., Poliakoff M. Review. Valorization of Biomass: Deriving More Value from Waste. *Science*, 2012, no 337, pp. 695-699.

2. Gallezot P. Conversion of biomass to selected chemical products. *Chem. Soc. Rev.*, 2012, no 41, pp. 1538-1558.

3. Putten R.-J., Waal J.C., Jong E., Rasrendra C.B., Heeres H.J., Vries J.G. Hydroxymethylfurfural, a versatile platform chemical made from renewable resources. *Chem. Rev.*, 2013, no 113, pp. 1499-1597.

4. Hopkins K.T., Wilson W.D., Bender B.C., McCurdy D.R., Hall J.E., Tidwell R.R., Kumar A., Bajic M., Boykin D.W. Extended aromatic furan amidinoderivatives as anti-pneumocystis carinii agents. *J. Med. Chem.*, 1998, no 41, pp. 3872-3878.

5. Amarasekara A.S., Green D., Williams L.D. Renewable resources based polymers: Synthesis and characterization of 2,5-di-formylfuran-urea resin. *Eur. Polym. J.*, 2009, no 45, pp. 595-598.

6. Roman-Leshkov Yu., Barrett C.J., Liu Z.Y., Dumesic J.A. Production of dimethylfuran for liquid fuels from biomass-derived carbohydrates. *Nature*, 2007, no 447, pp. 982-986.

7. Ma J., Du Z., Xu J., Chu Q., Pang Y. Efficient Aerobic Oxidation of 5-Hydroxymethylfurfural to 2,5-Diformylfuran, and Synthesis of a Fluorescent Material. *Chem. Sus. Chem.*, 2011, no 4, pp. 51-54.

8. Moreau C., Durand R., Pourcheron C., Tichit D. Selective oxidation of 5-hydroxymethylfurfural to 2,5-furandicarboxaldehyde in the presence of titania supported vanadia catalysts. *Stud. Surf. Sci. Catal.*, 1997, no 108, pp. 399-406.

9. Junfang Nie, Jiahua Xie, Haichao Liu. Efficient aerobic oxidation of 5-hydroxymethylfurfural to 2,5-diformylfuran on supported Ru catalysts. *J. of Catalysis*, 2013, no 30, pp. 83-91.

10. Vuyyuru K.R., Strasser P. Oxidation of biomass derived 5-hydroxymethylfurfural using heterogeneous and electrochemical catalysis. *Catalysis Today*, 2012, no 195, pp. 144-154.

11. Chadderton D.J., Xin Le, Qi Ji, Qiu Yang, Krishna P. More K.L., Li W. Electrocatalytic oxidation of 5-hydroxymethylfurfural to 2,5-furandicarboxylic acid on supported Au and Pd bimetallic nanoparticles. *Green Chem.*, 2014, no 16, pp. 3778-3786.

12. Vinke P., van Dam H.E., van Bekkum H. *New developments in selective oxidation, studies in surface science and catalysis*. Amsterdam, 1990, № 55, pp. 147-157.

13. Damaskin B.B., Nekrasov L.N., Petrii O.A., Podlovchenko B.I., Stenina E.V., Fedorovich N.V. *Elektrodnye protsessy v rastvorakh organicheskikh soedinenii* [Electrode processes in solutions of organic compounds]. Tutorial. Moscow, 1985, 312 p.

14. Parpot P., Bettencourt A.P., Chamoulaud G., Kokoh K.B., Belgsir E.M. Electrochemical investigations of the oxidation-reduction of furfural in aqueous medium. Application to electro-synthesis. *Electrochimica Acta.*, 2004, no 49, pp. 397-403.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 633.81/85

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-96-100

ПРОДУКТИВНОСТЬ ПОДСОЛНЕЧНИКА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ НОРМ МИНЕРАЛЬНОГО ПИТАНИЯ

© 2015 г. В.А. Кравченко, Н.Ф. Малай, В.Г. Шурупов

Кравченко Владимир Анатольевич – главный агроном, научно-производственное предприятие «Гибрид», ул. 1-й Пятилетки, 104, п. Матвеев Курган, Ростовская обл., 346970.

Kravchenko Vladimir Anatol'evich – Chief Agronomist, Research and Production Enterprise «Hybrid», 1-ya Pyatiletka St., 104, Matveyev Kurgan, Rostov Region, 346970, Russia.

Малай Николай Федорович – кандидат сельскохозяйственных наук, руководитель научно-производственного предприятия «Гибрид», ул. 1-й Пятилетки, 104, п. Матвеев Курган, Ростовская обл., 346970.

Malai Nikolai Fedorovich – Candidate of Agricultural Science, Head of the Research and Production Enterprise «Hybrid», 1-ya Pyatiletka St., 104, Matveyev Kurgan, Rostov Region, 346970, Russia.

Шурупов Василий Георгиевич – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, заместитель директора по научной работе, Донская опытная станция им. Л.А. Жданова Всероссийского научно-исследовательского института масличных культур, ул. Жданова, 2, п. Опорный, Ростовская область, 346754, e-mail: gnudos@mail.ru

Shurupov Vasilii Georgievich – Doctor of Agricultural Science, Professor, Deputy Director, Zhdanov Don Experimental Station of the All-Russian Research Institute of Oil Crops, Zhdanov St., 2, Oporny, Rostov Region, 346754, Russia, e-mail: gnudos@mail.ru

В краткосрочных опытах проанализирована обеспеченность и потребность растений подсолнечника элементами минерального питания по периодам вегетации. Показаны продуктивность фотосинтеза, водопотребления, урожайности и качества семян в зависимости от уровня минерального питания растений в условиях недостаточного увлажнения на черноземе обыкновенном.

Ключевые слова: продуктивность, удобрения, водопотребление, фотосинтез, сорт, гибрид, минеральное питание, урожайность, качество.

At the short-term experiments the provision and demand of sunflower plants in mineral elements according to the periods of vegetation is analyzed. The photosynthetic productivity, water consumption, yield and quality of seeds, depending on the level of mineral nutrition of plants in the conditions of insufficient moisture on ordinary black soils is shown.

Keywords: productivity, fertilizers, water use, photosynthesis, variety, hybrid, mineral nutrition, yield, quality.

Подсолнечник – ведущая масличная культура в Ростовской области. Эффективное ведение отрасли растениеводства невозможно без оптимизации уровня минерального питания сельскохозяйственных культур. Это обусловлено снижением плодородия почв, отчуждением питательных веществ почвы, урожаем возделываемых культур, выведением новых сортов и гибридов, в том числе подсолнечника, генетический потенциал которого может быть реализован, прежде всего, на высоком агрофоне [1].

Реакция новых гибридов и сортов подсолнечника на уровень минерального питания пока изучена недостаточно. Не установлены научно обоснованные дозы минеральных удобрений, их влияние на динамику накопления зеленой и сухой массы растений подсолнечника в сортовом разрезе. В

связи с недостаточной изученностью их отзывчивости на уровень минерального питания в условиях приазовской зоны нами с 2011 по 2013 г. проведены исследования в этом направлении.

Важное значение имеют изучение, разработка, создание оптимальных условий минерального питания для гибридов и сортов в конкретной почвенно-климатической зоне, а также исследование состава и соотношения основных элементов питания, их влияния на урожайность и на качество семян.

Наши опыты, проведенные по изучению влияния минеральных удобрений в посевах подсолнечника, показали различное их воздействие на рост и развитие растений. Линейный прирост высоты растений гибридов и сортов на удобренных вариантах был выше, чем на контроле.

В фазе двух пар листьев удобренные варианты сортовых посевов превышали растения на контроле на 1,5–3,0 см, в фазе образования корзинки – на 6,0–11,0 см, цветения – на 4,5–10,0 см.

У гибридов превышение линейного роста растений составило 1,0–2,0 и 3,5–11,0 см соответственно. К фазе цветения растения подсолнечника достигли своего максимального роста, обусловленного биологическими особенностями.

Основным органом утилизации приходящей солнечной энергии является листовая поверхность растений.

Как показали наши исследования, формирование площади листьев одного растения проходило с постоянным увеличением от 295 (в фазе 2 пар настоящих листьев) до 3196–3990 см² (в фазе цветения). При густоте стояния подсолнечника 40 тыс. растений на гектаре общая площадь листьев у сорта составила 13,7–14,8 тыс. м²/га, у гибридов – 15,8–17,7.

В фазе налива семян площадь листьев сократилась почти вдвое. Нами отмечено, что в засушливые годы расход почвенной влаги растениями происходил более экономно. В засушливый и во влажный годы тенденция расходования влаги в определенном объеме по фенофазам сохранялась.

Большое значение на формирование урожайности подсолнечника оказывает содержание в почве доступных форм NPK и вносимых с удобрениями.

Нами установлено, что суммарная фракция гидролизующего азота характеризуется устойчивостью и мало меняется в течение вегетационного периода. Так, от фазы трех пар настоящих листьев до налива семян содержание гидролизующего азота в 2011 г. изменялось от 49 до 41; от 84 до 81 и от 90 до 95 мг/кг почвы соответственно вариантам опыта: N₄₀ P₆₀ K₄₀, N₈₀ P₁₂₀ K₈₀.

В 2012 г. – от 43 до 34; от 69 до 51; от 82 до 60 мг/кг почвы. В 2013 г. эти показатели менялись от 45 до 37; от 84 до 71 и от 94 до 73 мг/кг почвы.

Содержание нитратов в почве в течение вегетации заметно изменялось и составило в среднем: за 2011–2013 гг. – 42; 38 и 51 % от исходного их содержания соответственно по вариантам.

Анализ почвы на содержание подвижных форм фосфора показали достаточно высокое содержание его на удобренных вариантах и пониженное – на неудобренных. В течение вегетации подсолнечника количественное изменение доступного фосфора составило 23 % на неудобренных и от 25 до 36 % – на удобренных вариантах. В опытах посевы подсолнечника были обеспечены фосфорным питанием.

Обменного калия в период вегетации подсолнечника в годы исследований было достаточно на

всех вариантах опыта. Уменьшение обменного калия наблюдалось с фазы цветения и до налива семян.

Исследования по режиму потребления элементов минерального питания растениями подсолнечника (табл. 1) показали, что наибольший расход азота связан с прохождением фаз «всходы – образование корзинки» и «цветение – созревание». Самый большой расход фосфора приходился на период от всходов до образования корзинки, а калия – от всходов до цветения. На формирование одного центнера семян подсолнечник расходовал в среднем: азота – 5, фосфора – 1,5, калия – 12 кг.

Таблица 1

Потребление подсолнечником элементов питания по периодам вегетации, %

Периоды вегетации	Азот (N)	Фосфор (P ₂ O ₅)	Калий (K ₂ O)
Всходы – образование корзинки	38,9	52,8	53,2
Образование корзинки – цветение	17,5	27,7	38,7
Цветение – созревание	43,6	19,5	8,1

Таблица 1 показывает, что от всходов до цветения растения подсолнечника потребляют около 60 % азота, 80 % фосфора и более 90 % калия. На первых этапах развития подсолнечника снабжение фосфором имеет важное значение для роста и развития растений, а в конечном счете способствует формированию высоких урожаев семян.

Продуктивность растения является результатом взаимодействия корневой системы и вегетативных надземных органов. Определяющими результативность этого процесса являются площадь листовой поверхности и уровень минерального питания, которые влияют на продуктивность фотосинтеза, а в итоге – продуктивность культуры. Наряду с листьями значительный вклад в потенциал растений вносят стебли и плодозеленые.

Нашими исследованиями было установлено, что на неудобренных вариантах сортовых посевов фотосинтетический потенциал составил от 1671 до 1859 тыс. м²·сут/га, у гибридных – от 1817 до 1897. На удобренных вариантах сортовых посевов фотосинтетический потенциал изменялся от 1787 до 1945 тыс. м²·сут/га, на гибридных посевах – от 1993 до 2135.

Более высокий фотосинтетический потенциал у сорта и гибридов подсолнечника отмечен на варианте N₈₀ P₁₂₀ K₈₀. У сортовых и гибридных посевов фотосинтетический потенциал выражался значениями одного порядка. Однако у сорта на удобренном варианте N₄₀ P₆₀ K₄₀ увеличение фотосинтетического потенциала составило 15–21 %, на вариан-

те $N_{80} P_{120} K_{80}$ – 26–48, у гибридов – 15–26 и 25–40 %.

Наши исследования показали, что накопление сухой биомассы у изучаемых сортов и гибридов происходило в вышеуказанной последовательности. В фазе завязывания корзинки накопление биомассы было незначительным, изменялось в пределах от 0,45 до 0,92 т/га у сорта и 0,57–0,81 т/га у гибрида и увеличивалось на удобренных вариантах.

В фазе образования корзинки накопление сухой биомассы на контроле находилось в пределах 0,9–0,95 т/га, на удобренных вариантах по сортам – в пределах 0,7–1,5 т/га, по гибридам – 1,1–1,14 и 1,15–1,55 т/га соответственно вариантам опыта.

В период налива семян содержание сухой биомассы было максимальным. Оно составило 5,45–6,1 т/га на контроле и 7,7–5,9 т/га – на удобренных вариантах. На гибридных посевах накопление сухой биомассы на контроле составило 5,8–6,4 т/га.

Продуктивность фотосинтеза является важным показателем фотосинтетической деятельности растений (количество органической биомассы, создаваемой посевами в течение суток на 1 м² площади листьев).

Наши исследования показали, что чистая продуктивность фотосинтеза подсолнечника изменялась от 3,71 до 7,99 г/м² за сутки на вариантах без удобрений на сортах. У гибридов – 5,85–8,9 г/м² в сутки. У сортов на удобренных вариантах продуктивность фотосинтеза изменялась в пределах 5,41–17,39 и 6,4–14,35 – у гибридов. Чистая фотосинтетическая продуктивность в фазе «бутонизация – цветение растений» достигала наибольших значений. В фазе налива семян чистая продуктивность посевов снижалась в 1,5–2 раза. Максимальная продуктивность фотосинтеза была у сортов Донской 60 и Лидер в фазе «бутонизация – цветение растений» (7,4 и 7,99 г/м² в сутки соответственно). Большей она была при внесении $N_{40} P_{60} K_{40}$ и 16,8–17,39 г/м² в сутки – при дозе удобрений до $N_{80} P_{120} K_{80}$.

Интенсивность чистой продуктивности фотосинтеза гибридных растений в этой же фазе и в фазе «цветение – налив семян» была несколько ниже. Мы объясняем это несовпадением календарных сроков вегетации сортов и гибридов. Видимо, гибриды проходили эти фазы несколько раньше, чем сорта, и пик наибольшей интенсивности чистой продуктивности фотосинтеза уже завершался.

В фазах «вторая пара настоящих листьев – образование корзинки» преимущество гибридов по интенсивности чистой продуктивности фотосинтеза было очевидным.

Среди факторов, определяющих продуктивность подсолнечника, главным является наличие влаги в почве.

Очень важным является оптимизация режима её рационального использования, что обеспечивает наряду с агротехническими факторами правильный научно обоснованный выбор гибридов и сортов, а также оптимизацию режима питания, с помощью которого влага используется по назначению, т.е. на производство основной продукции [2, 3].

В засушливых условиях приазовской зоны Ростовской области важной является реакция сортов и гибридов подсолнечника на запасы влаги в посевах и приемы агротехники. Так, в среднем за три года (2011–2013 гг.) расход воды на формирование 1 т семян на удобренных вариантах был меньше, чем на контроле. При возделывании подсолнечника сорта Донской 60 на фоне без удобрений на каждую тонну семян расходовалось 1972 м³ влаги, при внесении $N_{40} P_{60} K_{40}$ – 1759 м³. Увеличение дозы удобрений до $N_{80} P_{120} K_{80}$ снижало расход влаги на 1 т семян до 1723 м³. Близкие показатели имели место в посевах сорта Лидер.

Аналогичные по количественным показателям данные наблюдались в посевах гибридов. Однако гибрид Гарант при большей урожайности на тонну семян расходовал меньше влаги без удобрений – 1860, с их внесением – 1671 и 1597 м³.

Влияние минеральных удобрений на условия произрастания подсолнечника в значительной степени определяется их количественным и качественным составом, а также соотношением питательных веществ [2, 3].

Эффективность минеральных удобрений зависит и от отзывчивости на них различных сортов и гибридов подсолнечника. Наши исследования показали, что изучаемые в опытах сорта и гибриды по-разному реагировали на одни и те же удобрения (табл. 2).

Наши исследования показали, что минеральные удобрения способствовали улучшению пищевого режима почвы, давали прибавку урожая семян подсолнечника; растения более энергично росли и развивались.

Так, например, заметно разнятся прибавки урожая на внесение двойной дозы удобрений у сортов Донской 60 и Лидер. Первый повысил урожайность на 14 %, второй – на 16. Среди гибридов наибольшая прибавка урожайности на дозах $N_{40} P_{60} K_{40}$ и $N_{80} P_{120} K_{80}$ была в посевах гибрида Сигнал (10 и 20 % соответственно).

Наши опыты и практика показали, что неэффективно вносить минеральные удобрения весной вразброс под культивацию или боронование зяби.

Таблица 2

Влияние основного внесения минеральных удобрений на урожайность семян сортов и гибридов подсолнечника, т/га

Варианты опыта	Урожай семян по годам				Прибавка к контролю	
	2011	2012	2013	среднее	т/га	%
Сорт Донской 60						
Без удобрений (контроль)	1,60	1,64	1,69	1,64	–	100
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀	1,75	1,84	1,87	1,82	+0,18	110,9
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀	1,90	1,87	1,89	1,88	+0,24	114,6
Сорт Лидер						
Без удобрений (контроль)	1,73	1,64	1,72	1,69	–	
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀	1,99	1,87	1,85	1,90	+0,21	112,4
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀	2,14	1,93	2,08	2,05	+0,36	121,0
Гибрид Сигнал						
Без удобрений (контроль)	1,71	1,65	1,69	1,68	–	
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀	1,97	1,76	1,81	1,84	+0,16	109,5
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀	2,12	1,87	1,99	1,99	+0,31	118,4
Гибрид Гарант						
Без удобрений (контроль)	1,84	1,77	1,86	1,82	-	
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀	2,06	1,92	1,98	1,99	+0,17	109,3
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀	2,15	2,03	2,04	2,07	+0,25	113,7
Гибрид Мечта						
Без удобрений (контроль)	1,77	1,55	1,66	1,66	-	
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀	1,91	1,58	1,73	1,74	+0,08	104,8
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀	1,99	1,96	1,80	1,91	+0,25	115,0

При этом способе внесения до 75 % удобрений располагается в верхнем слое (0–4 см) почвы, а 75–90 % – в быстропересыхающем слое 0–5 см. Такой способ внесения удобрений неприемлем для культуры подсолнечника, так как семена его заделываются на глубину 7–8 см. Этот прием в приазовской зоне в засушливые годы не повышал продуктивность этой культуры.

