

ИЗВЕСТИЯ
ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

*Северо-Кавказский
регион*

ЕСТЕСТВЕННЫЕ

НАУКИ

2015

1

Журнал основан в 1972 г. Ю.А. Ждановым

Главная редакция:

В.И. Колесников (главный редактор),
Е.Г. Гежа, В.Е. Закруткин, В.С. Золотарев, А.В. Павленко (заместители главного редактора),
Е.А. Шинкаренко (отв. секретарь)

Редакционный совет:

В.А. Бабешко, Б.С. Карамурзов, В.И. Колесников, Ю.Ф. Коробейник, А.Г. Кусраев,
В.Г. Лобанов, Г.Г. Матишов, В.И. Минкин, М.Х. Рабаданов, Э.З. Эмирбеков

Редакционная коллегия:

В.Е. Закруткин – председатель редколлегии (д. г.-м.н., профессор), А.В. Абанин (д.ф.-м.н., профессор),
В.В. Внуков (д.б.н., профессор), Л.С. Ворович (к.ф.-м.н., доцент), Ю.М. Гуфан (д.ф.-м.н., профессор),
О.Н. Демина (д.б.н.), А.Г. Захаров (д.техн.н., профессор), Л.М. Зубов (д.ф.-м.н., профессор),
Я.М. Ерусалимский (д.ф.-м.н., профессор), В.Н. Иванов (к.ф.-м.н., доцент), С.Б. Климентов
(д.ф.-м.н., профессор), В.Н. Козловский (д.м.н., профессор), Г.В. Куповых (д.ф.-м.н., профессор),
С.В. Курбатов (д.х.н., профессор), А.М. Лерер (д.ф.-м.н., профессор), В.А. Миноранский (д.с.-х.н., профессор),
П.Д. Насельский (д.ф.-м.н., профессор), А.Ф. Пожарский (д.х.н., профессор), О.Д. Прякина (д.ф.-м.н., профессор),
В.И. Седлецкий – зам. пред. редколлегии (д.г.-м.н., профессор), З.А. Темердашев (д.х.н., профессор),
В.Н. Труфанов (д.г.-м.н., профессор), Ю.А. Устинов (д.ф.-м.н., профессор), Ю.А. Федоров (д.г.н., профессор),
С.П. Чернышева (к.ф.-м.н., доцент), О.М. Шабанов (д.х.н., профессор)

Учредители:

Министерство образования и науки Российской Федерации, Дагестанский государственный технический университет, Дагестанский государственный университет, Донской государственный технический университет, Кабардино-Балкарский государственный университет, Кубанский государственный технологический университет, Кубанский государственный университет, Пятигорский государственный лингвистический университет, Ростовский государственный строительный университет, Ростовский государственный университет путей сообщения, Ростовский государственный экономический университет, Северо-Осетинский государственный университет, Северо-Кавказский федеральный университет, Южно-Российский государственный политехнический университет им. М.И. Платова, Южно-Российский институт управления Российской академии народного хозяйства и государственной службы при Президенте РФ, Южный федеральный университет

Над номером работали: Л.С. Ворович, В.И. Литвиненко, С.П. Чернышева, Н.Г. Шатравкина, М.С. Шипитко.

Подписано в печать 27.03.15.

Формат 60×84/8. Гарнитура "Таймс".

Усл. печ.л. 13,95. Уч.-изд. л. 17,85.

Тираж 200 экз. Заказ №

Адрес редакции и издателя: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, 105/42,

Южный федеральный университет (для переписки). Тел. / факс главной редакции (863) 264-57-37,

E-mail: izvestiya@sfedu.ru

Адрес в Интернете: www.izvestiya.sfedu.ru

Адрес редколлегии серии «Естественные науки»: г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 140, к. 117, тел. (863) 264-05-00, 264-57-37.

Адрес типографии: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 140, Центр универсальной полиграфии.

**НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ И ПРИКЛАДНОЙ ЖУРНАЛ
ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ.
СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН. ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ**

Журнал «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки», имеющий статус центрального издания, включенного в перечень ВАК, продолжает прием работ, а также рекламных материалов по следующим разделам:

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| 1. Математика | 7. Медицина |
| 2. Механика | 8. Экология |
| 3. Физика | 9. Геология и география |
| 4. Химия | 10. Проблемы высшей школы |
| 5. Биология | 11. Заметки о книгах |
| 6. Природопользование | 12. Хроника |

Журнал издается с периодичностью 4 номера в год. Помимо основных номеров выходят специальные тематические выпуски, посвященные разным научным направлениям, работам отдельных организаций, а также научные труды вузов, приуроченные к юбилейным датам. С электронной версией журнала можно ознакомиться на сайте Научной электронной библиотеки **www.elibrary.ru**.

Публикация материалов, на которые получена положительная рецензия, оплачивается лично автором или организацией. Стоимость работ – договорная.

Оформление работ осуществляется согласно правилам:

1. Статья – 2 экз. В начале статьи указать индекс УДК.
2. Электронный вариант статьи на диске. Текст должен быть набран в редакторе MicroSoft Office 98 Word 2000, 2003, 2007 через 1,5 интервала, шрифтом Times New Roman размером 14 пт, страницы пронумерованы. Для записи формул применять только редактор формул Equation 3.0.
3. Сопроводительное или рекомендательное письмо, если статья представляется от организации.
4. Полное название организации и ее адрес **на русском и английском языках**.
5. Сведения об авторах с указанием адреса, по которому будет вестись переписка **на русском и английском языках**.
6. Название статьи и фамилии авторов **на английском языке**.
7. Реферат **на русском и английском языках** (500 знаков/10 строк).
8. Ключевые слова **на русском и английском языках**.

Журнал распространяется по подписке – через ОАО «Роспечать» в подписной период. Подписной индекс – 70415 (подписка на полугодие).

В неподписной период отдельные номера журнала за нынешний и прошлые годы можно приобрести в редакции.

Адрес для переписки: 344006, г. Ростов-на-Дону, ул. Б. Садовая, 105/42, ЮФУ.

Редакция журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки».

Тел./факс главной редакции (863) 264-57-37, тел. 264-05-00.

E-mail: **izvestiya@sfedu.ru**

Адрес в интернете: **www.izvestiya.sfedu.ru**

Плата с аспирантов за публикацию статей не взимается.

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ СЕВЕРО-КАВКАЗСКИЙ РЕГИОН

Регистрационный номер 011019
Комитета Российской Федерации по печати
Научно-образовательный и прикладной журнал
Издается с 1973 г.
Периодичность серии 4 номера в год
№ 1 (185) 2015 г.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ НАУКИ

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

<i>Вагабов А.И.</i> Одна спектральная задача для дифференциального пучка четвертого порядка с четырехкратной характеристикой и краевыми условиями распадающегося типа.....	5
<i>Галабурдин А.В.</i> Применение метода граничных интегральных уравнений к решению задач о движущейся нагрузке.....	9
<i>Грезин В.С., Новосядлый В.А.</i> О проблеме определения возраста участника социальной сети.....	12
<i>Зинченко А.Б.</i> Решения двойственно симплексных игр.....	19
<i>Камалян Р.З., Камалян С.Р.</i> Некоторые результаты исследования взрывов цилиндрических зарядов в двухслойной среде.....	24
<i>Норкин М.В.</i> Динамика внутренней свободной границы жидкости на малых временах при вертикальном ударе кругового цилиндра, полностью погруженного в жидкость.....	30
<i>Павлов И.В., Назарько О.В.</i> Теоремы о деформированных мартингалах: разложение Рисса, характеристика локальных мартингалов, вычисление квадратичных характеристик.....	36
<i>Пожарский Д.А., Замулина Т.Г.</i> Контактная задача с силами трения для трансверсально изотропного полупространства.....	43
<i>Полякова Н.М.</i> Исследование обобщенной модели формирования рН-градиента при изоэлектрофокусировании.....	45
<i>Рыжский А.И., Усов А.Б.</i> Игры Гермейера при принуждении в трехуровневой системе контроля водяного балласта судов.....	50
<i>Чеголин А.П.</i> Интегралы и производные дробного порядка в классах Гельдера на прямоугольнике.....	56

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

<i>Морозова М.А., Федоров Ю.А.</i> Роль сульфитредуцирующих клостридий в патологии у рыб.....	60
<i>Шмарева А.Н., Шишлова Ж.Н., Федяева В.В.</i> О новых находках <i>Galium volhynicum</i> Pobed. и <i>Cymboschasma borysthena</i> (Pall. ex Schlecht.) Klok. & Zoz в Ростовской области.....	67

ЭКОЛОГИЯ

<i>Бакаева Е.Н., Никаноров А.М.</i> Биологические подходы к оценке экотоксикологического состояния водных экосистем.....	72
<i>Крыжевнич М.И., Зубкова П.С., Шипкова Г.В.</i> Радиловский болотный массив: состояние и геоэкологические проблемы.....	84
<i>Петренко И.Н.</i> Оценка масштабов массопереноса флюидов и химических элементов в разрабатываемой газоконденсатной залежи.....	89

МЕДИЦИНА

<i>Алабут А.В., Сикилинда В.Д., Чесников С.Г., Тимошенко М.Е., Скаржинский А.А., Хаммад М. О. Х.</i> Анализ осложнений эндопротезирования коленного сустава.....	96
--	----

<i>Крукиер И.И., Дегтярева А.С., Нарежная Е.В., Авруцкая В.В., Никашина А.А., Кравченко Л.В., Кухта О.И.</i> Азотистый обмен плаценты и околоплодных вод в процессе развития физиологической беременности.....	101
<i>Чагай Н.Б., Бакулина Е.Г.</i> Метаболический статус на фоне долговременной заместительной гормональной терапии у пациенток с синдромом гипопострогении.....	106
<i>Шихлярова А.И., Меньшенина А.П., Моисеенко Т.И., Ушакова Н.Д.</i> Отражательная динамика общих адаптационных реакций при проведении плазмафереза и иммунотерапии в ходе лекарственного лечения рака шейки матки.....	114
<i>Ворович Л.С.</i> Владимир Исаакович Минкин (к 80-летию со дня рождения).....	119

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

IZVESTIYA VUZOV. SEVERO-KAVKAZSKII REGION

Reg. No. 011019
Of the Committee of the Press of the Russian Federation
Scientifically-educational and applied magazine
Was founded in 1973.
Period is 4 numbers per a year
№ 1 (185) 2015.

NATURAL SCIENCE

CONTENTS

MATHEMATICS, MECHANICS	Vagabov A.I. A Spectral Problem for a Differential Beam Fourth Order with Fourfold Characteristics and Boundary Conditions of the Decaying Type..... 5
	Galaburdin A.V. Application of a Method of the Boundary Integrated Equations to the Decision of Problems on Moving Loading..... 9
	Grezin V.S., Novosiadlyi V.A. On the Problem of Social Network User Age Prediction.... 12
	Zinchenko A.B. The Solutions of Dual Simplex Games..... 19
	Kamalian R.Z., Kamalian S.R. Some Results of the Research Explosions of Cylindrical Charges in Two-Layer Medium..... 24
	Norkin M.V. Dynamics of Internal Free Border of Liquid on Small Times at Vertical Impact of the Circular Cylinder Which is Completely Shipped in Liquid..... 30
	Pavlov I.V., Nazarko O.V. Theorems on Deformed Martingales: Riesz Decomposition, Characterization of Local Martingales and Computation of Quadratic Variations..... 36
	Pozharskii D.A., Zamulina T.G. Contact Problem with Friction Forces for a Transversely Isotropic Half-Space..... 43
	Poliakova N.M. The Study of the Generalized Model of the Formation of the pH-Gradient for Isoelectrofocusing..... 45
	Ryzhkin A.I., Usov A.B. Germeyer's Games at Compulsion in a Three-Level Control System of the Ship's Water Ballast..... 50
	Chegolín A.P. Integrals and Derivatives of Fractional Order in Holder Classes on the Rectangle..... 56
BIOLOGICAL SCIENCE	Morozova M.A., Fedorov Iu.A. The Role of Sulphite-Reducing Clostridia in the Pathology of Fishes..... 60
	Shmaraeva A.N., Shishlova Zh.N., Fediaeva V.V. On New Findings <i>Galium volhynicum</i> Pobed. and <i>Cymbodasma borysthenica</i> (Pall. ex Schlecht.) Klok. & Zoz in the Rostov Region..... 67
ECOLOGY	Bakaeva E.N., Nikanorov A.M. Biological Approaches to Assessment Ecotoxicological State of Aquatic Ecosystem..... 72
	Kryzhevich M.I., Zubkova P.C., Shipkova G.V. Radilov Raised Bog: Present Situation and Geoecological Problems..... 84
	Petrenko I.N. Assessment of the Extent of Mass Transfer Fluids and Chemical Elements in the Developed Gas Condensate Deposits..... 89
MEDICINE	Alabut A.V., Sikilinda V.D., Chesnikov S.G., Timoshenko M.E., Skarzhinskii A.A., Khammad M.O.Kh. Analysis of Complications Total Knee Replacement..... 96
	Krukier I.I., Degtiareva A.S., Narezhaia E.V., Avrutskaia V.V., Nikashina A.A., Kravchenko L.V., Kukhta O.I. Nitrogen Metabolism of Placenta and Amniotic Fluid in Normal Pregnancy Development..... 101