Полученные результаты свидетельствуют не только о проявлении биологических особенностей гибридов и сортов подсолнечника. Существенное значение при формировании урожайности имеют природные факторы. К таковым следует отнести низкую обеспеченность фосфором, недостаточный и нестабильный уровень влагообеспеченности, проявление экологических и ландшафтных особенностей.

По-разному изменялось и качество семян подсолнечника, которое зависело от многих факторов, в том числе от погодных условий, складывающихся в период вегетации растений, доз, сроков и способов внесения удобрений, влагообеспеченности подсолнечника в период роста и развития растений (табл. 3).

В среднем за три года масличность семян у сорта и гибридов составила 49,8–51,7 %. Сбор масла получен в соответствии с урожаем семян 1,16–1,27 т/га у сортов и 1,13–1,33 т/га – у гибридов. При внесении минеральных удобрений масса 1000 семян сортов колебалась от 0,1–0,5 %, гибридов – 0,1–0,3 %.

Наши опыты с минеральными удобрениями также показали, что высокие дозы азотно-фос-

Таблица 3

Влияние основного внесения минеральных удобрений на качество семян подсолнечника и сбор масла (среднее 2011–2013 гг.)

Фон удобрений	Сорт, гибрид	Масса 1000 семян, г	Лужистость семян, %	Содержание масла в абсолютно сухой семанке, %	Сбор масла, т/га
Без удобрений (контроль)	Донской 60	74,7	23,9	51,2	1,16
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀		75,4	23,1	51,6	1,20
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀		75,5	23,3	51,7	1,24
Без удобрений (контроль)	Лидер	75,9	23,2	50,8	1,18
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀		76,1	23,1	50,8	1,20
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀		76,9	23,1	51,0	1,27
Без удобрений (контроль)	Гарант	61,9	23,2	50,5	1,22
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀		62,4	23,1	50,9	1,26
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀		62,6	22,8	50,8	1,33
Без удобрений (контроль)	Мечта	60,0	23,8	51,0	1,13
N ₄₀ P ₆₀ K ₄₀		60,3	23,6	49,8	1,18
N ₈₀ P ₁₂₀ K ₈₀		60,8	23,5	50,4	1,24

формных удобрений $N_{180} P_{240}$ заметно повышали содержание в семенах фосфора и азота. Эти семена имели высокую всхожесть (97–98 %) и энергию прорастания. При этом выход семян составлял 70–75 % с хорошей выполненностью и выравненностью.

Увеличение содержания фосфора и азота в семенах ускоряет прорастание семян, увеличивает начальный рост, что в дальнейшем положительно сказывается на росте и развитии растений, а в итоге дает более высокий урожай в потомстве, обеспечивая на товарных посевах прибавку урожая 0,16–0,25 т/га [2].

Высокие дозы минеральных удобрений на семеноводческих посевах дают возможность с высоким экономическим эффектом использовать удобрения.

Литература

1. Пустовойт В.С. Избранные труды. М., 1990. 366 с.
2. Белевцев Д.Н. Агротехника масличных культур : сб. науч. тр. Краснодар, 1983. С. 34–42.
3. Васильев Д.С. Подсолнечник. М., 1990. 174 с.

References

1. Pustovoit V.S. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow, 1990, 366 p.
2. Belevtsev D.N. *Agrotehnika maslichnykh kul'tur* [Farming oilseeds]: collection of scientific papers. Krasnodar, 1983, pp. 34-42.
3. Vasil'ev D.S. *Podsolnechnik* [Sunflower]. Moscow, 1990, 174 p.

Поступила в редакцию

3 февраля 2015 г.

ВЛИЯНИЕ ГУСТОТЫ СТОЯНИЯ РАСТЕНИЙ НА ПРОДУКТИВНОСТЬ ПОДСОЛНЕЧНИКА

© 2015 г. Е.В. Луданова Е.В., Н.Ф. Малай, В.Г. Шурупов

Луданова Елена Владимировна – агроном, научно-производственного предприятия «Гибрид», ул. 1-й Пятилетки, 104, п. Матвеев Курган, Ростовская обл., 346970.

Ludanova Elena Vladimirovna – Agronomist, Research and Production Enterprise «Hybrid», 1-ya Pyatiletka St., 104, Matveyev Kurgan, Rostov Region, 346970, Russia.

Малай Николай Федорович – кандидат сельскохозяйственных наук, руководитель научно-производственного предприятия «Гибрид», ул. 1-й Пятилетки, 104, п. Матвеев Курган, Ростовская обл., 346970.

Malai Nikolai Fedorovich – Candidate of Agricultural Science, Head of the Research and Production Enterprise «Hybrid», 1-ya Pyatiletka St., 104, Matveyev Kurgan, Rostov Region, 346970, Russia.

Шурупов Василий Георгиевич – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, заместитель директора по научной работе, Донская опытная станция им. Л.А. Жданова Всероссийского научно-исследовательского института масличных культур, ул. Жданова, 2, п. Опорный, Ростовская область, 346754, e-mail: gnu-dos@mail.ru

Shurupov Vasilii Georgievich – Doctor of Agricultural Science, Professor, Deputy Director, Zhdanov Don Experimental Station of the All-Russian Research Institute of Oil Crops, Zhdanov St., 2, Oporny, Rostov Region, 346754, Russia, e-mail: gnu-dos@mail.ru

Рассматривается влияние густоты стояния растений на продуктивность подсолнечника (продуктивная площадь корзинки, количество семян в корзинке, масса семян одной корзинки, масса 1000 семян, выполненность семян, урожайность, сбор масла с гектара). Исследования проводились с целью изучения реакции гибридов и сорта на густоту стояния растений в приазовской почвенно-климатической зоне на черноземе обыкновенном.

Ключевые слова: продуктивность, подсолнечник, густота стояния растений, корзинка, сорт, гибрид, выполненность, семена, масса, урожайность, масличность.

The author considers the influence of plant density on the productivity of sunflower (productive part of the basket, the number of seeds in a basket, a basket of seed weight, weight of 1000 seeds, quality of seeds, yield, and oil quantity per hectare). The research was carried out to study the reaction of hybrids and sort to plant density in the Azov soil-climatic zone on ordinary black soil.

Keywords: productivity, sunflower, plant density, basket, variety, hybrid, quality, seed, weight, yield, oil content.

Подсолнечник – основная масличная культура на Дону. В Ростовской области под ней ежегодно занято 500–550 тыс. га, или 10–12 % пашни. Одним из условий, определяющих продуктивность подсолнечника, является оптимальная густота стояния растений на единице площади. Важный приём возделывания подсолнечника – изучение количества растений на единице площади. Оптимальная густота стояния растений может быть разной в зависимости от сорта, гибрида, почвенно-климатической зоны, погодных условий и прежде всего влагообеспеченности.

Оптимальной является такая густота, при которой обеспечиваются не только нормальное развитие каждого растения, но и получение возможно высокого урожая с единицы площади [1–3]. По обобщенным данным [3], наиболее высокая урожайность семян подсолнечника формируется при площади питания одного растения 0,17–0,20 м² (50–60 тыс. шт/га) в условиях оптимальной температуры и при достаточном увлажнении, а при недостатке влаги в почве – при площади питания од-

ного растения 0,20–0,25 м² (40–50 тыс. шт/га). Уменьшение густоты стояния до 20 тыс. шт/га, равно как и её увеличение до 60–80 тыс. шт/га, приводило к снижению масличности на 2,3 и 2,9 % соответственно.

Площадь питания подсолнечника влияет непосредственно на всю продуктивность не только отдельных растений, но и всего посева. Загущение посевов приводит к недобору урожая семян, особенно в условиях недостаточного увлажнения.

Гибриды в большей мере, чем сорта, выдерживают загущение посевов против оптимального на 5–8 тыс/га (10–15 %). При этом они в меньшей мере снижают урожайность, чем сорта, или сохраняют её на уровне оптимальной [2].

Чрезмерное загущение посевов, а это часто наблюдается в производстве, ведет к резкому снижению урожайности подсолнечника (на 0,3–0,5 т/га и более) [1].

Наши исследования показали, что изучение оптимизации густоты стояния растений подсолнечника, особенно в зоне недостаточного увлажнения,

является актуальным вопросом, прежде всего с появлением новых гибридов и сортов.

Важным приемом в системе агротехнических мероприятий по возделыванию подсолнечника являются изучение и обоснование оптимального количества растений на единицу площади. Эти исследования необходимы для каждого сорта и гибрида, так как их индивидуальные особенности значительны и несоблюдение их может привести к огромным потерям урожая. В краткосрочных опытах, заложенных в приазовской зоне, мы изучали влияние густоты посева на продуктивность гибридов и сорта.

Наши исследования показали, что густота стояния растений в посеве является одним из важных факторов, определяющих продуктивность подсолнечника, в том числе структуру урожая (табл. 1).

Таблица 1

Продуктивная площадь корзинки сорта и гибридов в зависимости от густоты стояния растений, см² (среднее 2011–2013 гг.)

Сорт, гибрид	Густота стояния растений, тыс.шт/га				
	20	30	40	50	60
Донской 60	345	276	236	208	169
Мечта	335	289	269	213	170
Престиж	357	289	270	218	177

Таблица 1 показывает, что у гибридов при посеве 20 и 30 тыс. шт/га растений разница в продуктивной площади корзинки колебалась в пределах 7 %, у сорта – 5 %. При посеве растений 40÷50 тыс/га разница между гибридами нивелируется, но возрастает по сравнению с сортом. С увеличением нормы посева растений до 60 тыс/га наблюдалось снижение продуктивной площади корзинки у гибридов и сорта.

У сорта по сравнению с гибридами при увеличении нормы посева снижение продуктивной озёрнённости корзинки происходило быстрее и составило при посеве растений 50 тыс/га – 60 %, при 60 тыс. шт/га – 49 %. В 2011 и 2013 гг. продуктивная площадь корзинки у гибридов и сорта при изучаемых густотах была практически одинаковой, в засушливых условиях вегетационного периода 2012 г. – на 45 % меньше.

В зависимости от густоты стояния растений изменялось и количество семян в корзинке (табл. 2). Оно было пропорционально размерам её продуктивной площади и обратно пропорционально густоте стояния растений. Из табл. 2 видно, что количество семян в корзинке зависело от размеров её продуктивной площади. При увеличении густоты стояния растений подсолнечника количество семян в корзинке у гибридов и сорта снижалось. У сорта и гибридов количество семян в корзинке в среднем по

всем густотам стояния растений разнилось незначительно. В засушливых условиях лета 2012 г. количество семян в корзинке у гибридов и сорта было значительно меньше, чем в 2011 и 2013 гг.

Таблица 2

Количество семян в корзинке у сорта и гибридов под воздействием густоты стояния растений, шт. (среднее 2011–2013 гг.)

Сорт, гибрид	Густота стояния растений, тыс.шт/га				
	20	30	40	50	60
Донской 60	1810	1611	1551	1280	1153
Мечта	1751	1572	1427	1265	1134
Престиж	1851	1681	1522	1269	1203

Аналогичная взаимосвязь была выявлена и в отношении массы семян, сформированных в одной корзинке (табл. 3).

Таблица 3

Масса семян с одной корзинки в зависимости от густоты стояния растений, г (среднее 2011–2013 гг.)

Сорт, гибрид	Густота стояния растений, тыс.шт/га				
	20	30	40	50	60
Донской 60	81,1	79,6	66,9	57,4	44,8
Мечта	96,5	72,7	65,4	54,7	50,4
Престиж	96,8	73,8	60,8	54,0	47,2

По мере увеличения густоты посева масса семян с одной корзинки по сорту и гибридам уменьшалась. Вместе с тем выявились и сортовые особенности растений. При увеличении нормы посева от 20 до 60 тыс/га масса семян в одной корзинке уменьшалась у сорта в 1,8 раза, у гибридов – в 1,7 ÷ 1,9 раза.

Характеризующим показателем качества семян подсолнечника является масса 1000 семян (табл. 4).

Таблица 4

Масса 1000 семян у сорта и гибридов подсолнечника в зависимости от густоты стояния растений, г (среднее 2011–2013 гг.)

Сорт, гибрид	Густота стояния растений, тыс.шт/га				
	20	30	40	50	60
Донской 60	66,7	60,2	57,5	55,8	53,2
Мечта	53,8	51,6	47,5	46,9	44,0
Престиж	56,9	53,4	52,2	51,6	47,4

Чем выше показатель массы 1000 семян, тем крупнее семена, тем плотнее их внутренняя структура, тем больше содержание питательных веществ и масла.

Таблица 4 показывает, что масса 1000 семян также зависела от густоты стояния растений. Чем гуще посевы, тем меньше масса 1000 семян. Наиболее высокой она была при густоте стояния растений 20 тыс. шт/га и составила у сорта 66,7 г, у гибридов – 53,8 и 56,9 г соответственно.

Повышение загущенности растений подсолнечника в посеве заметно влияло на выполненность семян (табл. 5).

Таблица 5

Выполненность семян у сорта и гибридов подсолнечника в зависимости от густоты стояния растений, % (среднее 2011–2013 гг.)

Сорт, гибрид	Густота стояния растений, тыс.шт/га				
	20	30	40	50	60
Донской 60	89,7	88,1	87,5	83,0	81,1
Мечта	88,1	87,3	86,0	85,1	83,4
Престиж	86,5	85,3	85,1	83,4	80,2

Полученные результаты выполненности семян подсолнечника в зависимости от густоты стояния растений по сути являются итоговым показателем эффективности агротехнических приемов при возделывании этой культуры. Из табл. 5 видно, что при увеличении густоты стояния растений от 20 тыс. шт/га до 40÷50 показатели выполненности семян у сорта и гибридов были близкими, а при увеличении до 60 тыс. шт/га выполненность уменьшалась как у гибридов, так и у сорта.

Таким образом, показатели структуры урожая подсолнечника зависели от густоты стояния растений, биологических особенностей сорта и гибридов, а также влагообеспеченности.

Полученные нами результаты по влиянию густоты стояния растений на элементы продуктивности подсолнечника представляют научный и практический интерес, так как они в конечном итоге способствуют повышению урожайности культуры (табл. 6).

Таблица 6

Урожайность семян сорта и гибридов в зависимости от густоты стояния растений, т/га (среднее 2011–2013 гг.)

Сорт, гибрид, фактор	Густота стояния растений, тыс.шт/га				
	20	30	40	50	60
Донской 60	2,16	2,20	2,28	2,26	2,16
Мечта	2,29	2,52	2,59	2,67	2,63
Престиж	2,35	2,66	2,72	2,79	2,77
НСР _{0,05} , т/га	2011	2012	2013		
А	0,02	0,03	0,07		
В	0,03	0,04	0,08		

Результаты, полученные нами, показывают, что гибриды превосходили сорт по урожайности. Так, гибрид Престиж при 50 тыс. растений на гектар дал урожай семян за годы исследований 2,79 т/га, гибрид Мечта при такой же густоте – 2,67 т/га, сорт

Донской 60 при густоте стояния 40 тыс./га – 2,28 т/га.

В наших опытах густота стояния растений слабо влияла на масличность семян изучаемых гибридов и сорта. Сбор масла с гектара у сорта и гибридов соответствовал величине их урожайности (табл. 7).

Таблица 7

Сбор масла у сорта и гибридов подсолнечника при различной густоте стояния растений, т/га (среднее 2011–2013 гг.)

Сорт, гибрид	Густота стояния растений, тыс.шт/га				
	20	30	40	50	60
Донской 60	1,05	1,07	1,11	1,10	1,04
Мечта	1,12	1,23	1,27	1,31	1,27
Престиж	1,15	1,30	1,35	1,39	1,36

Таким образом, при изучении различной густоты стояния растений подсолнечника в посеве с увеличением количества растений на единицу площади продуктивность отдельно взятого растения и сорта, и гибридов снижалась. Это относится к таким элементам структуры урожая, как продуктивная площадь корзинки, количество семян и их масса, масса 1000 семян, выполненность семян, урожайность, сбор масла с гектара.

Наши исследования показали, что для получения наивысшей продуктивности подсолнечника с гектара необходимо более точно подходить к определению густоты стояния растений, при которой порог снижения продуктивности отдельного растения не превышал бы продуктивность всего агрофитоценоза. В наших опытах это достигалось при посеве сорта Донской 60 ÷ 40 тыс. шт/га, гибридов Мечта и Престиж – 50 тыс. шт/га.

Литература

1. Белевцев Д.Н. Агротехника масличных культур. Краснодар, 1983. С. 34–42.
2. Васильев Д.С. Агротехника подсолнечника. М., 1983. 195 с.
3. Пустовойт В.С. Избранные труды. М., 1990. 366 с.

References

1. Belevtsev D.N. *Agrotehnika maslichnykh kul'tur* [Farming oilseeds]: collection of scientific papers. Krasnodar, 1983, pp. 34–42.
2. Vasil'ev D.S. *Agrotehnika podsolnechnika* [Farming Sunflower]. Moscow, 1983. 195 p.
3. Pustovoyt V.S. *Izbrannye trudy* [Selected works]. Moscow, 1990, 366 p.