	Chagai N.B., Bakulina E.G. Metabolic Status of Patients with Hypoestrogenic Anovulation on the Long-Term Hormone Replacement Therapy.....	106
	Shikhliarova A.I., Men'shenina A.P., Moiseenko T.I., Ushakova N.D. Reflective Dynamics of General Adaptive Reactions at Plasmapheresis and Immunotherapy During Drug Treatment of Cervical Cancer.....	114
OUR PERSONS	Vorovich L.S. Vladimir Isaakovich Minkin (on the 80th Anniversary)	119

МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА

УДК 517.941

ОДНА СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ПУЧКА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ЧЕТЫРЕХКРАТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ И КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ РАСПАДАЮЩЕГОСЯ ТИПА

© 2015 г. А.И. Вагабов

Вагабов Абдулвагаб Исмаилович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей алгебры и геометрии, факультет математики и компьютерных наук, Дагестанский государственный университет, ул. Гаджиева, 43а, г. Махачкала, Республика Дагестан, 367000, e-mail: algebra-dgu@mail.ru

Vagabov Abdulvagab Ismailovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of Higher Algebra and Geometry, Faculty of the Mathematics and Computer Sciences, Dagestan State University, Gadzhiev St., 43a, Makhachkala, Republic Dagestan, 367000, Russia, e-mail: algebra-dgu@mail.ru

Решается спектральная задача для дифференциального пучка $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^4 y = x$ четвертого порядка с четырехкратной характеристикой и краевыми условиями распадающегося типа. Доказывается формула четырехкратной разложимости четырех произвольных функций в ряды по корневым элементам оперативного пучка при периодических граничных условиях.

Ключевые слова: функция Грина, собственные элементы, четырехкратное разложение.

The author solves spectral problem for the fourth-order differential beam $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^4 y = x$ with fourfold characteristics and boundary conditions of the decaying type. The author proves the formula fourfold decomposability four arbitrary functions in series in the root elements of operational beam with periodic boundary conditions.

Keywords: Grien function, property element, four multiple decompose.

Постановка задачи

Изучение регулярных по Биркгофу – Тамаркину спектральных задач для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) продолжено в большом количестве последующими авторами [1]. К этому направлению относятся и наши работы [2, 3]. Особый случай нерегулярных задач представляет ситуация кратности корней характеристического уравнения соответствующего дифференциального оператора. В этом направлении имеются лишь частные работы, относящиеся к случаю дифференциальных операторов второго и четвертого порядков [4, 5]. В первой из этих работ установлена разложимость одной функции в ряд по собственным элементам, а во второй – полнота собственных элементов задачи. В нашей работе [6] доказана формула трехкратной разложимости трех произвольных функций в ряды по корневым элемен-

там операторного пучка $\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^3$, $0 < x < 1$ при периодических граничных условиях.

В данной работе устанавливается подобный результат для пучка четвертого порядка:

$$l y \equiv \left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^4 y = x, \quad 0 < x < 1 \quad (1)$$

при граничных условиях

$$\frac{d^k y}{dx^k} \Big|_{x=0} = 0, \quad k = 0, 1, 2; \quad \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=0} - \lambda^3 \frac{d^3 y}{dx^3} \Big|_{x=0} = 0 \quad (2)$$

Определение. Функцией Коши уравнения $l y = 0$ называется функция $g(x, \xi, \lambda)$, удовлетворяющая условиям:

1) g – аналитична по λ и дважды непрерывно дифференцируемая по x и ξ на интервале $[0, 1]$;

2) при любом $\xi \in [0, 1]$ она имеет непрерывные производные 3-го порядка по x в интервалах $[0, \xi]$, $[\xi, 1]$, причем имеет место формула скачка

$$\frac{d^3 g}{dx^3} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{d^3 g}{dx^3} \Big|_{x=\xi-0} = 1.$$

Непосредственно проверяется, что система функций

$$y_j x = x^j e^{\lambda x}, \quad j = \overline{0, 3}, \quad (3)$$

является фундаментальной системой решений уравнения $l y = 0$.

Утверждение 1. Функции

$$g_{x, \xi, \lambda} = \begin{cases} 0 & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ -\frac{x-\xi^3}{3!} e^{\lambda x-\xi} & \text{при } 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases}, \quad (4)$$

$$g_{x, \xi, \lambda} = \begin{cases} \frac{x-\xi^3}{3!} e^{\lambda x-\xi} & 0 \leq \xi \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{при } 0 \leq x \leq \xi \leq 1 \end{cases}$$

служат функциями Коши уравнения (1). (Первое из выражений (4) используется в правой, а второе – в левой λ -полуплоскостях).

Доказательство. Обозначая $t = x - \xi$, имеем

$$\left(\frac{d}{dx} - \lambda\right)^4 x - \xi^3 e^{\lambda x-\xi} = \left(\frac{d}{dt} - \lambda\right)^4 t^3 e^{\lambda t} = 0. \text{ С другой стороны, при } x = \xi$$

$$\frac{d^3 g_{x, \xi, \lambda}}{dx^3} \Big|_{x=\xi+0} - \frac{d^3 g_{x, \xi, \lambda}}{dx^3} \Big|_{x=\xi-0} = 0 + e^{\lambda x-\xi} \Big|_{x=\xi-0} = 1.$$

Аналогичны рассуждения в случае второго представления функции $g_{x, \xi, \lambda}$ в формуле (4).

Изучение функции Грина

Используя фундаментальную систему (3) решений уравнения $l y = 0$, выпишем широко известное [5, с. 67] выражение мероморфной функции Грина для оператора (1), (2):

$$G_{x, \xi, \lambda} = \frac{\Delta_{x, \xi, \lambda}}{\det \Delta_{\lambda}}, \quad \text{где}$$

$$\Delta_{x, \xi, \lambda} =$$

$$\begin{vmatrix} g_{x, \xi, \lambda} & e^{\lambda x} & x e^{\lambda x} & x^2 e^{\lambda x} & x^3 e^{\lambda x} \\ \frac{\xi^3}{3!} e^{-\lambda \xi} & & & & \\ \left(-\frac{\xi^2}{2} + \frac{\lambda \xi^3}{6}\right) e^{-\lambda \xi} & & & & \\ \left(\frac{\lambda^2}{3!} \xi^3 - \lambda \xi^2 + \xi\right) e^{-\lambda \xi} & & & & \\ \left(\frac{\lambda^3 \xi^3}{3!} - \frac{3\lambda^2}{2} \xi^2 + 3\lambda \xi - 1\right) e^{-\lambda \xi} & & & & \end{vmatrix} \Delta_{\lambda}, \quad (5)$$

$\det \Delta_{\lambda}$ – характеристический определитель задачи (1), (2); Δ_{λ} – его матрица. Согласно (2), (3)

$$\det \Delta_{\lambda} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & 1 & 0 & 0 \\ \lambda^2 & 2 & 2 & 0 \\ \lambda^3 e^{\lambda} - \lambda^3 & \lambda^3 + 3\lambda^2 e^{\lambda} - 3\lambda^5 & \lambda^3 + 6\lambda^2 + 6\lambda e^{\lambda} & \lambda^3 e^{\lambda} - 6 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, легко видеть, что

$$\det \Delta_{\lambda} = 2\lambda^3 e^{\lambda} - 6, \quad (6)$$

$$\text{где } 1 \equiv 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Согласно представлениям (5), (6) выделим в выражении $G_{x, \xi, \lambda}$ главную часть g

$$G_{x, \xi, \lambda} = g_{x, \xi, \lambda} + \frac{E_{x, \xi, \lambda}}{\det \Delta_{\lambda}}. \quad (7)$$

Выражение E получено из (5) заменой элемента из левого верхнего угла нулем. Разлагая определитель $E_{x, \xi, \lambda}$ по последней строке и указывая лишь старшие относительно степени λ слагаемые при $\lambda \rightarrow \infty$, найдем

$$\frac{E_{x, \xi, \lambda}}{\det \Delta_{\lambda}} \approx \frac{-\frac{1}{\lambda^8} e^{\lambda x-\xi} \xi^3 x^3 + \frac{\lambda^7}{2} e^{\lambda x-\xi} e^{\lambda x^3 \xi^3} - \lambda^5 x^3 \xi^3 e^{\lambda x-\xi} \cdot e^{\lambda}}{2\lambda^3 e^{\lambda} - 6}. \quad (8)$$

Напомним, что рассуждения мы относим к полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и, следовательно, $x \leq \xi$. Сформулируем результаты.

Утверждение 2. Характеристический определитель $\det \Delta_{\lambda}$ имеет вид (6). Его корни λ_v , $v \in \mathbb{Z}$, при больших v имеют асимптотическое представление $\lambda_v = \ln 6 + i2\pi v$, каждому из которых соответствует собственная функция $y_v(x, \lambda_v) = e^{\lambda_v x}$. В представлении (7) главная часть g при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ определяется первым выражением в формуле (4), а второстепенная часть является мероморфной функцией и имеет асимптотику по $\lambda \rightarrow \infty$ вида (8).

Формула четырехкратного разложения четырех функций по корневым элементам задачи (1), (2)

Лемма 1. Пусть $f(x)$, $0 \leq x \leq 1$, – четырежды непрерывно дифференцируемая функция и $f(0) = f'(0) = f''(0) = 0$, тогда для функции Коши (4) при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ справедлива формула

$$\int_0^1 g_{x, \xi, \lambda} \lambda^3 f(\xi) d\xi = \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{\varepsilon_{x, \lambda}}{\lambda}, \quad (9)$$

где $\varepsilon_{x, \lambda} \rightarrow 0$ равномерно по x при $\lambda \rightarrow \infty$ в правой полуплоскости.

Доказательство. Ввиду формулы (4) интегрирование по отрезку $0,1$ заменим на $x,1$. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x, \xi, \lambda) \lambda^3 f(\xi) d\xi &= \lambda^3 \int_x^1 \frac{x-\xi^3}{3!} f(\xi) e^{\lambda x-\xi} d\xi = \\ &= \lambda^2 \int_x^1 \left(\frac{x-\xi^3}{3!} f(\xi) \right)^I e^{\lambda x-\xi} d\xi = \\ &= \int_x^1 \left(\frac{x-\xi^3}{3!} f(\xi) \right)^{III} e^{\lambda x-\xi} d\xi = \\ &= - \left(\frac{x-\xi^3}{3!} f(\xi) \right)^{III} \frac{e^{\lambda x-\xi}}{\lambda} \Big|_x^1 + \\ &+ \int_x^1 \left(\frac{x-\xi^3}{3!} f(\xi) \right)^{IV} \frac{e^{\lambda x-\xi}}{\lambda} d\xi = \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{\varepsilon(x, \lambda)}{\lambda}. \end{aligned}$$

Стремление к нулю $\varepsilon(x, \lambda)$ при $\lambda \rightarrow \infty$ следует из свойств коэффициентов Фурье непрерывной функции.