СИТУАЦИЯ С КРАСНЫМИ КНИГАМИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ И РЕГИОНОВ

© 2015 г. В.А. Миноранский

Миноранский Виктор Аркадьевич – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, кафедра зоологии, Южный федеральный университет, ул. Б. Садовая, 105/42, г. Ростов н/Д, 344006; председатель ассоциации «Живая природа степи», ул. Тельмана, 10, г. Ростов н/Д, 344011, e-mail: eco@aanet.ru

Minoranskii Viktor Arkad'evich – Doctor of Agricultural Science, Professor, Zoology Department, Southern Federal University, B. Sadovaya St., 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia; Head of the Association «Living Steppe Nature», Telman St., 10, Rostov-on-Don, 344011, Russia, e-mail: eco@aanet.ru

Красные книги являются одним из приемов сохранения исчезающих растений и животных. Под влиянием различных причин современное их ведение претерпело ряд изменений. В статье дается критический анализ новых Красных книг.

Ключевые слова: Красная книга, редкие и исчезающие виды, их выявление и оценка, уровень знаний, эффективность, совершенствование.

Red Books are very important in preserving declining species of plants and animals. Under the influence of different reasons these books have changed by now. This article contains critical analysis of new Red Books.

Keywords: the Red Book, declining species of plants and animals, detection and estimation, standard of knowledge, effectiveness, perfection.

Комиссия по исчезающим видам растений и животным была организована в 1948 г. при Международном союзе охраны природы (МСОП). С этого времени начинается всемирная перепись исчезающих организмов, подготовившая Красные книги (далее КК). В СССР первую КК учредили в 1974 г., а выпустили в 1978 г. В регионах эти работы возглавили отделения Всероссийского общества охраны природы. Для выявления исчезающих видов растений и животных ежегодно организовывались многочисленные экспедиции по изучению местной флоры и фауны. К ним привлекались ведущие ученые и специалисты АН СССР, вузов, НИИ и других структур, деятельность которых основывалась на международных достижениях по данной проблеме. Вышли первые КК республик. С 90-х гг. появились КК регионов, были разработаны их законодательные и правовые основы. Проблемы составления этих книг обсуждались на многочисленных конференциях различного уровня, в печати.

Составление и выпуск КК является одним из приемов сохранения биоразнообразия среди многочисленных природоохранных мероприятий. Нередко КК объявляют самым важным приемом, панацеей охраны природы, что неверно. Более важными и эффективными для биоразнообразия и его ресурсов являются территориальная охрана (особо охраняемые природные территории (ООПТ), экологические сети (ЭС) и др.), совершенствование законодательной и нормативной базы сохранения и использования ресурсов живой природы, исчезающих и редких видов организмов.

К настоящему времени во многих регионах вышли новые (2-е, 3-е) издания КК. Жаркие споры о подготовке и ведении этих книг, имевшие место ранее, практически прекратились, и лишь изредка, преимущественно в Интернете, появляются критические анализы отдельных работ. Их выпуск финансируется из региональных бюджетов, обычно они имеют дорогостоящее оформление. К сожалению, их качество, полезность для охраны природы во многих случаях не улучшились, а в ряде случаев снизились. Подходы и принципы составления КК по регионам заметно отличаются. Причин этому много, в том числе снижение уровня научных исследований по сохранению редких видов, недостаточная подготовка специалистов в вузах, коммерциализация научной и практической деятельности, ряд других. Нарушения по ведению КК начинаются с Минприроды РФ. Постановление Правительства РФ от 19.02.1996 г. № 158 обязывает издавать КК не реже одного раза в 10 лет, а после выхода последней КК РФ (животные) прошло уже 14 лет. Это нарушение ведет к срывам сроков выпуска КК регионов. За прошедший период после выхода первых книг международные подходы и критерии к оценкам состояния видов совершенствовались, а авторы ряда наших региональных КК даже не знают о существовании КК.

Основная задача КК – выявление и изучение исчезающих видов, разработка приемов по их сохранению и ведение мониторинга. В первых КК давались сведения об исторических изменениях в распространении и численности отдельных видов, на основании полевых обследований самими авто-

рами приводились районы их обитания, причины сокращения количества, давалась современная оценка этих показателей и рекомендовались мероприятия по охране данных видов.

В повторных изданиях КК должны приводиться данные по изменению этих показателей в последние 10 лет под влиянием рекомендуемых ранее в КК мер по сохранению и восстановлению видов, происшедшей в данный период трансформации в экосистемах. Эти материалы необходимы для выяснения эффективности рекомендованных ранее мероприятий по сохранению отдельных видов. При отсутствии данной эффективности устанавливаются причины, разрабатываются и рекомендуются дополнительные или новые приемы сохранения. Без этих материалов КК теряет свое основное назначение. К сожалению, в ряде КК авторы об этом забывают и повторяют материалы первых книг, включая приводимую в 1-м издании КК историю видов.

Используемое ранее неоднократное предварительное обследование основных экосистем регионов на выявление отдельных видов рядом авторов игнорируется. Некоторые авторы описывают растения и животных региона, не познакомившись с его живой природой или совершив несколько кратковременных поездок в отдельные пункты. Многие очерки видов переписываются из предыдущих изданий, нередко даже без ссылок на первоисточники. Переписываются прежние меры охраны видов без критического анализа их эффективности за прошедшее десятилетие. Ряд видов, имевшихся в предыдущих книгах, без необходимых в данном случае исследований территорий, анализа фактического материала и должного обоснования из новых изданий исключен, хотя численность и распространение их за 10 лет сократились. Появление в регионах новых специалистов-систематиков по отдельным группам животных приводит к включению в переиздаваемые КК новых видов по единичным находкам.

КК предназначены для широких слоев населения, прежде всего для школьников, студентов, учителей, преподавателей вузов, работников природоохранных и природоиспользующих структур. Эти книги играют важную роль в экологическом просвещении населения, формировании у него экологического мышления. К сожалению, в современном виде практическая эффективность КК сильно снижается. Если видовая принадлежность большинства позвоночных широким слоям населения известна или может быть относительно легко установлена (с помощью учителей, преподавателей, сотрудников Минприроды и других структур, популярных определителей), то у беспозвоночных с определе-

нием имеются большие трудности, и во многих случаях они непреодолимы. Доступны для выявления видовой принадлежности беспозвоночные крупных и средних размеров, и именно они были представлены в первых КК.

В переиздаваемых КК нередко описания беспозвоночных делают систематики, забывая, что книга предназначена для учащихся, специалистов по сохранению биоразнообразия (охране природы), а не для систематиков. В них авторы включают большое количество видов насекомых, моллюсков и других групп размерами 2÷10 мм, видовую принадлежность которых могут определить только единичные узкие специалисты по данной группе региона или страны. Систематики порой включают в КК даже ими описанные новые виды, которые нередко, кроме них, никому не известны. В каждом регионе 1/3÷1/2 часть видов беспозвоночных остается неизвестной даже ученым (тысячи мелких видов), и при таком подходе будущее КК печально.

Наполнение КК подобными видами ведет к утрате основной роли этих книг – сохранению исчезающих организмов. Так, при составлении проектов различных мероприятий по использованию природных ресурсов (вылов рыбы, рубка лесов, строительство зданий, портов и стадионов, трубопроводов и т.д.) обязательно разрабатывается ОВОС (оценка воздействия на окружающую среду), где особое внимание уделяется видам из КК. Невозможность установления видовой принадлежности мелких форм из-за отсутствия или недостаточной квалификации специалистов среди членов экспертных комиссий в соответствующих государственных организациях, а порой и в регионах приводит к тому, что они исключаются из ОВОС, а материальная незаинтересованность заказчиков в выявлении краснокнижных видов нередко приводит к полному игнорированию всех видов, включенных в КК регионов и РФ, и объективной оценки условий их существования. Такие подходы негативно сказываются на природных ресурсах и отмеченных видах, ведут к потере государством больших денег и недостаточному финансированию природоохранных мероприятий. Они приводят к применению различных обходных способов при оценке и согласовании ОВОС, содействуют коррупции. Игнорирование видов из КК в хозяйственной деятельности негативно отражается на общественном сознании и формировании экологического мышления у молодежи. Это только один из негативных факторов при современных подходах к составлению КК.

В первых КК имелись аннотированные перечни таксонов и популяций фауны, исчезнувшие в регионах и РФ. В ряде переизданных КК такие пе-

речни отсутствуют. Эти материалы важны при решении вопросов реакклиматизации видов. В ряде КК исключена часть залетающих или проникающих в регионы исчезающих видов, включенных в КК РФ. Широкая общественность знакома с региональными КК, но редко использует КК РФ. Все виды, включенные в КК РФ, должны входить в региональные КК (в случаях их здесь нахождения).

Сроки для включения видов в КК определяются для беспозвоночных (100 лет) и позвоночных (50). К сожалению, авторы, составляющие некоторые региональные книги, недостаточно знакомы с научными публикациями за этот период, коллекции животных в научных центрах, и ряд видов они незаслуженно исключают из региональных КК. Однако эти виды представляют интерес в связи с происходящими в природе изменениями и возможностями их повторного появления, при оценке возможности интродукции и в других случаях. Кроме того, изученность фауны регионов остается недостаточной. Приходится сталкиваться с фактами, когда отдельные виды насекомых несколько десятков лет назад находились специалистами в регионе,

приводились в литературе, имеются в коллекциях, а позднее не исследовались и были обнаружены лишь в последнее десятилетие. Некоторые современные авторы называют себя их первооткрывателями.

Современный подход к подготовке КК регионов нуждается в переоценке, использовании богатого опыта составления КК, других стран. В КК регионов целесообразно включать достаточно крупные, широко известные или доступные для установления видовой принадлежности организмы. Сохранение или создание условий их существования положительно отразится если не на всех, то на многих мелких видах. Заслуживают внимания и мелкие мало- и неизвестные беспозвоночные. Для них целесообразно составлять региональные КК в Интернете или давать в приложениях КК. Они будут давать представление об их состоянии и использоваться при выделении ООПТ, выполнении других природоохранных проектов, в разработке которых будут принимать участие крупные коллективы высококвалифицированных специалистов регионов и страны.

УДК 598.279.24:502

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-107-109

МОНИТОРИНГ ГНЕЗДЯЩИХСЯ ОКОЛОВОДНЫХ ПТИЦ НА ОСТРОВЕ ПРИБРЕЖНОМ ЗАПОВЕДНИКА «РОСТОВСКИЙ»

© 2015 г. В.А. Миноранский, А.В. Тихонов, Ю.В. Малиновская

Миноранский Виктор Аркадьевич – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, кафедра зоологии, Южный федеральный университет, ул. Б. Садовая, 105/42, г. Ростов н/Д, 344006; председатель ассоциации «Живая природа степи», ул. Тельмана, 10, г. Ростов н/Д, 344011, e-mail: eco@aanet.ru

Minoranskii Viktor Arkad'evich – Doctor of Agricultural Science, Professor, Zoology Department, Southern Federal University, B. Sadovaya St., 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia; Head of the Association «Living Steppe Nature», Telman St., 10, Rostov-on-Don, 344011, Russia, e-mail: eco@aanet.ru

Тихонов Алексей Владимирович – кандидат биологических наук, доцент, кафедра зоологии, Южный федеральный университет, пр. Стачки, 194/1, г. Ростов н/Д, 344090, e-mail: shtirl@gmail.com

Tikhonov Alexei Vladimirovich – Candidate of Biological Science, Associate Professor, Department of Zoology, Southern Federal University, Stachki Ave., 194/1, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: shtirl@gmail.com

Малиновская Юлия Валерьевна – ассистент, ассоциация «Живая природа степи», ул. Тельмана, 10, г. Ростов н/Д, 344011, e-mail: eco@aanet.ru

Malinovskaya Yuliya Valer'evna – Assistant, Association «Living Steppe Nature», Telman St., 10, Rostov-on-Don, 344011, Russia, e-mail: eco@aanet.ru

В биосферном степном заповеднике «Ростовский», организованном в 1995 г., прослежены количественные и качественные изменения в самой крупной колонии околоводных птиц на острове Прибрежном в озере Маныч-Гудило в 1996–2015 гг. В ней обитают *Pelecanus crispus* Bruch, *P. onocrotalus* L., *Phalacrocorax carbo* L., *Platalea leucorodia* L., *Egretta garzetta* L., *Ardea cinerea* L., *Larus ichthyaeus* Pall., *L. cachinnans* Pall. и другие виды. Эти изменения объясняются организацией заповедника и его строгой охраной, длительным засушливым периодом, пересыханием соседних водоемов, возрастанием минерализации озера Маныч-Гудило и другими факторами.

Ключевые слова: заповедник «Ростовский», озеро Маныч-Гудило, остров Прибрежный, мониторинг, околоводные птицы, *Pelecanus crispus*, *P. onocrotalus*, *Platalea leucorodia*, *Larus ichthyaeus*.

Quantitative and qualitative changes have fixed in the largest wading birds' colony from Pribrezhny island of Manych-Gudilo lake in the biosphere steppe reserve «Rostovsky» founded in 1995. *Pelecanus crispus* Bruch, *P. onocrotalus* L., *Phalacrocorax carbo* L., *Platalea leucorodia* L., *Egretta garzetta* L., *Ardea cinerea* L., *Larus ichthyaeus* Pall., *L. cachinnans* Pall and other species of birds are living here. These changes are explained by reserve organization and strict nature protection, long-term dry period, drying of neighboring water, increasing salting of Manych-Gudilo lake and other factors.

Keywords: Reserve «Rostovsky», Manych-Gudilo lake, Pribrezhny island, monitoring, wading birds, *Pelecanus crispus* Bruch, *P. onocrotalus* L., *Phalacrocorax carbo* L., *Platalea leucorodia* L., *Egretta garzetta* L., *Ardea cinerea* L., *Larus ichthyaeus* Pall., *L. cachinnans* Pall.

Самое крупное соленое озеро в Европе – Маныч-Гудило, находящееся на юго-востоке, – отличается богатством и разнообразием птиц. Это стало основанием для включения его в список водно-болотных угодий международного статуса, создания заповедника «Ростовский» (27.12.1995) и орнитологического участка «Маныч-Гудило» заповедника «Черные земли» (08.05.1996) [1]. Одна из важных задач заповедников – сохранение биоразнообразия, ведение мониторинга растительного и животного мира.

В заповеднике «Ростовский» и его охранный зоне одна из наиболее крупных колоний околоводных птиц находится на острове Прибрежном (Заливной) озера Маныч-Гудило. Остров (площадь 3–4 га, высота 1,2–1,5 м) зарос сорной растительностью (лебедей, полынь, конским щавелем, ро-

машкой непахучей и др.), и лишь по краям и на вновь образующихся косах и островах она отсутствует. Птицы заселяли остров до создания заповедника, охотники проводили весеннюю и осеннюю охоту, собирали яйца и птенцов гусеобразных, подкладывали в гнезда чает яйца домашних гусей для высиживания, что заповедником было прекращено.

Для размножения пернатые используют остров с марта – апреля до июля. Основная масса гнезд с яйцами отмечается во второй половине апреля – первой половине мая. Позднее до июня на нём появляется небольшое количество новых гнезд цапель, колпиц, других птиц, а часть их разоряется хохотуньей (*Larus cachinnans*), болотным лунем (*Circus cyaneus*), енотовидной собакой (*Nuctereutes procyonoides*), другими хищниками. Наши учеты птиц проводились ежегодно в конце апреля – пер-

вой половине мая, периодически – в разное время с начала создания заповедника [2, 3].

Пернатое население острова показано в таблице.

Состав и количество гнезд птиц на острове Прибрежном

Виды птиц	1997	2002	2006	2008	2010	2012	2015
Кудрявый пеликан	–	–	–	3	–	–	20
Розовый пеликан	–	–	–	–	–	–	7
Большой баклан	25	98	409	347	164	75	24
Малая белая цапля	40	–	5	–	–	3	2
Серая цапля	30	15	18	27	5	8	–
Колпица	30	15	34	37	10	12	13
Лебедь-шипун					1		
Серый гусь	–	9	3	1	–	1	1
Кряква	2	1				1	2
Серая утка		1					
Красноголовый нырок	1						
Черноголовый хохотун					16	150	550
Хохотунья	230	849	812	700	650	640	450
Всего гнезд	353	977	1281	1115	846	890	1069

Стаи и небольшие группы кудрявого (*Pelecanus crispus*) и розового (*P. onocrotalus*) пеликанов в теплый период ежегодно держатся на воде около острова. Размножение кудрявого пеликана отмечено в 2008 г. (3 гнезда) и в 2009 г. (8), в 2010–2012 гг. гнезд не наблюдалось, в 2013 г. гнездились 2 пары, в 2015 г. – 20 пар. Розовый пеликан до 1996 г. периодически размножался (от 6 до 40 гнезд), однако в последующие годы гнезда отсутствовали; только в 2015 г. появилась небольшая колония из 7 гнезд. К 28.05.2015 у кудрявого пеликана – 41 птенец, у розового – 13 (яйца отсутствовали).

Количество гнезд постоянного обитателя острова – большого баклана – до 2004 г. колебалось в пределах 100. Резко выросло оно в 2006 г., несколько снизившись в 2007–2008 гг., после чего начало сокращаться, достигнув минимального числа в 2015 г. (64 птенца в 24 гнездах). Это сокращение, вероятно, связано с повышением минерализации озера, пересыханием части степных водоемов, уменьшением рыбных ресурсов в районе.

Многочисленным видом является чайка-хохотунья, строящая гнезда на всей территории острова (голое побережье, редкий и густой травостой, участки с колониями бакланов и других птиц). На вновь образующихся свободных от растительности косах и островах чайки вместе с крачками и куликами отдыхают. По мере возрастания площади островков и увеличения их высоты (до

20–25 см) на отдельных участках чайки начинают строить высокие гнезда.

До создания заповедника и в первые годы его существования количество гнезд хохотуньи было относительно небольшим, что можно связать с фактором антропогенного беспокойства. Неприхотливость птиц в выборе мест для гнезд и использование ими в качестве корма различных животных на суше и озере (около гнезд найдены остатки насекомых, рыб, ящериц, ужей, грызунов, различных птиц и их яйца, остатки трупов млекопитающих и т.д.) дают им возможность легко адаптироваться к различным условиям [3]. Благодаря организации заповедника и охраняемым мероприятиям численность гнезд хохотуньи стала быстро расти, достигнув в 2003 г. 1500. В последующие годы количество размножающихся птиц снижалось, составив в 2015 г. 450 гнезд.

В последние пять лет происходит интенсивное увеличение на острове гнездовой колонии черноголового хохотуна (*Larus ichthyæetus*), который до 2010 г. здесь не размножался. В его компактной и плотной колонии в 2010 г. было 16 гнезд, в 2011 г. – 70, в 2012 г. – 150, в 2013 г. – 180, в 2015 г. – 550 гнезд.

Постоянным обитателем острова является колпица (*Platalea leucorodia*). Её численность по годам колебалась в небольших пределах, но в последние пять лет несколько снизилась. В 2013 г. отмечено 18, а 28.05.2015 в двух группах – 13 гнезд (6 и 7 гнезд с кладками яиц).

Часто на острове гнездится малая белая цапля (*Egretta garzetta*). Её количество было большим в первые годы организации заповедника, а в последующем гнезда этой цапли были малочисленными (в 2011 г. – 6; 2012 г. – 3; 2013 г. – 8; 2015 г. – 2 гнезда) или отсутствовали. Размножение серой цапли (*Ardea cinerea*) наблюдалось регулярно, однако в 2015 г. её гнезда не отмечены. Периодически на острове размножаются серый гусь (*Anser anser*) и кряква (*Anas platyrhynchos*). Редко здесь отмечаются единичные гнезда лебедя-шипуна (*Cygnus olor*) (2004), серой утки (*Anas strepera*) (2000, 2002, 2003, 2004, 2011), красноголового нырка (*Netta rufina*) (1997).

На образовавшемся недалеко от острова Прибрежного новом островке в 2012 г. появились гнездовые колонии черноголовой чайки (*Larus melanocephalus*) (102 гнезда) и чайконосой крачки (*Gelochelidon nilotica*) (432); в 2013 г. их было соответственно 105 и 370 [4].

Мониторинг птиц показывает, что в колонии за период существования заповедника у ряда видов произошли заметные изменения. Включение острова в состав заповедника и организация на нем охраны повлияли на ряд видов птиц положительно, в

частности розового и кудрявого пеликанов, большого баклана, черноголового хохотуна, чайку-хохотунью. Остров остается местом размножения колпицы, малой белой и других птиц.

Определенное влияние на комплекс птиц острова оказали изменения в рассматриваемый период в экосистеме озера Маныч-Гудило в результате повышения его минерализации. В 90-е гг. XX в. соленость воды в районе острова составляла 25–35 г/л [5]. До 2007 г. в районе острова обычными были пиленгас (в 1996 г. в озеро выпустили 23 тыс. штук молоди), колюшки, а в устьях впадающих в него рек, в восточной и западной частях озера встречались тарань, серебряный карась, судак, сазан, окунь, бычки. Рыба водилась в районе заповедника во многих прудах, степных речках. В последнее десятилетие минерализация воды в озере стала быстро возрастать, достигая около острова 40 г/л и более. Обмеление озера способствовало повышению температуры воды в жаркие летние месяцы.

Пересыхание многих прудов и рек, падение уровня воды в оз. Маныч-Гудило стало особенно заметным с засушливого 2007 г. Полное или частичное пересыхание степных водоемов негативно отражается на связанных с ними организмах, приводит к перераспределению птиц среди водоемов. Так, в нескольких километрах от острова Прибрежного находится пруд Круглый, где многие годы размножались большая белая и серая цапли, лебеди, гуси, кряквы, нырки и другие птицы. В 2007 г. пруд пересох, водная, околородная растительность и птицы здесь отсутствовали. В 2008 г. в нем воды было мало и птицы не размножались, а на острове Прибрежном количество гнезд серой цапли возросло. К 2010 г. пруд Круглый заполнился водой, появилась околородная растительность и стали размножаться прежние виды птиц. В 2011–2012 гг. пернатые, включая серую цаплю, его активно использовали для размножения. На острове Прибрежном количество серой цапли в эти годы уменьшилось.

Определенное влияние на птиц оказывает кормовой фактор. Если для чайки-хохотуньи, использующей в качестве корма различных водных и наземных животных (мертвых и живых), засоление и пересыхание водоемов не оказывает большого влияния, то для ихтиофагов это создаёт определенные трудности. На Курниковом лимане, в прошлом богатом рыбой, пеликаны и бакланы гнездились, но в зиму 2005/06 г. из-за длительного покрытия поверхности льдом и сильного промерзания почти вся рыба погибла. В дальнейшем он стал мелеть и ле-

том частично пересыхать. Отмеченные птицы с 2006 до 2015 г. на нем не гнездились, но появлялись отдыхающие группы. Пеликаны и бакланы способны летать за рыбой для себя и птенцов за десятки километров, однако эти возможности у разных видов отличаются, что также отражается на количестве размножающихся на острове Прибрежном отдельных видов птиц.

Литература

1. Миноранский В.А., Узденов А.М., Подгорная Я.Ю. Птицы озера Маныч-Гудило и прилегающих степей. Ростов н/Д., 2006. 332 с.
2. Миноранский В.А., Тихонов А.В., Подгорная Я.Ю. Мониторинг птиц на островах озера Маныч-Гудило // Степи Сев. Евразии : материалы V Междунар. симпозиума. Оренбург, 2009. Т. 1. С. 468–472.
3. Миноранский В.А., Даньков В.И., Толчеева С.В., Тихонов А.В. Мониторинг размножающихся колониальных лимнофильных птиц в районе заповедника «Ростовский» за период его существования // Биоразнообразие долины Зап. Маныча : тр. Гос. природного биосферного заповедника «Ростовский». Вып. 5. Ростов н/Д., 2012. С. 255–273.
4. Отчет № 1. Слежение за ходом естественных процессов эталонных степных экосистем заповедника «Ростовский», 2013 г. (Летопись природы). Книга 12. Орловский, 2014. 205 с.
5. Витковский А.З. Современное состояние ихтиофауны водохранилищ Манычского каскада : автореф. дис. ... канд. биол. наук. Ставрополь, 2000. 24 с.

References

1. Minoranskii V.A., Uzdenov A.M., Podgornaya Ya.Yu. *Ptitsy ozera Manych-Gudilo i prilgayushchikh stepei* [Birds of Lake Manych-Gudilo and the surrounding steppes]. Rostov-on-Don, 2006, 332 p.
2. Minoranskii V.A., Tikhonov A.V., Podgornaya Ya.Yu. [Monitoring of birds on the islands of Lake Manych-Gudilo]. *Stepi Sev. Evrazii* [Steppes of Northern Eurasia]: V Intern. symposium. Orenburg, 2009, vol. 1, pp. 468–472.
3. Minoranskii V.A., Dan'kov V.I., Tolcheeva S.V., Tikhonov A.V. [Monitoring of breeding limnophilic bird colonies in the area of the reserve "Rostov" for the period of its existence]. *Bioraznoobrazie doliny Zap. Manycha* [Biodiversity of the West Manych Valley]: Proceedings of the State Nature Biosphere Reserve "Rostov". Vol. 5. Rostov-on-Don, 2012, pp. 255–273.
4. *Otchet № 1. Slezhenie za khodom estestvennykh protsessov etalonnykh stepnykh ekosistem zapovednika «Rostovskii», 2013 g. (Letopis' prirody)* [Report № 1. Monitoring the progress of natural processes reference steppe ecosystem reserve "Rostov", 2013 (Annals of Nature)]. Book 12. Orlovsky, 2014, 205 p.
5. Vitkovskii A.Z. *Sovremennoe sostoyanie ikhtiofauny vodokhranilishch Manychskogo kaskada* : avtoref. dis. ... kand. biol. nauk [The current state of fish fauna reservoirs Manych cascade]. Stavropol, 2000, 24 p.

УДК 633.81/85

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-110-112

ДЕСИКАЦИЯ ПОДСОЛНЕЧНИКА

© 2015 г. И.В. Сибиль, Н.Ф. Малай, В.Г. Шурупов

Сибиль Игорь Васильевич – агроном, научно-производственное предприятие «Гибрид», ул. 1-й Пятилетки, 104, п. Матвеев Курган, Ростовская обл., 346970.

Sibil Igor Vasil'evich – Agronomist, Research and Production Enterprise «Hybrid», 1-ya Pyatiletka St., 104, Matveyev Kurgan, Rostov Region, 346970, Russia.

Малай Николай Федорович – кандидат сельскохозяйственных наук, руководитель научно-производственного предприятия «Гибрид», ул. 1-й Пятилетки, 104, п. Матвеев Курган, Ростовская обл., 346970.

Malai Nikolai Fedorovich – Candidate of Agricultural Science, Head of the Research and Production Enterprise «Hybrid», 1-ya Pyatiletka St., 104, Matveyev Kurgan, Rostov Region, 346970, Russia.

Шурупов Василий Георгиевич – доктор сельскохозяйственных наук, профессор, заместитель директора по научной работе, Донская опытная станция им. Л.А. Жданова Всероссийского научно-исследовательского института масличных культур, ул. Жданова, 2, п. Опорный, Ростовская область, 346754, e-mail: gnuDOS@mail.ru

Shurupov Vasilii Georgievich – Doctor of Agricultural Science, Professor, Deputy Director, Zhdanov Don Experimental Station of the All-Russian Research Institute of Oil Crops, Zhdanov St., 2, Oporny, Rostov Region, Russia, 346754, e-mail: gnuDOS@mail.ru

Приведены результаты исследований по десикации растений подсолнечника при применении различных химических препаратов. Определены пороги влажности семян подсолнечника, при которых необходимо применять десиканты с целью сохранения урожая, получения высококачественных семян и масла в условиях приазовской зоны Ростовской области. Получены результаты, убедительно свидетельствующие о полной экологической безопасности препаратов, используемых для десикации подсолнечника, что подтверждается их отсутствием в продуктах переработки и в почве.

Ключевые слова: десикация, подсолнечник, препараты, растения, сорт, гибрид, влажность, урожайность, масличность.

The results of the research on the desiccation of sunflower plants in the application of various chemical products are shown. The limits of humidity of sunflower seeds in which desiccants should be used in order to preserve the harvest, producing high-quality seeds and oil in the conditions of the Azov zone, Rostov Region. The results of the research convincingly demonstrate complete environmental safety of the substances used for the desiccation of sunflowers that is proved by their absence in the processed products and in the soil.

Keywords: desiccation, sunflower, substances, plants, variety, hybrid, moisture, yield, oil content.

Для сокращения сроков уборки урожая, потерь урожая, сохранения качества убранных семян, ускорения процесса созревания, а также для снижения ущерба, наносимого болезнями (белая и серая гниль, фомопсис и др.), применяют предуборочное подсушивание, или десикацию растений с помощью химических веществ – десикантов. Как показали наши наблюдения и опыты, десикацию необходимо проводить на посевах подсолнечника при неблагоприятных условиях осени, при поздних сроках посева и пересеве, на сильно засоренных сорняками посевах, пораженных корзиночными и прикорневыми формами гнилей.

При проведении десикации очень важно правильно, с учетом погоды, степени развития болезней, влажности семян, возможностей хозяйства, определить срок проведения этого агроприема, так как преждевременное опрыскивание посевов препаратами может сильно снизить урожайность, а запаздывание – эффективность самого приёма [1, 2].

В наших исследованиях для десикации использовались следующие химические препараты: «Реглон Супер», «Баста» и «Голден Ринг» (табл. 1).

Таблица 1

Десиканты, применяемые на посевах подсолнечника

Наименование препарата	Норма расхода, л/га	Сроки начала уборки (число дней после обработки)
«Реглон Супер»	1,5 – 2,0	5 ÷ 6
«Баста»	1,5 – 2,0	7 ÷ 10
«Голден Ринг»	2,0	7 ÷ 10

Из табл. 1 видно, что препараты «Баста» и «Голден Ринг» действовали мягче, чем «Реглон Супер». У растений, обработанных «Бастой» и «Голден Ринг», приток органических веществ в семена продолжался в течение 3 ÷ 5 дней, а «Реглоном Супер» – в течение суток.

Указанные в табл. 1 препараты хорошо растворяются в воде. В ткани листа проникают в течение 1 ч после обработки при температуре воздуха более 15 °С.

Наши опыты также показали, что для десикации можно использовать на товарных посевах подсолнечника препараты на основе глифосатов: «Тайфун», «Тотал», «Зевс», «Торнадо», «Смерч» и другие при нормах расхода 2,0 – 3,0 л/га. Их действие проявляется через 10 ÷ 12 дней с момента обработки. Эти препараты следует применять в фазе начала побурения корзинки при влажности семян не более 30 %.

Химическое подсушивание растений подсолнечника препаратами «Реглон Супер», «Баста» и «Голден Ринг», проведенное в оптимальные сроки при влажности семян 30÷35 %, не снижает урожайность, массу 1000 семян и масличность (табл. 2).

Таблица 2

Урожайность и качество семян подсолнечника сорта Азовский в зависимости от десикации (среднее 2009 – 2010 гг.)

Варианты опыта	Урожай семян, т/га		Масса 1000 семян, г		Масличность ядра, %	
	2009	2010	2009	2010	2009	2010
Контроль (без десикации)	2,17	2,53	83,5	81,5	60,1	59,7
«Реглон Супер»	2,29	2,74	84,6	80,9	60,0	59,9
«Баста»	2,14	2,49	84,3	80,1	60,2	59,0
«Голден Ринг»	2,25	2,65	84,2	80,0	59,9	59,1
НСР _{0,05} , т/га	0,07	0,05				

Из приведенных в табл. 2 данных видно, что при использовании препарата «Баста» имело место некоторое снижение урожайности семян. Быстрота подсушивания семян после десикации зависела от погоды и влажности семян, при которой проводится этот агроприём. При влажности семян 30–35 % семена подсыхают медленнее, при 20–25 % – быстрее. Наши наблюдения показали, что в естественных условиях снижение влажности семян до уровня хозяйственной спелости наступает в течение недели.

Химическое подсушивание посевов подсолнечника следует проводить при влажности семян 30–35 %, т.е. в фазу физиологической спелости. В эту фазу налив семян ещё не заканчивается. Однако незначительное снижение урожайности восполняется ускорением сроков уборки на 8÷10 дней, сокращением потерь семян на 0,2÷0,4 т/га, сохранением их качества. При этом снижаются затраты на сушку вороха и подработку семян. Часто бывает, что снижение влажности семян естественным путем протекает нормально до 22÷25 %, а в дальнейшем быстро замедляется из-за понижения температур и высокой влажности воздуха. В этой ситуации, как показали наши исследования, десикацию следует проводить при влажности семян 20÷25 %, что ускоряет подсушивание семян на корню, сокращает затраты на сушку.

Наши наблюдения, анализы и учёт показали, что урожай и качество семян при поражении корзинок подсолнечника гнилями заметно снижаются (белая, серая гнили, фомопсис). Болезни белая и серая гниль проявляются обычно в фазе налива семян и быстро прогрессируют. Остановить этот процесс и тем самым снизить вредоносность болезней можно с помощью десикации посевов [1, 3]. При этом десикацию необходимо проводить несколько раньше обычного, когда влажность семян составляет 36÷38 %, но не более 40 %.

Недобор урожая семян из-за неполного их налива значительно перекрывается возможными потерями от болезней. В такие ранние сроки десикацию следует проводить, когда болезнями поражено 10–15 % растений. При меньшей степени поражения растения необходимо обрабатывать десикантами при влажности семян 30÷35 %.

Бывали годы, когда корзинки подсолнечника поражаются болезнями в очень сильной степени, сроки десикации более ранние – при влажности семян 40 и даже 45 %. При десикации «Реглоном Супер» в этот срок можно в 1,5÷2 раза подавить развитие болезней и сохранить урожай от полной гибели.

При десикации подсолнечника с влажностью семян 36÷38 и 40÷45 % происходило снижение урожайности семян. Так, в годы сильных эпифитотий гнилей десикация растений подсолнечника «Реглоном Супер» приводила к снижению урожая семян у сорта Азовский на 0,10÷1,31 т/га, у материнской линии гибрида Сигнал (Н 026) – на 0,16–0,23 т/га (табл. 3).

Таблица 3

Урожайность и всхожесть семян подсолнечника различной влажности под воздействием десикации (среднее 2009 – 2010 гг.)

Влажность семян, %	Сорт Азовский		Материнская линия гибрида Сигнал (Н 026)	
	Урожайность, т/га	Всхожесть, %	Урожайность, т/га	Всхожесть, %
Без десикации				
7 – 8	2,92	94	1,05	84
Десикация «Реглоном Супер», 2 л/га				
40 – 45	2,61	94	0,82	83
36 – 38	2,82	95	0,89	86
25 – 30	3,05	94	1,06	86
НСР _{0,05} , т/га, 2009	0,12		0,06	
2010	0,11		0,15	

Таблица 3 показывает, что десикация растений подсолнечника способствовала получению высокого урожая семян с высокой всхожестью у сорта Азовский – 94 % и материнской линии Сигнал (Н 026) – 84 %. Полное подсыхание листьев и корзинок при десикации «Реглоном Супер» наступало

через 5÷6 дней. При этом влажность семян снижалась до 8÷10 %.

Десикация посевов подсолнечника позволяла получить масло с низким кислотным числом (мг КОН) порядка 1,02. Этот показатель важен при использовании масла на пищевые цели. Остаточное количество «Реглона Супер» в семенах подсолнечника не превышало 0,5 мг/кг, при ПДК в кормах животных – 2,0 мг/кг. Остаточное количество препаратов «Басты» и «Голден Ринг» в семенах не обнаружено.

Следует отметить, что десикация при влажности семян 30–40 % и ниже не увеличивала показатель кислотного числа, но повышала стойкость семян к гидролитическому распаду масла при хранении в условиях повышенной влажности и температуры воздуха. В случаях, когда подсолнечник возделывают для получения продуктов диетического и детского питания, десикация растений не применяется.