Лемма 2. Пусть $f(x)$ непрерывно дифференцируема восемь раз на $0,1$ и $f^{(k)}(x) \Big|_{x=0,1} = 0$ при $k = \overline{0,8}$. Тогда на окружностях $C_v: |\lambda| = 2\pi \left(v + \frac{1}{2} \right)$, $v \in N$, справедлива оценка

$$\int_0^1 \frac{E(x, \xi, \lambda)}{\det \Delta(\lambda)} f(\xi) d\xi = \frac{\varepsilon(x, \lambda)}{\lambda^4}, \quad (10)$$

где $\varepsilon(x, \lambda) \rightarrow 0$ при $v \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in 0,1$.

Доказательство. Напомним, что свои рассуждения относим к полуплоскости $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, и заметим, что старшая по λ степень в выражении (8) равна 5. Вследствие этого оценка интеграла в формуле (10) вполне определяется выражением $\lambda^5 \int_0^1 f(\xi) e^{-\lambda(1-x+\xi)} d\xi$. Интегрированием по частям в нужном количестве приходим к равенству (10), учитывая при этом свойство убывания коэффициентов Фурье непрерывной функции.

При формулировке основной теоремы используется выражение

$$\begin{aligned} F(\xi, f, \lambda) &\equiv \lambda^3 f_0(\xi) - 4\lambda^2 f'_0(\xi) + 6\lambda f''_0(\xi) - 4f'''_0(\xi) + \\ &+ \lambda^2 f_1(\xi) - 4\lambda f'_1(\xi) + 6f''_1(\xi) + \lambda f_2(\xi) - 4f'_2(\xi) - f_3(\xi), \end{aligned}$$

относящиеся к четырем функциям.

Теорема. Пусть $f_i(x), i = 0,1,2,3$, — функции, удовлетворяющие условиям леммы 2. Справедлива формула четырехкратного разложения по собственным элементам задачи (1), (2):

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} \lambda^s d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) F(\xi, f, \lambda) d\xi = f_s(x), \quad (11)$$

$s=0,1,2,3$

где сходимость равномерна на $0,1$.

Доказательство. Предел в левой части формулы (11) вычислим при $s=0$ по полуокружностям $C_v \cap \pi_1$, где π_1 — правая λ -полуплоскость,

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v \cap \pi_1} d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) F(\xi, f, \lambda) d\xi &= \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v \cap \pi_1} d\lambda \times \\ &\times \left(\int_0^1 g(x, \xi, \lambda) + \frac{E(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} F(\xi, f, \lambda) d\xi \right) = \frac{1}{2} f_0(x). \end{aligned}$$

Последний переход сделан на основании лемм 1 и 2 и леммы Жордана. Соединяя полученное равенство с аналогичным равенством при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$, получим формулу (11) при $s=0$.

Перейдем к случаю $s=1$. С этой целью запишем $\lambda F(\xi, f, \lambda)$ в виде

$$\begin{aligned} \lambda F(\xi, f, \lambda) &= \left(\frac{d}{d\xi} - \lambda \right)^4 f_0(\xi) + \lambda^3 f_1(\xi) - 4\lambda^2 f'_1(\xi) + \\ &+ 6\lambda f''_1(\xi) + \lambda^2 f_2(\xi) - 4\lambda f'_2(\xi) - \lambda f_3(\xi) - f_0^{IV}(\xi). \end{aligned} \quad (12)$$

Согласно (12) правую часть формулы (11) запишем в виде

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \lambda F(\xi, f, \lambda) d\xi &= \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \left(\frac{d}{d\xi} - \lambda \right)^4 f_0(\xi) d\xi + \\ &+ \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} d\lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) F_1(\xi, f, \lambda) d\xi, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\text{где } F_1 = F - \left(\frac{d}{d\xi} - \lambda \right)^4 f_0(\xi).$$

В первом слагаемом правой части (13) оператор $\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \dots$ обратен оператору $\left(\frac{d}{d\xi} - \lambda \right)^4$, и потому это слагаемое равно $\frac{1}{2\pi i} \int_{C_v} d\lambda \int_0^1 f_0(\xi) d\xi = 0$. Второе же слагаемое по существу сводится к случаю $s=0$, лишь с заменой роли $f_0(x)$ на $f_1(x)$, т.е. формула доказана при $s=1$. В случаях $s=2,3$ надо произвести подобные процедуры с $\lambda^2 F(\xi, f, \lambda)$ и $\lambda^3 F$, которые мы опускаем.

Литература

1. Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 526 с.
2. Вагабов А.И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. Ростов н/Д, 1994. 160 с.

3. Вагабов А.И. Спектральная теория дифференциальных операторов. Саарбрюккен, 2012. 78 с.
4. Печенцов А.С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений, содержащих параметр, с кратными корнями характеристического уравнения // Диф. уравнения. 1984. Т. 20, № 2. С. 263–273.
5. Саакян Н.С. Краевые задачи для дифференциального уравнения четвертого порядка в случае кратных корней характеристического уравнения: дис. ... канд. физ.-мат. наук. Баку, 1985. 135 с.
6. Вагабов А.И. Трехкратная разложимость в ряды Фурье по собственным элементам обыкновенного дифференциального пучка третьего порядка с трехкратной характеристикой // Сб. ФДУ. № 4. Махачкала, 2002. С. 34–36.
2. Vagabov A.I. *Vvedenie v spektral'nyu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to spectral theory of differential operators]. Rostov-on-Don, 1994, 160 p.
3. Vagabov A.I. *Spektral'naya teoriya differentsial'nykh operatorov* [Spectral theory of differential operators]. Saarbrücken, 2012, 78 p.
4. Pechentsov A.S. *Kraevye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenii, sodержashchikh parametr, s kratnymi kornymi kharakteristicheskogo uravneniya* [Boundary value problems for differential equations containing a parameter with multiple roots of the characteristic equation]. *Dif. uravneniya*, 1984, vol. 20, no 2, pp. 263-273.
5. Saakian N.S. *Kraevye zadachi dlya differentsial'nogo uravneniya chetvertogo poryadka v sluchae kratnykh kornei kharakteristicheskogo uravneniya: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Boundary value problems for differential equations of the fourth order in the case of multiple roots of the characteristic equation]. Baku, 1985, 135 p.
6. Vagabov A.I. *Trekhkratnaya razlozhimost' v ryady Fur'e po sobstvennym elementam obyknovennogo differentsial'nogo puchka tret'ego poryadka s trekhkratnoi kharakteristikoi* [Triple decomposability in Fourier series in eigenelements ordinary differential third-order beam with a triple feature]. *Sb. FDU. Makhachkala*, 2002, no 4, pp. 34-36.