Полученные результаты убедительно показывают полную экологическую безопасность препаратов, используемых для десикации подсолнечника, что подтверждается их отсутствием в продуктах переработки семян и в почве.

Нами также не установлено отрицательного последствие десикантов на рост и развитие растений подсолнечника в потомстве (табл. 4).

Таким образом, в условиях приазовской зоны Ростовской области десикацию посевов подсолнечника лучше всего проводить при влажности семян 25÷30 %; при очень сильном поражении корзинок подсолнечника гнилями и другими грибными болезнями – 36÷38 %, гибридов – 40÷45 %. Это даст возможность локализовать распространение болезней, получить полноценные семена при незначительном снижении урожайности, сохранить высокую продуктивность этой ценной масличной культуры.

Последствие десикации на рост и развитие растений подсолнечника в потомстве (среднее 2009 – 2010 гг.)

Влажность семян, %	Сорт Азовский			Гибрид Бизон		
	Высота растений, м	Диаметр, см		Высота растений, м	Диаметр, см	
		корзинки	пустой середины		корзинки	пустой середины
Уборка без десикации (контроль)						
8 – 10	2,011	21,5	1,8	1,81	17,3	2,9
Десикация «Реглоном Супер» (2 л/га)						
40 – 45	2,12	21,0	1,8	1,80	17,2	2,7
36 – 38	2,11	21,7	1,8	1,81	17,3	2,8
25 – 30	2,11	21,1	1,7	1,80	17,2	2,8

Таблица 4 убедительно показывает, что применение десикации на растениях сорта Азовский и гибрида Бизон не оказало отрицательного последствие в потомстве на высоту растений, диаметр корзинки и её пустой середины.

Наши наблюдения и практика показали, что если в хозяйстве недостаточно техники для своевременной уборки урожая, десикацию необходимо проводить в два срока. Вторую половину посевов – через 3÷5 дней. При поражении посевов белой и серой гнилями десикацию необходимо проводить в один срок. Запоздывать с уборкой после десикации нельзя, так как это приведет к потерям урожая вследствие осыпания семян.

Литература

1. Буряков Ю.П. Индустриальная технология возделывания подсолнечника. М., 1983. 191 с.
2. Тихонов О.И., Головин А.В. Десикация подсолнечника // Зерновое хозяйство. 1980. № 8. С. 30–31.
3. Борисоник З.Б. Подсолнечник. Киев, 1981. 158 с.

References

1. Buryakov Yu.P. *Industrial'naya tekhnologiya vozdevaniya podsolnechnika* [Industrial technology of sunflower cultivation]. Moscow, 1983, 191 p.
2. Tikhonov O.I., Golovin A.V. *Desikatsiya podsolnechnika* [Sunflower desiccation]. *Zernovoe khozyaistvo*, 1980, no 8, pp. 30-31.
3. Borisonik Z.B. *Podsolnechnik* [Sunflower]. Kyiv, 1981, 158 p.

УДК 502.75 (471.61)

DOI 10.18522/0321-3005-2015-4-113-116

ТАКСОНОМИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ФЛОРЫ ПАМЯТНИКА ПРИРОДЫ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ «САЛЬСКАЯ СТЕПЬ»*

© 2015 г. А.Н. Шмараева, В.В. Федяева, Ж.Н. Шишлова

Шмараева Антонина Николаевна – научный сотрудник, Ботанический сад Южного федерального университета, пер. Ботанический спуск, 7, г. Ростов н/Д, 344041, e-mail: anshmaraeva@sfedu.ru

Shmaraeva Antonina Nikolaevna – Researcher, Botanical Garden of Southern Federal University, Botanicheskyy Lane, 7, Rostov-on-Don, 344041, Russia, e-mail: anshmaraeva@sfedu.ru

Федяева Валентина Васильевна – кандидат биологических наук, доцент, заведующая кафедрой ботаники, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Иванковского Южного федерального университета, ул. Б. Садовая, 105/42, г. Ростов н/Д, 344006, e-mail: vfedyayeva@gmail.com.

Fedyayeva Valentina Vasil'evna – Candidate of Biological Science, Associate Professor, Head of Botany Department, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, B. Sadovaya St., 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia, e-mail: vfedyayeva@gmail.com

Шишлова Жанна Николаевна – старший научный сотрудник, Ботанический сад Южного федерального университета, пер. Ботанический спуск, 7, г. Ростов н/Д, 344041, e-mail: shishlova@sfedu.ru

Shishlova Zhanna Nikolaevna – Senior Researcher, Botanical Garden of Southern Federal University, Botanicheskyy Lane, 7, Rostov-on-Don, 344041, Russia, E-mail: shishlova@sfedu.ru

Приводятся результаты таксономического анализа флоры семенных растений памятника природы (ПП) Ростовской обл. «Сальская степь». ПП находится в Сальском районе в балке Сухая Кугульта. Флора ПП насчитывает 267 видов из 45 семейств и 170 родов. Таксономический анализ флоры свидетельствует о высокой степени ее гетерогенности. Видовая насыщенность семейств составляет 5,93:1, а родовая – 3,78:1. Таксономическая структура флоры ПП во многом сходна со структурой флоры Нижнего Дона в целом. Флористическая репрезентативность ПП по отношению к флоре Ростовской области составляет около 14 %.

Ключевые слова: флора, таксономическая структура, ПП «Сальская степь», балка Сухая Кугульта, Ростовская область, приазовская степь, родовая насыщенность, спектр ведущих семейств.

Results of the taxonomical analysis of seed plants flora of the nature sanctuary (NS) of the Rostov Region «The Salsk steppe» are given. NS is located in the Salsk District in the Dry Kugulta Ravine. The flora of the NS includes 267 species of 45 families and 170 genera. The taxonomical analysis of flora testifies to high degree of its heterogeneity. The specific saturation of families makes 5,93:1, and a generic saturation of families – 3,78:1. The taxonomical structure of NS flora is in many respects similar to structure of the Lower Don flora in general. The floristic representativeness of NS in relation to flora of the Rostov Region makes about 14 %.

Keywords: flora, taxonomical structure, nature sanctuary «The Salsk Steppe», Dry Kugulta Ravine, Rostov Region, Azov Steppe, generic saturation, range of the leading families.

Памятник природы (ПП) «Сальская степь» является одной из 80 особо охраняемых природных территорий Ростовской области, в том числе одним из 70 ПП регионального значения [1]. Сальская степь находится на юго-востоке области, в Сальском административном районе, южнее пос. Тальники и занимает верховье и среднюю часть балки Сухая Кугульта, расположенной в пределах второй надпойменной террасы левобережной части долины р. Западный Маныч.

Основное русло балки Сухая Кугульта вытянуто с юго-запада на северо-восток и впадает в один из многочисленных заливов Западного Маныча. Склоны балки пологие, с многочисленными ответвлениями, днище широкое, с временным водо-

током. Длина балки в пределах ПП – 3370 м, ширина – до 750 м в южной части и до 370 м в северной части. Площадь ПП составляет 106,26 га, с двух сторон его территория ограничена пахотными землями.

В системе ботанико-географического районирования Ростовской области территория ПП занимает пограничное положение между Азово-Егорлыкским районом (АЕ), для которого характерно господство в зональных условиях богаторазнотравно-дерновинно-злаковых приазовских степей, и районом долины Маныча (ДМ), который характеризуется господством долинных умеренно сухих и сухих дерновинно-злаковых, а также полынно-дерновинно-злаковых степей в комплексе с солонцами [2].

*Исследования проводились при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (госзадание № 2014/174, рег. № 01201460153) и минприроды Ростовской области (госконтракт № 39-р от 14.04.2015 г.).

В силу географического положения растительность балки Сухая Кугульта относится к обедненному варианту приазовской разнотравно-типчаково-ковыльной степи. В сравнении с другими степями приазовского типа она отличается более ксерофильным характером растительности и обедненным видовым составом [3].

Степная растительность занимает не менее 90 % площади ПП и в целом балки Сухая Кугульта. В степных сообществах, где общее проективное покрытие составляет 60–90 %, доминируют плотнoderновинные злаки *Festuca valesiaca* Gaudin, *Stipa capillata* L., *S. lessingiana* Trin. & Rupr., *S. pulcherrima* K. Koch. В меньшей степени в злаковом травостое участвуют плотнoderновинные *Stipa ucrainica* P. Smirn. и *Koeleria cristata* (L.) Pers., а также рыхлoderновинные *Agropyron pectinatum* (Bieb.) Beauv., *Bromopsis riparia* (Rehm.) Holub, *Melica transsilvanica* Schur и корневищный *Bromopsis inermis* (Leyss.) Holub.

Разнотравье довольно разнообразно по составу, но нередко в сложении ассоциаций играет незначительную роль. В составе длительно вегетирующего летнего разнотравья преобладают ксерофиты, такие как *Allium firmotunicatum* Fomin, *Artemisia austriaca* Jacq., *Asparagus officinalis* L., *Astragalus austriacus* Jacq., *A. pseudotataricus* Boriss., *Centaurea diffusa* Lam., *C. pseudomaculosa* Dobroc., *Eryngium campestre* L., *Euphorbia seguieriana* Neck., *Falcaria vulgaris* Bernh., *Ferulago galbanifera* (Mill.) W.D.J. Koch, *Galatella villosa* (L.) Reichenb. fil., *Galium humifusum* Bieb., *G. octonarium* (Klok.) Soo, *G. ruthenicum* Willd., *Inula germanica* L., *Limonium platyphyllum* Lincz., *Linaria macroura* (Bieb.) Bieb., *Marrubium praecox* Janka, *Medicago romanica* Prod., *Nepeta parviflora* Bieb., *Odontites vulgaris* Moench, *Onosma polychroma* Klok. ex M. Pop., *Oxytropis pilosa* (L.) DC., *Phlomis pungens* Willd., *Plantago urvillei* Opiz, *Salvia tesquicola* Klok. & Pobed., *Scabiosa ochroleuca* L., *Serratula erucifolia* (L.) Boriss., *Seseli tortuosum* L., *Stachys atherocalyx* K. Koch, *Tanacetum achilleifolium* (Bieb.) Sch. Bip., *Teucrium polium* L., *Thesium arvense* Horvát., *Thymus marschallianus* Willd., *Trinia hispida* Hoffm., *Verbascum orientale* Bieb., *Veronica spicata* L., *Viola ambigua* Waldst. & Kit. и др.

Отличительную особенность степной флоры ПП придают эфемеры и эфемероиды, обильно представленные в весенней синузии (*Alyssum desertorum* Stapf, *Androsace elongata* L., *A. maxima* L., *Arabidopsis thaliana* (L.) Heynh., *Arabis recta* Vill., *Arenaria viscida* Hall. fil. ex Loisel., *Cerastium perfoliatum* L., *C. pumilum* Curt., *Ceratocephala testiculata* (Crantz) Bess., *Erophila verna* (L.) Bess., *Holosteum umbellatum* L., *Meniocus linifolius* (Steph.) DC., *Ficaria verna* (L.) Bess., *Gagea pusilla* (F.W. Schmidt) Schult. &

Schult. fil., *Geranium tuberosum* L., *Ornithogalum kochii* Parl., *Tulipa biebersteiniana* Schult. & Schult. fil. и др.).

Характерной особенностью всех вариантов приазовской степи является присутствие кустарников, нередко образующих в понижениях сплошные заросли. Так, довольно обычными видами в балке Сухая Кугульта являются *Caragana frutex* (L.) K. Koch, *C. scythica* (Kom.) Pojark., *Prunus stepposa* Kotov, *Rhamnus cathartica* L.

На днище Сухой Кугульты встречаются фрагменты пырейных и мятликово-пырейных лугов (доминируют *Elytrigia repens* (L.) Nevski, *Poa pratensis* L., содоминирует *Festuca regaliana* Pavl.), местами слабозасолённых, с участием *Puccinellia distans* (Jacq.) Parl. Среди лугового разнотравья обычны *Achillea millefolium* L., *Arctium lappa* L., *Artemisia pontica* L., *A. vulgaris* L., *Cichorium intybus* L., *Daucus carota* L., *Echinops sphaerocephalus* L., *Euphorbia uralensis* Fisch. ex Link, *Galatella dracunculoides* (Lam.) Nees, *Glycyrrhiza glabra* L., *Inula britannica* L., *Lathyrus tuberosus* L., *Lycopus europaeus* L., *Rumex confertus* Willd., *Senecio grandidentatus* Ledeb., *Tanacetum vulgare* L., *Trifolium repens* L. и др. Пёстрые по видовому составу синантропные группировки формируются на участках сильного пастбищного сгона, заброшенных стоянках скота и вдоль полевых дорог. В их составе отмечены *Amaranthus retroflexus* L., *Artemisia absinthium* L., *Ballota nigra* L., *Cannabis ruderalis* Janisch., *Chenopodium album* L., *Convolvulus arvensis* L., *Conyza canadensis* (L.) Crong., *Cyclachaena xanthiifolia* (Nutt.) Fresen., *Hyoscyamus niger* L., *Poa crispa* Thuill., *Polycnemum arvense* L., *Polygonum arenastrum* Boreau, *Sclerochloa dura* (L.) Beauv., *Sonchus arvensis* L., *Tripleurospermum inodorum* (L.) Sch. Bip., *Xanthium californicum* Greene и др.

На территории Сальской степи зарегистрировано 10 видов растений, занесенных в Красную книгу Ростовской области [4]: *Astragalus ponticus* Pall., *A. pubiflorus* DC., **Bellevia sarmatica* (Pall. ex Georgi) Woronow, *Caragana scythica* (Kom.) Pojark., *Crocus reticulatus* Stev. ex Adam, **Iris pumila* L., **Stipa pulcherrima* K. Koch, *S. ucrainica* P. Smirn., **S. zaleskii* Wilensky, **Tulipa schrenkii* Regel. Из перечисленных таксонов пять видов (отмечены в перечне звёздочкой) включены в Красную книгу РФ и два вида (*Astragalus ponticus* и *A. pubiflorus*) – в приложение к Красной книге РФ [5]. Популяции *Astragalus ponticus* (около 70 тыс. разновозрастных особей) и *A. pubiflorus* (6–7 тыс. разновозрастных особей) на территории ПП являются самыми многочисленными из числа известных в настоящее время в Ростовской области [6–8].

В результате инвентаризации флоры Сальской степи в 2009–2015 гг. было зарегистрировано 267 видов семенных растений из 45 семейств и 170 родов.

Флора ПП характеризуется практически абсолютным преобладанием видов отдела покрытосеменных Magnoliophyta. К нему относятся все виды, кроме одного (*Ephedra distachya* L.), принадлежащего к отделу голосеменных Pinophyta (класс гнетовые Gnetopsida). Отдел Magnoliophyta представлен двумя классами: двудольных (Magnoliopsida) и однодольных (Liliopsida), включающими соответственно 231 и 35 видов (86,8 и 13,2 % от общего числа видов отдела покрытосеменных).

Соотношение видов из классов Magnoliopsida и Liliopsida – 6,6:1 (для флоры Нижнего Дона этот показатель равен 3,9:1 [9, 10]). Доля двудольных, таким образом, выше, чем в региональной флоре, в полтора (1,54) раза, что отражает более ксерофильный характер степной ценофлоры [11]. Эта же закономерность проявляется и в соотношении числа семейств в структуре флоры. В целом виды флоры ПП распределяются по 45 семействам, лишь одно из которых (*Ephedraceae* Dumort.) относится к отделу Pinophyta (голосеменные). Остальные 44 семейства отдела покрытосеменных принадлежат классам двудольных (37 семейств, или 84,1 % от общего числа семейств покрытосеменных растений) и однодольных (7 семейств, или 15,9 % соответственно). Соотношение числа семейств двудольных и однодольных растений в составе изучаемой флоры составляет 5,29:1, что в 1,24 раза меньше, чем в региональной флоре (4,25:1 [10]).

Известно, что показатели систематического разнообразия флоры, а именно количественные соотношения между таксонами разных рангов (так называемые пропорции флоры), имеют относительно устойчивый характер и более объективно отражают специфику флоры, чем абсолютные значения числа таксонов в ее составе [12]. Пропорции изучаемой флоры в сравнении с региональной нижнедонской флорой приведены в таблице.

Показатели систематического разнообразия флоры

Флора	Среднее число		
	видов в семействе, шт.	видов в роде, шт.	родов в семействе, шт.
Нижний Дон (по [10])	14,25	2,98	4,81
ПП «Сальская степь»	5,93	1,55	3,78

Во флоре ПП среднее число видов, приходящихся на одно семейство, в 2,4 раза, а на один род – в 1,9 раза ниже, чем в нижнедонской флоре в целом; средняя родовая насыщенность семейств также в 1,3 раза меньше. Это указывает на более слабую

таксономическую дифференциацию изучаемой флоры, что вполне естественно в связи с её значительно меньшими площадью и эколого-фитоцено-тическим разнообразием.

Важнейшим показателем каждой флоры является спектр ведущих семейств. Первые двенадцать мест по количеству видов занимают следующие семейства: *Asteraceae* (52 вида), *Fabaceae* (29 видов), *Brassicaceae* (22 вида), *Poaceae* (21 вид), *Lamiaceae* (18 видов), *Caryophyllaceae* (17 видов), *Scrophulariaceae* (12 видов), *Boraginaceae* и *Rosaceae* (по 8 видов), *Apiaceae* и *Ranunculaceae* (по 7 видов), *Euphorbiaceae* (6 видов). На долю этих семейств приходится 207 видов, или 77,53 % флоры Сальской степи, во флоре Нижнего Дона – 61,53 % [13]. Остальные 33 семейства представлены 1–4 видами. В общих чертах спектры ведущих семейств ПП и Нижнего Дона в целом сходны. По количеству родов наиболее крупными семействами во флоре Сальской степи являются *Asteraceae* (29 родов), *Brassicaceae* (18 родов), *Lamiaceae* (16), *Poaceae* (13), *Caryophyllaceae* и *Fabaceae* (по 11), *Boraginaceae* и *Apiaceae* (по 7), *Ranunculaceae* (6), остальные 36 семейств представлены 1–4 родами, в том числе 16 семейств включают по 1 роду и 1 виду.

Ведущие позиции семейств *Asteraceae*, *Fabaceae*, *Poaceae*, *Lamiaceae*, *Caryophyllaceae* свидетельствуют о преимущественном распространении на юге области видов аридных флорогенетических центров, что подчеркивает контактный характер нижнедонской флоры в целом [9]. Высокий ранг семейства *Brassicaceae* (третье место в спектре семейств) объясняется заметными антропогенными изменениями сообществ на территории Сальской степи и довольно широким распространением в связи с этим сорных растений, к которым принадлежат многие виды крестоцветных (*Capsella bursa-pastoris* (L.) Medik., *Chorispora tenella* (Pall.) DC., *Descurainia sophia* (L.) Webb ex Prantl, *Euclidium syriacum* (L.) R. Br., *Lepidium perfoliatum* L., *Senecio vernalis* Waldst. & Kit., *Sisymbrium altissimum* L., *S. polymorphum* (Murr.) Roth, *Thlaspi arvense* L., *T. perfoliatum* L. и др.).

Во флоре Сальской степи насчитывается 170 родов, в том числе 169 родов покрытосеменных растений, из них к классу двудольных относятся 147 (87 %), к классу однодольных – 22 рода (13 %). Наиболее крупными родами в составе флоры Сальской степи являются *Astragalus* (9 видов), *Euphorbia* (6 видов), *Potentilla*, *Stipa*, *Trifolium*, *Veronica*, *Vicia* (по 5 видов). Остальные роды имеют меньшее видовое богатство: 6 родов содержат по 4 вида, 8 – по 3, 30 – по 2, 119 – по 1 виду.

В целом флористическая репрезентативность ПП по отношению к флоре Ростовской области со-

ставляет около 14 %, что является достаточно высоким показателем, учитывая его незначительную площадь, а таксономическая (систематическая) структура флоры Сальской степи имеет сходство со структурой флоры Нижнего Дона в целом. Наряду с высоким уровнем биоразнообразия растений растительный покров Сальской степи имеет черты типичной степной растительности, встречающейся на границе АЕ-равнины и ДМ. Особую природоохранную значимость ПП придают обитающие здесь ценопопуляции 10 редких и исчезающих видов растений.

Литература

1. Хибухина Т.Ю. Начинается оптимизация сети региональных ООПТ Ростовской области // Степной бюллетень. 2014. № 41. С. 14–16.
2. Федяева В.В. Растительный покров // Природные условия и естественные ресурсы Ростовской области. Ростов н/Д., 2002. С. 226–282.
3. Балаш А.П. Левобережные степи Нижнего Маныча // Растительность и фауна Дона и Северного Кавказа в системе зональных биологических и научно-производственных разработок. Ростов н/Д., 1971. С. 17–21.
4. Красная книга Ростовской области. Растения и грибы ; 2-е изд. Т. 2 / науч. ред. В.В. Федяева. Ростов н/Д., 2014. 344 с.
5. Красная книга Российской Федерации (растения и грибы). М., 2008. 855 с.
6. Федяева В.В., Шмараева А.Н., Шишлова Ж.Н. Состояние популяции астрагала понтийского (*Astragalus ponticus* Pall.) на территории ПП «Сальская степь» // Музей-заповедник: экология и культура. Вёшенская, 2012. С. 118–121.
7. Шишлова Ж.Н., Шмараева А.Н., Федяева В.В. Астрагал понтийский (*Astragalus ponticus* Pall.) на территории ПП «Сальская степь» (Ростовская область) // Живые и биокосные системы. 2014. № 6. URL: <http://www.jbks.ru/archive/issue-6/article-4> (дата обращения: 10.09.2015).
8. Кузьменко И.П., Шмараева А.Н., Федяева В.В. Состояние ценопопуляции редкого вида *Astragalus pubiflorus* DC на территории ПП «Сальская степь» (Ростовская область, Россия) // Охрана окружающей среды и рациональное использование природных ресурсов. Донецк, 2015. С. 233–235.
9. Зозулин Г.М., Федяева В.В. Анализ флоры степной части бассейна реки Дон // Региональные флористические исследования. Л., 1987. С. 20–28.
10. Зозулин Г.М., Федяева В.В. Систематическая структура флоры Нижнего Дона // Изв. СКНЦ ВШ. Естеств. науки. 1985. № 1. С. 75–77.
11. Толмачев А.И. Введение в географию растений. Л., 1974. 244 с.
12. Шмидт В.М. Статистические методы в сравнительной флористике. Л., 1980. 176 с.
13. Федяева В.В., Шишлова Ж.Н., Шмараева А.Н. Современное состояние изученности флоры Нижнего Дона // Изучение флоры Восточной Европы: Достижения и перспективы. М.;СПб., 2005. С. 90–91.

References

1. Khibukhina T.Yu. Nachinaetsya optimizatsiya seti regional'nykh OOPT Rostovskoi oblasti [Starting optimization of the network of regional SPNA of Rostov region]. *Stepnoi byulleten'*, 2014, no 41, pp. 14-16.
2. Fedyaeva V.V. Rastitel'nyi pokrov [The plant cover]. *Prirodnye usloviya i estestvennye resursy Rostovskoi oblasti* [Natural conditions and natural resources of the Rostov Region]. Rostov-on-Don, 2002, pp. 226-282.
3. Balash A.P. Levoberezhnye stepi Nizhnego Manyacha [The left-bank of the Lower Manyach steppe]. *Rastitel'nost' i fauna Dona i Severnogo Kavkaza v sisteme zonal'nykh biologicheskikh i nauchno-proizvodstvennykh razrabotok* [The vegetation and fauna of the Don and the North Caucasus in the zone of biological, scientific and industrial developments]. Rostov-on-Don, 1971, pp. 17-21.
4. *Krasnaya kniga Rostovskoi oblasti. Rasteniya i griby* [The Red Book of the Rostov Region. Plants and fungi]. Ed. 2nd. Vol. 2. Ed. V.V. Fedyaeva. Rostov-on-Don, 2014, 344 p.
5. *Krasnaya kniga Rossiiskoi Federatsii (rasteniya i griby)* [The Red Book of the Russian Federation (plants and fungi)]. Moscow, 2008, 855 p.
6. Fedyaeva V.V., Shmaraeva A.N., Shishlova Zh.N. Sostoyanie populyatsii astragala pontiiskogo (*Astragalus ponticus* Pall.) na territorii PP «Sal'skaya step'» [Population status of Pontus Astragalus (*Astragalus ponticus* Pall.) in the territory of NM "Salsk Steppe"]. *Muzei-zapovednik: ekologiya i kul'tura* [Museum-reserve: ecology and culture]. Vyoshenskaya, 2012, pp. 118-121.
7. Shishlova Zh.N., Shmaraeva A.N., Fedyaeva V.V. Astragal pontiiskii (*Astragalus ponticus* Pall.) na territorii PP «Sal'skaya step'» (Rostovskaya oblast') [Pontic Astragalus (*Astragalus ponticus* Pall.) in the territory of NM "Salsk Steppe" (Rostov Region)]. *Zhivye i biokosnye sistemy*, 2014, no 6. Available at: <http://www.jbks.ru/archive/issue-6/article-4> (accessed 10.10.2015).
8. Kuz'menko I.P., Shmaraeva A.N., Fedyaeva V.V. Sostoyanie tsenopopulyatsii redkogo vida *Astragalus pubiflorus* DC. na territorii PP «Sal'skaya step'» (Rostovskaya oblast', Rossiya) [Status of coenopopulations rare species *Astragalus pubiflorus* DC. on the territory of NM "Salsk Steppe" (Rostov, Russia)]. *Okhrana okruzhayushchei sredy i ratsional'noe ispol'zovanie prirodnnykh resursov* [Environmental protection and rational use of natural resources]. Donetsk, 2015, pp. 233-235.
9. Zozulin G.M., Fedyaeva V.V. Analiz flory stepnoi chasti basseina reki Don [Analysis of the flora of the steppes of the Don River Basin]. *Regional'nye floristicheskie issledovaniya* [Regional floristic studies]. Leningrad, 1987, pp. 20-28.
10. Zozulin G.M., Fedyaeva V.V. Sistematicheskaya struktura flory Nizhnego Dona [The systematic structure of flora of the Lower Don]. *Izv. SKNTS VSH. Estestv. nauki*, 1985, no 1, pp. 75-77.
11. Tolmachev A.I. *Vvedenie v geografiyu rastenii* [An introduction to the geography of plants]. Leningrad, 1974, 244 p.
12. Shmidt V.M. *Statisticheskie metody v sravnitel'noi floristike* [Statistical methods in comparative floristry]. Leningrad, 1980, 176 p.
13. Fedyaeva V.V., Shishlova Zh.N., Shmaraeva A.N. Sovremennoe sostoyanie izuchennosti flory Nizhnego Dona [The current state of knowledge of flora of the Lower Don]. *Izuchenie flory Vostochnoi Evropy: Dostizheniya i perspektivy* [The study of the flora of Eastern Europe: achievements and prospects]. Moscow; Saint Petersburg, 2005, pp. 90-91.

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

ПЕРВЫЙ МЕЖДУНАРОДНЫЙ ЭКОЛОГИЧЕСКИЙ ФОРУМ «У НАС ОДНА ЗЕМЛЯ. В ГАРМОНИИ С ПРИРОДОЙ»

Ассоциация «Живая природа степи» (далее Ассоциация) при поддержке Газпрома РФ и Ростовской области (РО), Благотворительного фонда социального и экологического развития «Наше будущее», телерадиокомпании АСС-ТВ 2–5 октября 2015 г. организовала и провела на Красной Поляне первый Международный экологический форум «У нас одна Земля. В гармонии с природой». В форуме приняли участие руководители Минприроды РФ и РО, Госдумы РФ и РО, РАН (академики М.Я. Маров, М.Ч. Залиханов, Г.Г. Матишов и др.), WWF России, телеканала «Моя планета», заповедника «Кавказский», ялтинского зоопарка «Сказка» и белогорского сафари-парка «Тайган» (Крым); представители ЮНЕСКО, администрации Краснодарского края, Общественных палат РФ и РО, Русского географического общества (РГО), МГУ, ЮФУ, Донского государственного технического ун-та, Чешского сельскохозяйственного ун-та, биосферных заповедников – «Черные земли» и «Ростовский», заповедников – Кабардино-Балкарский высокогорный, Тебердинский и «Утриш», национальных парков – «Приэльбрусье» и Сочинский, Центра восстановления леопарда на Кавказе, Чешского, Ростовского зоопарков, зоопарка в Карлсруэ, Донской публичной библиотеки и других организаций. Помимо России, в форуме участвовали специалисты Германии, Италии, Чехии, Сейшельских островов, Украины. Всего присутствовали более 150 участников. Президентом форума был проф. МГУ Н.Н. Дроздов. Во всех отелях транслировалась конкурсная программа – фильмы, программы и ролики по природоохранной тематике, а все желающие имели возможность круглосуточно просматривать «дневник форума». В центре «Галактика» Ассоциация, минприроды РО и заповедник «Ростовский» развернули фотовыставку «В гармонии с природой».

На церемонии открытия форума выступили генеральный директор Газпрома РО А.М. Узденов, заведующий отделением планетных исследований и космохимии Института геохимии и аналитической химии им. В.И. Вернадского академик РАН М.Я. Маров, вице-президент РГО чл.-корр. РАН

А.А. Чибилев, герой СССР летчик-космонавт А.А. Волков, член Госдумы РФ В.Ф. Гракович, директор WWF РФИ Е. Честин, проф. МГУ С.М. Малхазова, генеральный редактор телеканала «Моя планета» Н.И. Табашников, директор зоопарка в Карлсруэ Клеменс Бекер, 17-кратный чемпион мира по подводному плаванию Ш.В. Карапетян и другие. Состоялся телемост форума с МКС, и космонавт С.А. Волков с орбиты рассказал о красоте нашей Земли, пожелал участникам форума успешной деятельности по ее сохранению. Иосиф Кобзон исполнил ряд песен, и одна из них – «Земля у нас одна», сразу же стала гимном форума. Сообщения специалистов сопровождались выступлениями певца Санкт-Петербургского Михайловского театра оперы и балета Методие Бужора, солистки Пражской оперы Светланы Феодуловой, коллектива Кубанской филармонии, детского танцевального коллектива г. Сочи, других творческих лиц и групп.

На форуме прошли тематические лекции и выступления участников, просмотры конкурсных работ, мастер-классы. За круглым столом «Бизнес и экология» обсудили вопросы участия бизнеса в решении экологических проблем. Большой интерес вызвали лекции академика М.Я. Марова и профессора Института астрономии РАН О.Б. Длужневской о современных достижениях в изучении Вселенной, отдельных её планет, о возможности существования жизни в космическом пространстве; большое внимание эти ученые уделили зависимости экологической ситуации на Земле от космических объектов. А.А. Волков показал и прокомментировал снятые им в космосе видеоматериалы, рассказал об экологических исследованиях космонавтов, о наблюдаемом из космоса бедственном состоянии природы во многих регионах. Состоялся второй сеанс связи участников с МКС по телефону, и космонавты интересовались работой форума. Президент факультета иностранных языков и регионоведения МГУ доктор филологических наук С.Г. Тер-Минасова проанализировала искажения в терминологии и использовании русского языка, показала негативное их влияние на формирование экологического сознания и культуры населения. В.Ф. Гракович рассмотрел проблему измене-

ния климата, вызванного антропогенными выбросами в атмосферу парниковых газов, и предпринимаемые мировым сообществом меры по контролю за этими выбросами.

Директор Института степи УрО РАН, чл.-корр. РАН А.А. Чибилёв дал историческую и современную характеристику евразийских степей, показав их роль на Земле и в формировании цивилизаций людей; рекомендовал комплекс мероприятий по сохранению живой природы степной зоны. Чл.-корр. РАН директор ИПЭЭ им. А.Н. Северцова В.В. Рожнов рассказал о проводимых институтом работах по сохранению редких и исчезающих животных, в том числе амурского тигра, амурского и переднеазиатского леопардов, ряда других животных. Председатель ЮНЦ РАН академик РАН Г.Г. Матишов уделил внимание изменению климата и его влиянию на природу и население.

Многие участники говорили о несовершенстве законодательной, нормативно-правовой основы охраны природы. Продолжающееся реформирование природоохранной деятельности, научных, образовательных и других структур заставляет искать новые возможности в сохранении биоресурсов. Председатель Ассоциации В.А. Миноранский отметил необходимость адаптации сложившихся в прошлом систем охраны природы и природопользования к современным условиям, разработки новых подходов и форм сохранения и использования биоразнообразия. Им было уделено внимание сохранению и восстановлению исчезающему в России сайгака, разработанной в Ассоциации биотехнологии размножения этого вида в искусственных условиях, позволяющую содержать его в вольерах, питомниках, зоопарках, на фермах.

Участники форума отмечали, что большую роль в сохранении и восстановлении природных экосистем с их биоразнообразием играют особо охраняемые природные территории (ООПТ). Некоторые из исчезающих животных сохранились только в них, многие редкие и ценные виды здесь размножаются и отсюда расселяются на соседние используемые людьми территории, обогащая их биоразнообразие и биоресурсы. К сожалению, в ряде регионов ООПТ крайне недостаточно (в РО 2,2 % территории).

Успешное решение экологических проблем, как отмечали выступающие, требует глубоких биологических, медицинских и других знаний, наличия квалифицированных специалистов. Качество экологической подготовки в школах и вузах в XXI в. снизилось. В природоохранных структурах (региональных минприроды, Росприроднадзора и др.) нередко биологов заменяют юристы, бывшие полицейские, экономисты, строители и т.д. В стране необходимо

формировать непрерывное экологическое образование и воспитание населения, начиная с дошкольного возраста, в школе, вузах, на производстве.

Важную роль в формировании экологических знаний, мышления и культуры среди населения играют зоопарки, национальные парки и иные ООПТ, питомники, экотуризм, СМИ и другие структуры, представители которых участвовали в работе форума. Хорошим примером этому являются Ассоциация и заповедник «Ростовский», регулярно проводящие различные природоохранные акции для населения, ежегодные экологические фестивали «Воспетая степь». Данный опыт заслуживает широкого распространения. К сожалению, зоопарки и питомники, играющие важную роль в сохранении исчезающих и ценных животных, имеют слабую нормативно-правовую базу.

В целом все участники форума в своих выступлениях констатировали ухудшение экологической ситуации. Это проявляется в изменении климата, масштабных вырубках лесов, загрязнении водоемов, почв и воздуха, обмелении и пересыхании водоемов и других явлениях, в большинстве случаев связанных с деятельностью людей. Они нарушают эволюционно сформировавшийся гомеостаз природных систем, что приводит к глубоким перестройкам в живой природе, отрицательно влияет на здоровье, экономику, культуру населения и другие основные показатели. Без их разрешения невозможно успешное развитие и благополучие населения отдельных регионов, стран, континентов. Успешное решение экологических проблем является важнейшим направлением в жизнедеятельности каждого человека и всего человечества. Участники форума отмечали необходимость их решения всеми гражданами, государственными и общественными структурами различных уровней. С экологическими проблемами можно справиться только сообща. Они должны разрабатываться и решаться комплексным сотрудничеством ученых и специалистов различных естественных, технических, гуманитарных и других направлений. Важнейшее значение в этой деятельности отводится формированию экологических знаний, мышления и культуры у широких слоев населения. Конструктивность форума подчеркивалась конкретными проектами охраны природы, попытками найти ответы на сложные вопросы о том, что ждет человечество в будущем.

В итоговой резолюции форума отмечается, что в настоящее время экологические проблемы являются важнейшими на Земле, определяющими дальнейшее существование и развитие человечества, и их решению необходимо уделять первоочередное внимание. ГД и СФ РФ, Правительству РФ, администрациям и ЗС регионов целесообразно регулярно

но рассматривать экологические проблемы и обязательно учитывать экологические составляющие при принятии различных решений и законодательных актов.