References

Поступила в редакцию

21 января 2015 г.

УДК 534

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ГРАНИЧНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ О ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКЕ

© 2015 г. А.В. Галабурдин

Галабурдин Александр Васильевич – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра математики и информатики, Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону, 344000.

Galaburdin Aleksander Vitalievich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Higher Mathematics and Informatic, Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia.

Предлагается метод решения задач теории упругости для тел, ограниченных поверхностями вращения, на которых действует нагрузка, движущаяся вокруг оси вращения. Метод основан на применении метода граничных интегральных уравнений к соответствующей краевой задаче плоской динамической теории упругости в пространстве преобразований Фурье по конечному отрезку времени, длина которого равна периоду изменения нагрузки. Приводятся результаты решения задачи о сферической оболочке, нагруженной двумя подвижными сосредоточенными силами.

Ключевые слова: граничные интегральные уравнения, динамическая задача теории упругости, подвижная нагрузка.

In work the method of the decision of problems of the elasticity theory for the bodies limited to surfaces of rotation on which the loading moving around of an axis of rotation operates is offered. The method is based on application of a method of the boundary integrated equations to the appropriate regional problem of the flat dynamic elasticity theory in space of transformations Fourier on a final interval of time which length is equal to the period of change of loading. Results of the decision of a problem about the spherical environment, loaded are resulted by two mobile concentrated forces.

Keywords: boundary integrated equations, dynamic problem of the elasticity theory, mobile loading.

Инженеры и ученые активно используют в последнее время численные методы решения краевых задач. Одним из первых численных методов был метод конечных разностей, в котором дифференциальные операторы аппроксимировались разностями значений неизвестной функции в близко расположенных точках. Другой численный метод – метод конечных элементов, основан на вариационных принципах, при реализации которых сплошная среда разбивается на малые элементы. Используемый в данной работе метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) выгодно отличается от указанных выше и многих численных методов своей экономичностью, которая обусловлена тем, что при его реализации приходится оперировать с данными, определенными только на границе области.

Рассмотрим задачу теории упругости для области D , ограниченной поверхностью вращения Σ , отнесенной к цилиндрической системе координат (r, φ, z) . На поверхности Σ приложена нагрузка $\mathbf{F}(\varphi - at)$, движущаяся вокруг оси вращения с угловой скоростью, равной a . Период обращения нагрузки равен $T_a = \frac{2\pi}{a}$.

Данная задача сводится к интегрированию уравнения движения

$$\mu \Delta \mathbf{u} (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2},$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения; λ и μ – константы Ляме; ρ – плотность. Граничные условия

$$\bar{\sigma} \cdot \mathbf{n} \Big|_{\Sigma} = \mathbf{F}(\varphi - at).$$

Здесь $\bar{\sigma}$ – тензор напряжений; $\mathbf{n}$ – вектор внешней нормали к граничной поверхности.

Будем рассматривать установившийся процесс, в силу чего начальные условия в такой постановке будут отсутствовать.

Применим конечное интегральное преобразование Фурье по времени на отрезке $\left[-\frac{T_a}{2}, \frac{T_a}{2}\right]$. Будем искать решение приведенного выше уравнения движения в виде

$$\mathbf{u}(r, \varphi, z, t) = \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \mathbf{u}_k(r, \varphi, z) e^{-ik\omega t}.$$

Разлагая в ряд приложенную нагрузку

$$\int_{-\pi/a}^{\pi/a} \mathbf{F}(\varphi - at) e^{ik\omega t} dt = \frac{e^{ik\varphi}}{a} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{F}(\tau) e^{-ik\tau} d\tau = \mathbf{F}_{-k} \frac{e^{ik\varphi}}{a},$$

где F_k – коэффициенты разложения в ряд Фурье $F(\tau)$, получим краевую задачу

$$\mu \Delta u_k + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u_k = -\rho \omega_k^2 u_k,$$

$$\bar{\sigma}_k \cdot n|_{\Sigma} = F_k^0 e^{-ik\rho} / a.$$

Здесь $\bar{\sigma}_k$ – трансформанта Фурье, тензора напряжений, $\omega_k = a \cdot k$.

Полученная краевая задача решалась методом ГИУ. Для их построения использовалась фундаментальная система решений уравнения движения в цилиндрической системе координат в пространстве преобразований Фурье по времени [1, 2]. Используя известную фундаментальную систему решений в декартовой прямоугольной системе координат, можно с помощью соответствующего преобразования координат получить фундаментальные решения в цилиндрической системе координат, представив ее в виде матрицы $\underline{U}(p, q, \omega)$, элементы $U_{ij}(p, q, \omega)$ которой представляют собой смещения в точке p пространства в направлении i -й координаты, возникающие в результате действия единичной сосредоточенной силы, приложенной в точке пространства q и направленной вдоль j -й координаты.

Тогда решение будем искать в виде потенциала простого слоя

$$\mathbf{V}(p, \omega) = \int_{\Sigma} \bar{\bar{U}}(p, q, \omega) \cdot \mathbf{Q}(q) d\Sigma(q),$$

Вектор напряжений, действующий на данную площадку с нормалью $\mathbf{n}$ в точке p , можно представить в виде

$$T_n \mathbf{V}(p, \omega) = \int_{\Sigma} \Gamma_1(p, q, \omega) \cdot \mathbf{Q}(q) d\Sigma(q), \text{ где } T_n - \text{матричный оператор напряжений, определяющий вектор напряжения на площадке с нормалью } \mathbf{n} \text{ по вектору перемещений.}$$

Используя традиционные методы и учитывая граничные свойства $T_n \mathbf{V}(p, \omega)$, получим интегральное уравнение, определенное на границе области,

$$\frac{1}{2} \mathbf{Q}(p) + \int_{\Sigma} \Gamma_1(p, q, \omega_k) \cdot \mathbf{Q}(q) d\Sigma(q) = F_k^0 e^{-ik\rho} / a.$$

Решив приведенное интегральное уравнение и определив $\mathbf{Q}(p)$, для значений $\omega_k = a \cdot k$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

можно найти вектор перемещения в любой точке тела для указанных значений ω_k и, обратив Фурье, вычислить перемещения и по ним движения внутри исследуемой области.