В Правительстве и Госдуме России обсуждается проблема об обеспечении различных структур и отраслей соответствующими им квалифицированными специалистами. Эти вопросы особенно остро стоят в природоохранных и природоиспользующих структурах, где недостаточно или полностью отсутствуют квалифицированные экологи, биологи и другие специалисты. Данное положение требует обязательного и быстрого решения.

Учитывая множество экологических проблем, нередко их большую сложность, недостаток квалифицированных специалистов и другие причины, важным является объединение усилий ученых, государственных структур, бизнеса, производителей, общественности в решении вопросов сохранения биоразнообразия и биоресурсов. Примером этому является ассоциация «Живая природа степи».

Министерствами образования регионов и РФ в учебных программах школ, специальных средних и высших учебных заведений целесообразно расширить объемы дисциплин по познанию природы и рациональному использованию её ресурсов, сохранению биоразнообразия, экологии человека; восстановить в вузах факультеты повышения квалификации по биологии и экологии с обязательным их прохождением преподавателями вузов, школ, других учебных заведений; организовать в ведущих вузах факультеты «Экология и повышение эффективности использования природных ресурсов» по экологической переподготовке ведущих специалистов основных отраслей страны с высшим образованием и выдачей вторых дипломов о высшем экологическом образовании. Участники форума считают возможным рекомендовать Минобрнауки и Минкультуры РФ и регионов в своей работе уделить больше внимания развитию гуманитарных направлений с экологическими составляющими в образовании, практической деятельности.

Законодательные, нормативно-правовые основы охраны природы, как считают участники форума, нуждаются в серьезной доработке и улучшении. Это несовершенство вместе с недостатком квалифицированных специалистов приводит к негативным экологическим последствиям в сохранении и устойчивом использовании природных ресурсов (включая биоразнообразие и биоресурсы), к развитию коррупции.

Участниками форума показано, что основные функции биоразнообразия – средообразующая,

продукционная, информационная и духовно-эстетическая, без которых невозможно существование живой природы и людей. В целях его сохранения рекомендуется повысить к ним внимание Минприроды РФ и регионов, повсеместно довести сеть ООПТ до рекомендуемых учеными и международными природоохранными организациями норм. Система степных ООПТ должна стать частью нового землеустройства степных регионов. Сотрудники ООПТ предложили ряд мероприятий, способствующих лучшему выполнению ими функций по сохранению биоразнообразия.

Форум констатировал низкий уровень государственного мониторинга живой природы, который является необходимым условием её сохранения. Минприроды РФ и регионам рекомендовано уделить данному вопросу должное внимание.

На грани исчезновения в России находится последний степной представитель многочисленных в прошлом копытных – сайгак. Ассоциация разработала биотехнологию его разведения в искусственных условиях и имеет самую крупную в России самовоспроизводящуюся группировку. Участники форума считают целесообразным принятие Минприроды РФ целевой федеральной программы по сохранению сайгака в России, включая содержание и разведение его особей в искусственных условиях, увеличение количества питомников.

Зоопарки и питомники играют важную роль в формировании экологических знаний и мышления у широких слоев населения, прежде всего молодежи. В последние годы эта работа расширяется и нуждается в государственной и иной поддержке. Заслуживает поддержки развитие экопросвещения и экотуризма на базе ООПТ.

В резолюции форума отмечается, что в России начинают появляться примеры спонсорской поддержки охраны живой природы со стороны бизнеса. Это направление заслуживает внимания и нуждается в стимулирующем законодательном и правово-нормативном эффективном оформлении.

Участники форума выразили благодарность ассоциации «Живая природа степи», Газпрому РФ и РО, Благотворительному фонду социального и экологического развития «Наше будущее» и телерадиокомпания АСС-ТВ за проявленную инициативу в организации и высокий уровень проведения Международного экологического форума «У нас одна Земля. В гармонии с природой». Они надеются, что работа форума будет способствовать более активному решению экологических вопросов, а подобные форумы в дальнейшем станут регулярными.

V СЪЕЗД БИОФИЗИКОВ РОССИИ

Если XX в. считался веком физики, то XXI в. по праву называется веком биологии. Действительно, что может быть важнее Жизни? Жизни во всех ее проявлениях? Наука прошлого века открыла тонкую структуру клетки, природу гена, мир биохимических процессов. Тогда же были созданы мощные физические методы исследования биополимеров и клеток – электронная и конфокальная микроскопия, рентгеноструктурный анализ, лазерная спектроскопия, флуоресцентные методы и многие другие. Но в полной мере исследование физических принципов функционирования живых систем с применением новых исследовательских методов и приборов разворачивается в настоящее время.

Проблемам современной биофизики и тенденциям ее развития в мире и нашей стране был посвящен V съезд биофизиков России, состоявшийся с 4 по 9 октября 2015 г. в Ростове-на-Дону на базе Южного федерального университета (ЮФУ). Научные направления съезда включали все разделы биофизической науки: изучение структуры и динамики белков, нуклеиновых кислот, биомембран и целых клеток, механизмы действия молекулярных моторов и трансформации энергии в митохондриях и фотосинтетическом аппарате, биофизику одиночных молекул и сложных систем, медицинскую и экологическую биофизику, фотобиологию, действие физико-химических факторов на биологические системы, нейробиологию, нанобиотехнологию и биоинформатику, новые методы биофизических исследований, а также проблемы биофизического образования.

С приветственным словом выступили проректор ЮФУ по организации научной и проектно-инновационной деятельности И.К. Шевченко, научный руководитель ЮФУ акад. В.И. Минкин, председатель научного совета РАН по биологической физике чл.-корр. РАН А.Б. Рубин, акад. Ю.А. Владимиров, директор Института теоретической и экспериментальной биофизики РАН чл.-корр. РАН Г.Р. Иваницкий и главный научный сотрудник ЮФУ проф. А.Б. Узденский.

В работе съезда участвовали более 400 ученых из разных научных учреждений и вузов страны от Санкт-Петербурга до Владивостока. Наиболее представительными были делегации Москвы, Пушкино, Санкт-Петербурга, Нижнего Новгорода, Ростова-на-Дону, Воронежа, Красноярска, Казани и Екатеринбурга. На съезде было заслушано

50 пленарных лекций и 270 секционных докладов. Также были представлены 120 стендовых докладов.

В лекции чл.-корр. РАН А.Б. Рубина (Москва) был рассмотрен ряд ключевых проблем современной биофизики и намечены перспективы ее развития. Значительное внимание на съезде было уделено проблемам молекулярной биофизики. Профессор В.А. Твердислов (Москва) развил концепцию о роли хиральности как фундаментального фактора в построении структур белков и нуклеиновых кислот. Он постулировал, что знакопеременные хиральные последовательности формируют «хиральный каркас» биологических макромолекул, необходимый для построения молекулярных машин. Профессор В.А. Намиот (Москва) рассказал о дальноте действующих взаимодействиях, лежащих в основе принципов молекулярного узнавания на разных уровнях строения биосистем. В докладе профессора К.В. Шайтана (Москва) были рассмотрены вариационные принципы механики и неравновесной термодинамики в проблеме конформационных движений и фолдинга биополимеров. Чл.-корр. РАН А.В. Финкельштейн (Пушино) обсудил проблемы формирования и упаковки вторичных структур белков, возникающие в связи с так называемым парадоксом Левинталя. В докладе профессора А.К. Цатуряна (Москва) были рассмотрены молекулярные механизмы сокращения поперечно-полосатых мышц и регуляции этого процесса. Проблеме регуляции мышечного сокращения и роли малых белков теплового шока был посвящен доклад чл.-корр. РАН Н.Б. Гусева. Профессор Ф.И. Атауллаханов (Москва) рассказал о новом молекулярном механизме разделения хромосом при делении клеток.

Профессор Л.Н. Галль (Санкт-Петербург) привела теоретические соображения о роли структурирования воды в функционировании живых биологических систем. Доклад профессора А.А. Красновского (Москва) был посвящен вопросам фотогенерации и регистрации синглетного молекулярного кислорода в растворах и в клетках. Профессор А.Ф. Ванин (Москва) обосновал роль динитрозильных комплексов железа с тиол-содержащими лигандами в качестве «рабочей формы» регуляторной активности монооксида азота.

В докладе профессора В.Д. Лахно (Пушино) приведены данные о переносе энергии и заряда в одиночных молекулах ДНК. Этот эффект может

использоваться при разработке элементов нано-биоэлектроники. Профессор Д.Ю. Нечипуренко (Москва) рассмотрел взаимодействие белков с ДНК и показал механохимический характер разрыва молекул ДНК при действии ультразвука. Профессор М.С. Гельфанд (Москва) представил результаты секвенирования бактериальных геномов, которые показали быструю эволюцию регуляторных систем в этих клетках.

Другой уровень изучения биосистем – биофизика клеток. Профессор В.Ф. Антонов (Москва) сформулировал липидоцентрическую концепцию пермеабилзации модельных и клеточных мембран и ее роли в регуляции ионной проницаемости живых клеток. В докладе профессора Р.Г. Ефремова (Москва) были приведены результаты вычислительных экспериментов по моделированию клеточных мембран, рассматриваемых как стохастические динамические системы. О роли белков семейства BAR в формировании клеточной мембраны сообщила профессор О.С. Соколова (Москва). Академик Ю.А. Владимиров (Москва) представил новый взгляд на значение свободнорадикальных процессов в повреждении клеток и программированной смерти клеток – апоптозе, а также в механизме терапевтического действия низкоинтенсивного лазерного излучения. Профессор А.Б. Узденский (Ростов-на-Дону) рассмотрел сигнальные и эпигенетические механизмы реакций нервных и глиальных клеток на фотодинамическое воздействие. Профессор В.Ю. Макеев (Москва) сообщил о роли ряда факторов транскрипции в формировании разных типов тканей. О новых методах высокоразрешающей субдифракционной флуоресцентной микроскопии рассказал профессор А.П. Савицкий (Москва).

Значительное внимание на съезде было уделено проблемам медицинской биофизики. Академик И.Д. Волотовский (Минск) обобщил данные о биофизических механизмах функционального контроля физиологического состояния стволовых клеток и гипоксической активации синтеза порфиринов и пролиферативных процессов. В докладе профессора А.С. Соболева (Москва) были приведены данные об особенностях проникновения наночастиц полиплексов, несущих терапевтические гены, в опухолевые ткани и ядра раковых клеток. Профессор В.Н. Морозов (Пушино) представил последние разработки биологических наноаэрозолей. Профессор Д.А. Филимонов (Москва) рассмотрел биофизические основы создания новых фармакологических препаратов и результаты компьютерного анализа: от поиска мишеней до конструирования новых лекарств. В докладе профессора Е.Е. Фесенко (Пушино) были рассмотре-

ны современные биофизические подходы к криоконсервации органов и тканей. Профессор Ю.А. Рочев (Пушино) сообщил о последних разработках адаптивных материалов для клеточных технологий и тканевой инженерии.

В докладе академика В.А. Шувалова (Пушино) были рассмотрены начальные стадии разделения зарядов в реакционных центрах фотосинтеза, а профессор Г.Ю. Ризниченко представила многочастичные модели первичных процессов фотосинтеза. Профессор В.А. Воденев (Нижний Новгород) рассказал, как генерируются и распространяются электрические сигналы у высших растений, а профессор А.А. Булычев (Москва) – как осуществляется мембранный транспорт и передача сигналов в растительной клетке при локальном световом и механическом воздействиях.

Ряд докладов был посвящен проблемам нейробиологии. Профессор Ю.М. Романовский (Москва) рассмотрел динамику и энергетику внутриклеточного транспорта, а профессор В.П. Зинченко (Пушино) сообщил, как кальций-связывающие белки регулируют спонтанную синхронную активность ГАМК-ергических нейронов мозга. Профессор Г.В. Максимов (Москва) рассмотрел биофизические аспекты процессов демиелинизации при возбуждении нервного волокна. Обсуждению физических аспектов процессов сознания и мышления был посвящен доклад чл.-корр. РАН Г.Р. Иваницкого (Пушино). Докладчиком приведены данные об участии в этих процессах не только нейронных сетей, но также глиальных сетей и межклеточного пространства. Согласно гипотезе автора, межклеточное пространство вносит вклад в формирование кратковременной памяти. В докладе В.Д. Цукермана (Ростов-на-Дону) рассмотрены нейродинамические основы реляционной эпизодической памяти. Профессор В.Г. Яхно (Нижний Новгород) обсудил проблемы распознавания и восприятия сигналов в живых системах и подходы к моделированию этих процессов. Профессор Д.С. Чернавский (Москва) провел сопоставление ряда теоретических подходов к моделированию мышления (естественно-конструктивный, основанный на теории графов и когнитомный) и показал, как эти подходы дополняют друг друга.

Вопросы биофизики сложных систем обсуждались в докладах ряда участников съезда. В докладе академика А.Г. Дегерменджи (Красноярск) представлены новые направления в биофизике водных экосистем, связанные с созданием адекватных математических моделей на основе теории подобия и поиском соответствующих биотестов. Академики И.И. Гительзон, А.Г. Дегерменджи и профессор С.И. Барцев (Красноярск) с со-

трудниками разработали серию эвристических (нейросетевых) моделей различных биосистем, позволяющих глубже понять ряд ключевых проблем биофизики. Согласно работам профессора А.Б. Медвинского (Пушино), хаотические колебания могут играть существенную роль в динамике популяций. Профессор С.И. Погосян (Москва) разработал биофизические подходы к определению первичной продукции водоемов. Академик Н.А. Колчанов (Новосибирск) рассказал о результатах экспериментально-компьютерного анализа и моделирования регуляторных генетических систем, участвующих в эволюции животных, в частности, в уникальных экспериментах по одомашниванию лисиц, крыс и других животных.

Профессор О.Э. Соловьёва (Екатеринбург) представила результаты математического моделирования миокарда.

Следует отметить четкую работу по организации съезда, проведенную сотрудниками Московского и Южного федерального университетов А.Б. Рубиным, А.Б. Узденским, Н.Г. Есиповой, М.В. Рудковским, Г.Ю. Ризниченко, В.С. Малышевским, С.С. Хрущевым, В.Д. Ковалевой, Е.В. Бережной, М.А. Негинской, С.А. Шарифулиной, С.В. Демьяненко, а также сотрудниками Южного федерального университета.

Проведение V съезда биофизиков России поддержано грантами Южного федерального университета и РФФИ № 15-04-20706.

А.Б. Узденский

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

К 70-ЛЕТИЮ ЮРИЯ АЛЕКСАНДРОВИЧА ФЕДОРОВА

В октябре 2015 г. Юрию Александровичу Федорову – доктору географических наук, профессору, известному ученому-исследователю в области географии, геохимии, гидрологии, изотопии природных вод и ландшафтоведения исполняется 70 лет.

В настоящее время он работает в должности главного научного сотрудника – заведующего кафедрой физической географии, экологии и охраны природы Института наук о Земле Южного федерального университета.

Среди наиболее важных из достигнутых Юрием Александровичем и его коллективом научных результатов можно назвать следующие:

- исследован химический и изотопный состав подземных вод и рассолов Северного Кавказа и разработаны регрессионные модели, с помощью которых можно определить генезис, температуру залегания водных флюидов и литологический состав водовмещающих пород;

- осуществлен прогноз наличия залежей углеводородов на ряде локальных площадей в зоне развития соленосных отложений Северного Кавказа;

- разработана модель эволюции изотопного и химического состава серы и кислорода сульфатов шахтных вод Восточного Донбасса. Эти выводы имеют большое практическое значение в связи с санацией угольных шахт и затоплением выработок;

- открыт изотопный эффект, связанный с синхронным фракционированием стабильных изотопов серы сульфатных и углерода гидрокарбонатных ионов в воде оз. Байкал, вызванным мощным антропогенным воздействием на экосистему озера;

- предложено три типа сопряженной генерации метана и сероводорода в донных отложениях водоемов и водотоков;

- разработаны регрессионные модели, адекватно отражающие связь содержания метана с его потоками в атмосферу;

- на примере озера Большой Тамбукан разработана изотопно-химическая модель сопряженного во времени и пространстве сульфидообразования;

- по разрезу донных отложений Азовского моря определена скорость осадконакопления и её временная динамика за последние полвека. Впервые введено понятие «слой антропогенного воздействия»;

- выявлено наличие факторов загрязнения, очерчены зоны антропогенного влияния крупных про-

мышленных объектов (Байкальский целлюлозно-бумажный комбинат, Астраханский газоконденсатный комплекс и др.) на воду и донные отложения;

- разработана и опробована методика изотопно-химической идентификации разливов нефти и нефтепродуктов;

- на примере р. Северная Двина впервые выполнено зонирование донных отложений по их потенциальной способности к эмиссии ртути.

Ю.А. Федоров является руководителем гранта Президента РФ «Ведущие научные школы» (с 1996 г. по настоящее время), грантов РФФИ, контрактов Минобрнауки, НОЦ «Глобальные и региональные географо-экологические исследования и инновационные технологии», Международной российской французской ассоциированной лаборатории «Трансформация загрязняющих веществ в аквальных экосистемах и оценка их уязвимости». Юрий Александрович также автор и соавтор более 400 статей, монографий и учебных пособий. Он – эксперт РФФИ и Минобрнауки РФ; член двух диссертационных советов по географическим и другим наукам, член редколлегии журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки», ученого совета Русского географического общества. Им подготовлено 24 кандидата и 1 доктор наук, в настоящее время под его научным руководством работают 7 аспирантов из РФ и Франции.

Ю.А. Федоров – автор новых курсов лекций для студентов, также он выступает с заказными научными докладами на международных конференциях и лекциями в российских и зарубежных вузах, имеет высокий индекс цитирования в российских и международных базах данных.

Удостоен почетных грамот руководителей Росгидромета и Минобрнауки, а также памятных медалей И.П. Бородин и Ф.П. Литке Русского географического общества. За многолетнюю плодотворную работу по поддержке фундаментальных научных исследований в России и экспертную деятельность Юрию Александровичу вручены почетный диплом, благодарственные письма и свидетельство от руководства РФФИ, Минобрнауки и председателя Совета по грантам Президента РФ. Академией естественных наук ему присвоено почетное звание основателя научной школы.