Аналогично можно решать задачи для бесконечных областей D^- , ограниченных поверхностью вращения Σ .

Для решения представленных выше интегральных уравнений можно использовать известные численные методы.

Изложенный метод использовался при решении задачи о толстостенной сферической оболочке, нагруженной двумя подвижными единичными сосредоточенными силами, направленными перпендикулярно оси и приложенными в двух диаметрально противоположных точках на внешней поверхности оболочки. Область, занимаемая оболочкой, в сферической системе координат задается системой неравенств

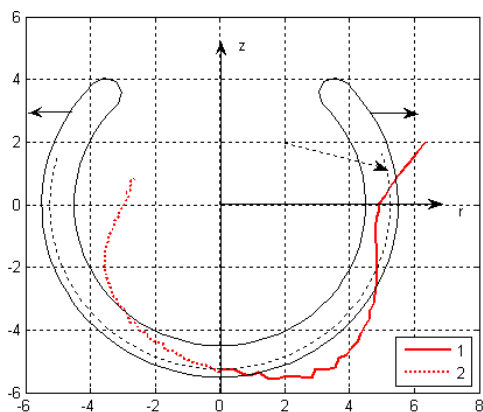
$$\begin{cases} \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \\ \frac{\pi}{4} + \arccos\left(\frac{\rho^2 + \rho_1 \rho_2}{\rho(\rho_1 + \rho_2)}\right) \leq \theta \leq \pi. \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases}$$

Осевое сечение оболочки и приложенные силы, вращающиеся вокруг оси Z , представлены на рис. 1. Интегральные уравнения решались методом коллокаций, а для вычисления интегралов граница области разбивалась на элементарные подобласти, в пределах которых предполагалось, что подынтегральная функция изменяется по кубическому закону.

Расчеты проводились при следующих исходных данных: скорость распространения продольных волн $\tilde{c}_1 = 500000$ см/с; коэффициент Пуассона $\nu = 1/3$; $a = 50 \cdot \pi$; $\rho_1 = 4,5$ см; $\rho_2 = 5,5$ см.

При обращении конечного преобразования Фурье удерживались первые 16 членов ряда.

8. На рис. 1 и 2 представлены осевое сечение оболочки и изменения вдоль линии сечения оболочки, изображенной пунктирной линией, напряжений σ_z (линия 1), σ_{rz} (линия 2), σ_r (линия 3) и $\sigma_{z\varphi}$ (линия 4).



2.37

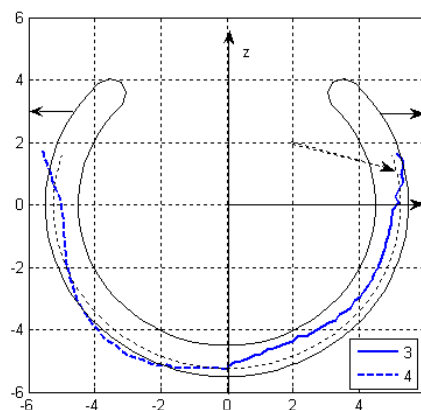


Рис. 1

9. Учитывая симметричность напряжений относительно оси, на чертеже представлено изменение напряжений только в одной половине сечения. На рис. 3 представлены графики изменения напряжений σ_z и σ_{rz} во времени на временном отрезке $[0, T_a]$ в точке с координатами $r = 5,12$, $z = 1,17$ (расположение этой точки указано

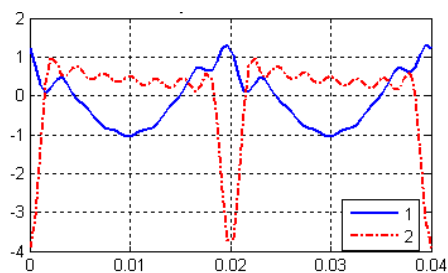


Рис. 3

Выводы

В работе предложен метод решения динамических задач теории упругости для тел вращения, нагруженных подвижной, периодически изменяющейся нагрузкой, в основу которого положено применение метода ГИУ к краевой задаче для уравнений движения в пространстве конечного преобразования Фурье по времени на отрезке, равном периоду изменения нагрузки. Предложенный метод может быть использован для решения указанных задач как для конечных областей, ограниченных поверхностью вращения, так и для областей бесконечных, имеющих в качестве своей границы поверхность вращения.

Литература

Рис. 2

на рис. 1 и 2 пунктирной стрелкой), а на рис. 4 представлены графики изменения во времени σ_r и $\sigma_{z\varphi}$ в той же точке. Полученные числовые значения напряжений $\sigma_{r\varphi}$ и σ_φ значительно меньше значения напряжений, рассмотренных выше, и поэтому не представляют особого интереса.

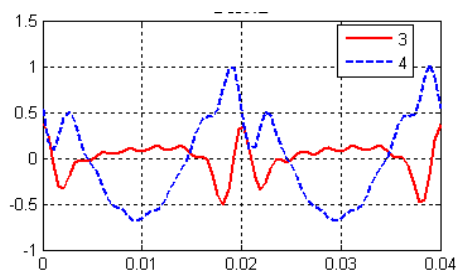


Рис. 4

1. Новацкий В. Теория упругости. М., 1975. 256 с.
2. Купрадзе В.Д. Методы потенциала в теории упругости. М., 1963. 472 с.

References

1. Novatskii V. *Teoriya uprugosti* [Theory of elasticity]. Moscow, 1975, 256 p.
2. Kupradze V.D. *Metody potentsiala v teorii uprugosti* [Potential method in the theory of elasticity]. Moscow, 1963, 472 p.