С.П. Чернышева

Редакция и редколлегия журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион» серии «Естественные науки» сердечно поздравляют юбиляра и желают ему здоровья и творческого долголетия!

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Редакция и редколлегия журнала сердечно поздравляют:

Гуфана Юрия Михайловича – доктора физико-математических наук, профессора ЮФУ, заслуженного деятеля науки, выдающегося специалиста в области физики конденсированных состояний, опубликовавшего 200 научных статей и 6 монографий, воспитавшего 18 кандидатов и 14 докторов наук, члена редколлегии журнала, активно способствующего интеграции ученых разных регионов для совместного решения научных проблем, – с 75-летием.



Ворович Любовь Семеновну – кандидата физико-математических наук, доцента, специалиста в области гидромеханики, автора 40 работ, редактора журнала, более 20 лет отдавшую издательскому делу, – со знаменательным юбилеем.



Чернышеву Светлану Петровну – кандидата физико-математических наук, доцента, опубликовавшую 250 научных статей и 2 монографии, воспитавшую 15 кандидатов наук, редактора, более 20 лет отдавшую работе в нашем журнале, способствующую улучшению качества научных публикаций, – со знаменательным юбилеем.

Всем юбилярам от редакции и редколлегии – пожелания крепкого здоровья на долгие годы, успехов во всех начинаниях, покорения новых творческих вершин, благополучия им и их близким!

Указатель материалов, опубликованных в журнале
«Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион.
Естественные науки» в 2015 г.

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Абшаев М.Т., Меркулова И.В.</i> Оценка качества реализации российской автоматизированной технологии противорадовой защиты	4
<i>Авсянкин О.Г.</i> К вопросу об ограниченности многомерных интегральных операторов с однородными ядрами	3
<i>Акопьян В.А., Чебаненко В.А., Захаров Ю.Н., Рожков Е.В., Лутохин А.Г., Бунин М.А., Родинин Е.С., Кузнецов В.Г.</i> Электрический отклик неполяризованных пластин из горячепрессованной керамики ЦТС-19 на трехточечное механическое нагружение при нормальной температуре	4
<i>Аль Наджм М.Н.</i> О нетепловом радиоизлучении от протяженных галактических дисков	3
<i>Аль Наджм М.Н., Прудских В.В.</i> Электродинамические свойства ударных волн непрерывного типа в запыленной плазме	4
<i>Ахмедов Н.К., Мехтиев М.Ф., Шахвердиева Г.Н.</i> Анализ осесимметричной задачи теории упругости для неоднородной трансверсально-изотропной конической оболочки	2
<i>Батищев В.А., Николаенко Ю.С., Пискунов А.С.</i> Влияние наночастиц на перенос тепла в пограничном слое Марангони с внешним потоком	2
<i>Белявский Г.И., Данилова Н.В.</i> Расчёт справедливой цены европейского опциона в модели (B,S)-рынка с барьером, основанной на случайном блуждании	4
<i>Белявский Г.И., Кондратьева Т.Н., Мисюра В.В.</i> Нейросетевое имитационное моделирование скачкообразных процессов на примере устойчивых и умеренно устойчивых процессов	3
<i>Вагабов А.И.</i> Одна спектральная задача для дифференциального пучка четвертого порядка с четырехкратной характеристикой и краевыми условиями распадающегося типа	1
<i>Ватульян А.О., Каишталян Д.О.</i> Об определении локализованной зоны деструкции в упругой балке	4
<i>Галабурдин А.В.</i> Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке	1
<i>Галаско А.А., Зубов Л.М.</i> Нелинейная теория кручения упругих цилиндров с винтовой дислокацией	4
<i>Грезин В.С., Новосядлый В.А.</i> О проблеме определения возраста участника социальной сети	1
<i>Деундяк В.М., Жданова М.А.</i> О решении задачи оценивания скрытых полумарковских моделей фергюсовского типа	3
<i>Деундяк В.М., Чекунов Е.С.</i> Алгоритм нахождения минимального элемента n -мерной решетки Бернштейна над полем рациональных функций $F_{2^m}(x)$	2
<i>Долгих Т.Ф., Жуков М.Ю., Ширяева Е.В.</i> Нахождение стационарных решений задачи о конвекции Рэлея – Бенара – Кармана	4
<i>Жарашуев М.В., Гергоков А.Х.</i> Методика автоматической идентификации площадки засева градовых облаков	3
<i>Жуков М.Ю., Морад А.М.</i> Движение слоя идеальной несжимаемой жидкости на внешней поверхности вращающегося цилиндра	4
<i>Зеленцов В.Б., Митрин Б.И., Айзикович С.М., Кэ Л.Л.</i> Неустойчивость скользящего термофрикционного контакта жесткого тела с упругим покрытием, содержащим пьезокерамическую прослойку	4
<i>Зинченко А.Б.</i> Решения двойственно симплексных игр	1
<i>Камалян Р.З., Камалян С.Р.</i> Некоторые результаты исследования взрывов цилиндрических зарядов в двухслойной среде	1
<i>Каменецкий Е.С., Орлова Н.С., Волик М.В.</i> Исследование влияния амплитуды и частоты вибраций на структуру кипящего гранулированного слоя	3
<i>Клепфиш Б.Р.</i> Анализ чувствительности односекторной модели экономики, обладающей магистральным свойством	3
<i>Климентов Д.С.</i> Стохастический критерий k -движения регулярной поверхности положительной гауссовой кривизны в трёхмерном евклидовом пространстве	4

Куракин Л.Г., Мелехов А.П., Островская И.В. Об устойчивости стационарного вращения системы то- чечных вихрей внутри круговой области	4
Макаров С.С., Устинов Ю.А. Крутильные колебания оболочки вращения со сложной формой меридиана....	2
Назирова А.Э., Усов А.Б. Моделирование вертикальной маркетинговой системы с учетом возможной кор- рупции	2
Нестеров Н.Ю. Весовые пространства векторнозначных аналитических функций	3
Норкин М.В. Динамика внутренней свободной границы жидкости на малых временах при вертикальном ударе кругового цилиндра, полностью погруженного в жидкость.....	1
Павлов И.В., Назарько О.В. Теоремы о деформированных мартингалах: разложение Рисса, caracteriza- ция локальных мартингалов, вычисление квадратичных характеристик.....	1
Паланджянц Л.Ж., Попова А.А., Куижева С.К. О распределении концентраций ионов в двойном электри- ческом слое.....	3
Пожарский Д.А., Замулина Т.Г. Контактная задача с силами трения для трансверсально изотропного полу- пространства.....	1
Пожарский Д.А., Полтинников В.И. Контактные задачи для составного полупространства	2
Полякова Н.М. Исследование обобщенной модели формирования рН-градиента при изоэлектрофокуси- ровании	1
Потетюно Э.Н. Высокочастотная асимптотика волнового движения жидкости, вызванного вибрацией пластины, лежащей на поверхности жидкости	4
Рамазанов А.-Р.К., Магомедова В.Г., Ибрагимова Б.М. О взаимосвязи модулей непрерывности со знако- чувствительным весом непрерывной на отрезке функции.....	2
Рыжский А.И., Усов А.Б. Игры Гермейера при принуждении в трехуровневой системе контроля водяного балласта судов.....	1
Седенко В.И., Богачев Т.В., Алексейчик Т.В. Существование слабых решений моделей Маргерра – Вла- сова термоупругих колебаний пологих оболочек с малой инерцией продольных перемещений	2
Скороходов В.А., Шевелев М.В. Задача о максимальном потоке в сетях с потерями в вершинах	2
Сметанин Б.И. Горизонтальный удар вертикальной пластинки, полностью погруженной в несжимаемую жидкость	4
Собисевич Л.Е., Собисевич А.Л., Канониди Х.Д., Канониди К.Х., Лиходеев Д.В., Преснов Д.А. О дила- тантных образованиях, участвующих в формировании корневых структур и выводных каналов грязевых вулканов	3
Ханин Д.И. Решение дискретных двумерных уравнений типа свёртки на больших прямоугольниках	4
Хубежты Ш.С., Цуцаев А.О. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов, имеющих почти га- уссовскую степень точности.....	2
Цветкович Л., Дорословачки К., Крукиер Б.Л., Крукиер Л.А. Улучшение оценки максимум нормы об- ратных блочных матриц Некрасова.....	2
Чебаков М.И., Абрамович М.В., Колосова Е.М. Контактная задача для трехслойного сферического шар- нира	3
Чеголин А.П. Интегралы и производные дробного порядка в классах Гельдера на прямоугольнике	1

ХИМИЧЕСКИЕ НАУКИ

Кравцов А.А., Сысоев И.А., Блинов А.В., Ясная М.А., Селеменова Д.Г., Арефьева Л.П. Исследование влияния природы растворителя на структуру и фазовый состав наноразмерного диоксида титана.....	2
Леонтьева Д.В., Смирнова Н.В. О кинетике электрохимического окисления 5-гидроксиметилфурфурола и 2,5-диформилфурана на платиновом электроде в водной среде	4
Плиева А.Т., Аббаева И.Н., Эмануилиди С.Е., Арутюнянц А.А. Исследование производных акридина электрохимическими методами	2
Хуссейн Х.Х.Х., Семченко В.В., Хентов В.Я. Влияние поверхностно-активных веществ на реакцию взаимодействия органического лиганда с поверхностью металла в углеводородах	2

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

Кравченко В.А., Малай Н.Ф., Шурупов В.Г. Продуктивность подсолнечника в зависимости от норм мине- рального питания	4
--	---

Луданова Е.В., Малай Н.Ф., Шурупов В.Г. Влияние густоты стояния растений на продуктивность подсолнечника.....	4
Малиновкин А.В. Новые находки рыжей вечерницы (<i>Nyctalus noctula</i>) в г. Ростове-на-Дону	2
Миноранский В.А. Ситуация с Красными книгами Российской Федерации и регионов	4
Миноранский В.А., Малиновкин А.В. Нетопырь Куля (<i>Pipistrellus kuhlii</i> Kuhl.) в Ростовской области	2
Миноранский В.А., Тихонов А.В., Малиновская Ю.В. Мониторинг гнездящихся околотовных птиц на острове Прибрежном заповедника «Ростовский»	4
Мирзоев Э.М.-Р., Магомедов И.А. Борьба с опустыниванием земель аридных территорий методом азирации почв	3
Морозова М.А., Федоров Ю.А. Роль сульфитредуцирующих клостридий в патологии у рыб	1
Ошуркова Ю.Л., Соболева Е.Н. Оценка состояния системы гемостаза у коров при клинической форме мастита	2
Полоус В.С., Шурупов В.Г. Адаптивные способы основной обработки почвы в звене зернопропашного севооборота	3
Сибиль И.В., Малай Н.Ф., Шурупов В.Г. Десикация подсолнечника	4
Сухоносенко Д.С. Анализ характера влияния градостроительной структуры на особенности размещения гнездовых поселений и поведения серой вороны (<i>Corvus cornix</i>) в городах Волгоградской области различной величины	3
Шмараева А.Н., Федяева В.В., Шишлова Ж.Н. Таксономическая структура флоры памятника природы Ростовской области «Сальская степь».....	4
Шмараева А.Н., Шишлова Ж.Н., Федяева В.В. О новых находках <i>Galium volhynicum</i> Pobed. и <i>Cymbopachasma borysthenica</i> (Pall. ex Schlecht.) Klok. & Zoz в Ростовской области.	1

НАУКИ О ЗЕМЛЕ

Бакаева Е.Н., Никаноров А.М. Биологические подходы к оценке экотоксикологического состояния водных экосистем	1
Гарькуша Д.Н., Фёдоров Ю.А., Тамбиева Н.С., Крукиер М.Л., Калманович И.В. Оценка эмиссии метана водными объектами Ростовской области	3
Доценко И.В., Фёдоров Ю.А., Михайленко А.В., Дмитрик Л.Ю. О связи содержания ртути и органического вещества в донных отложениях по профилю река Дон – Азовское море.....	3
Искендеров М.Я. Экомелиоративное состояние орошаемых земель в Приараксинской зоне Нахичеванской Автономной Республики.....	3
Коханистая Е.В., Хоружая Т.А. Современный уровень солевого загрязнения Пролетарского и Веселовского водохранилищ	2
Крыжевич М.И., Зубкова П.С., Шипкова Г.В. Радиловский болотный массив: состояние и геоэкологические проблемы	1
Петренко И.Н. Оценка масштабов массопереноса флюидов и химических элементов в разрабатываемой газоконденсатной залежи.....	1
Сарахова М.А., Якимов А.В. К оценке современного экологического состояния реки Терек в пределах Кабардино-Балкарской Республики.....	3
Собисевич Л.Е., Потемка Э.П., Собисевич А.Л., Канониди Х.Д., Канониди К.Х., Преснов Д.А., Суворова И.И. Сейсмичность Крымско-Кавказского региона (по результатам инструментальных наблюдений гидродинамических и сейсмических процессов).....	2
Фёдоров Ю.А., Доценко И.В., Михайленко А.В. Поведение тяжелых металлов в воде Азовского моря во время ветровой активности.....	3
Хорошевская В.О. Распределение ванадия, никеля и молибдена в донных отложениях Таганрогского залива	3
Шишкина Д.Ю. Тяжелые металлы в почвах урбандолиндов г. Ростова-на-Дону	2

МЕДИЦИНА

Алабут А.В., Сикилинда В.Д., Чесников С.Г., Тимошенко М.Е., Скаржинский А.А., Хаммад М.О.Х. Анализ осложнений эндопротезирования коленного сустава	1
---	---

Друккер Н.А., Линде В.А., Зенкина З.В., Некрасова М.Г., Шкотова Е.О., Кулакова В.А., Ганиковская Ю.В. Современные аспекты метаболических нарушений в околоплодных водах при ранних преждевременных родах	2
Кит О.И., Димитриади С.Н., Франциянц Е.М., Ушакова Н.Д. Нефропротективное действие паранефральной новокаиновой блокады при резекции почки в условиях тепловой ишемии	3
Крукиер И.И., Дегтярева А.С., Нарезная Е.В., Авруцкая В.В., Никашина А.А., Кравченко Л.В., Кухта О.И. Азотистый обмен плаценты и околоплодных вод в процессе развития физиологической беременности	1
Лазутин Ю.Н., Харитонова А.П., Сергостьянц Г.З., Зинькович С.А., Пыльцин С.П. Сравнительное изучение неоадъювантной химиотерапии немелкоклеточного рака легкого	3
Чагай Н.Б., Бакулина Е.Г. Метаболический статус на фоне долговременной заместительной гормональной терапии у пациенток с синдромом гипопостроения	1
Шихлярова А.И., Меньшенина А.П., Моисеенко Т.И., Ушакова Н.Д. Отражательная динамика общих адаптационных реакций при проведении плазмафереза и иммунотерапии в ходе лекарственного лечения рака шейки матки	1

НАУЧНАЯ ЖИЗНЬ

Карапетьянец А. Пятая Международная научная конференция «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения»	3
Миноранский В.А. Первый Международный экологический форум «У нас одна Земля. В гармонии с природой»	4
Миноранский В.А. Природоохранный фестиваль «Воспетая степь»	3
Узденский А.Б. V съезд биофизиков России	4

НАШИ ЮБИЛЯРЫ

Абанин А.В., Ватульян А.О., Кусраев А.Г., Карякин М.И. К 85-летию доктора физико-математических наук, профессора Юрия Федоровича Коробейника	3
Колесников В.И. К 70-летию доктора физико-математических наук, профессора Михаила Ивановича Чебакова	3

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

Ватульян А.О., Карякин М.И., Чебаков М.И. Иосиф Израилевич Ворович	2
Ворович Л.С. Владимир Исаакович Минкин (к 80-летию со дня рождения)	1
Чернышева С.П. К 70-летию Юрия Александровича Федорова	4

**НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ И ПРИКЛАДНОЙ ЖУРНАЛ
ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ.
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

Журнал «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки», имеющий статус центрального издания, включенного в перечень ВАК, продолжает прием работ по следующим отраслям науки:

1. Физико-математические науки
(математика, механика);
2. Биологические науки (общая
биология физико-химическая
биология);

3. Науки о Земле.
- Также публикуются материалы в разделах:
- Заметки о книгах;
 - Хроника.

Журнал издается с периодичностью 4 номера в год. Помимо основных номеров выходят специальные тематические выпуски, посвященные разным научным направлениям, работам отдельных организаций, а также научные труды вузов, приуроченные к юбилейным датам. С электронной версией журнала можно ознакомиться на сайте Научной электронной библиотеки **www.elibrary.ru**.

Публикация материалов, на которые получена положительная рецензия, оплачивается лично автором или организацией. Стоимость работ – договорная.

Оформление работ осуществляется согласно правилам:

1. Статья – 2 экз. В начале статьи указать индекс УДК.
2. Электронный вариант статьи на диске. Текст должен быть набран в редакторе MicroSoft Office 98 Word 2000, 2003, 2007 через 1,5 интервала, шрифтом Times New Roman размером 14 пт, страницы пронумерованы. **Для записи формул применять только редактор формул Equation 3.0.**
3. Сопроводительное или рекомендательное письмо, если статья представляется от организации.
4. Полное название организации и ее адрес на русском и английском языках.
5. Сведения об авторах с указанием адреса, по которому будет вестись переписка, на русском и английском языках.
6. Название статьи и фамилии авторов на русском и английском языках.
7. Аннотация на русском и английском языках (500 знаков/10 строк).
8. Ключевые слова на русском и английском языках.

Журнал распространяется по подписке – через ОАО «Роспечать» в подписной период. Подписной индекс – 70415 (подписка на полугодие).

В неподписной период отдельные номера журнала за нынешний и прошлые годы можно приобрести в редакции.

Адрес для переписки: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42, ЮФУ.

Редакция журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

Тел./факс главной редакции (863) 264-57-37.

E-mail: izvestiya@sfedu.ru

Адрес в интернете: www.izvestiya.sfedu.ru