УДК 004.852

О ПРОБЛЕМЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЗРАСТА УЧАСТНИКА СОЦИАЛЬНОЙ СЕТИ

© 2015 г. В.С. Грезин, В.А. Новосядлый

Грезин Владимир Сергеевич – младший научный сотрудник, ФГАНУ НИИ «Спецвузавтоматика», пер. Газетный, 51, г. Ростов-на-Дону, 344002, e-mail: v.grezin@niisva.org

Новосядлый Василий Александрович – кандидат физико-математических наук, заведующий лабораторией, ФГАНУ НИИ «Спецвузавтоматика», пер. Газетный, 51, г. Ростов-на-Дону, 344002, e-mail: nova@niisva.org

Grezin Vladimir Sergeevich – Junior Scientific Researcher, FSASE SRI «Spetsvuzavtomatika», Gazetnyi Lane, 51, Rostov-on-Don, 344002, Russia, e-mail: v.grezin@niisva.org

Novosiadlyi Vasilii Aleksandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Head of the Laboratory, FSASE SRI «Spetsvuzavtomatika», Gazetnyi Lane, 51, Rostov-on-Don, 344002, Russia, e-mail: nova@niisva.org

Рассматриваются возможные методы определения возраста участника социальной сети на основе его общедоступных характеристик. Проводится сравнительный анализ подходов на основе статистических методов, методов с использованием искусственной нейронной сети и на основе модифицированного алгоритма кластеризации Маркова для выделения групп в социальном графе. Для рассмотренных подходов создана программная реализация на языке JavaScript, каждый из них применен на практике к выборкам из реальных участников социальной сети. Представлены оценки сложности и эффективности разработанных методов, выработаны рекомендации по использованию.

Ключевые слова: социальная сеть, социальный граф, определение возраста, анализ графа.

This article describes the possible methods of prediction the age of the social network member on the basis of his public specifics. Comparative analysis of the approaches based on statistical methods, methods using artificial neural networks and methods based on modified Markov clustering algorithm to detect groups in the social graph is provided. JavaScript implementation for each method is tested against the samples of the genuine social network data. Complexity and efficiency estimates of the developed methods are presented. Software usage strategy is presented.

Keywords: social network, social graph, age prediction, graph analysis.

Современные социальные сети не могут обеспечить правильность заполнения всех граф учетной записи. Особенно это касается графы «возраст», которую пользователи социальной сети часто предпочитают скрывать. Это не позволяет в автоматическом режиме контролировать доступ таких пользователей к контенту (ограничен по закону № 436-ФЗ «О защите детей от информации, причиняющей вред их здоровью и развитию» и имеет тот или иной знак информационной продукции).

Кроме того, информация о возрасте пользователя важна для решения многих задач в современном мире. Так, например, Google, «Яндекс», а также другие поисковые системы используют ее для более релевантного ранжирования выдачи. Кроме того, все современные крупные рекламные площадки в Интернете позволяют таргетировать рекламу на конкретные группы пользователей, в том числе и по возрастному критерию.

Существующие исследования опираются на статистическую информацию, которую можно получить по

характеристикам публикаций пользователей или их истории просмотренных страниц. Однако зачастую участники социальных сетей не создают нового контента, а лишь распространяют уже существующий. Кроме того, точность данных методов относительно невысока и позволяет производить разбиение лишь на широкие группы по возрастному критерию. Например, в [1] рассматривается подход, который позволяет определить возраст пользователя в зависимости от истории просмотренных страниц. Для этих целей используется искусственная нейронная сеть. В работах [2, 3] возраст человека вычисляется на основе характеристик написанного им текста. Используются стилистические и содержательные особенности. Однако ограничение доступа к контенту на основании его знака информационной продукции требует достаточно точных измерений возраста. В работе применены и адаптированы математические методы для задачи определения возраста пользователя социальной сети, дающие достаточно точную оценку возраста по его

социальному графу. Разработана и исследована применимость следующих методов определения возраста:

- статистические (по среднему значению, медиане);
- нейронная сеть, обучаемая на тестовой выборке;
- кластеризация на социальные группы.

Выбор характеристик

Среди общедоступной информации в социальных сетях наиболее подходящей для анализа представляется информация о друзьях пользователя, его фотографии и тексты, которые были им написаны. В работах [1–3] показано, что тексты подходят для кластеризации пользователей на достаточно крупные группы, но не позволяют делать точных оценок. Схожая ситуация имеет место и для фотографий. Во-первых, анализ изображений с использованием компьютерного зрения является весьма ресурсоемкой задачей. Во-вторых, по анализу черт лица невозможно дать достаточно точную оценку возраста человека. Исходя из этого, было принято решение использовать доступную информацию о друзьях пользователя в качестве анализируемой характеристики.

Поскольку друзья пользователя являются такими же участниками социальной сети, для них актуальны все рассуждения, приведенные выше. Наиболее ценной для анализа является информация о возрасте друзей, поскольку она позволяет делать достаточно точные предположения о возрасте самого пользователя. Предварительные исследования 1472 учетных записей показали, что собственный возраст указывают около

54,3 % участников социальной сети. Доля тех, кто указывает заведомо неверный возраст, колеблется в районе 1–2 %. Такого количества исходных данных в подавляющем большинстве случаев хватает для проведения анализа описанными ниже методами.

Статистические методы

Статистические методы в решении поставленной задачи являются наиболее простыми и самыми быстрыми. Их вычислительная сложность составляет $O(\log(N))$, где N – количество друзей с указанным возрастом. Вместе с тем они не могут обеспечить достаточную точность на большом наборе выборок. Было рассмотрено 2 статистических метода: вычисление возраста с использованием математического ожидания и медианы [4].

Математическое ожидание. Предположение о применимости этого метода было сделано из тех соображений, что, как правило, человек общается с ровесниками, а также людьми несколько старше и несколько младше себя. Если это предположение верно, то такой метод должен давать достаточно точный результат.

Однако в ходе экспериментов [5, 6] стало понятно, что невозможно гарантировать правильность указания возраста каждого из друзей пользователя. Это приводит к тому, что если в выборке оказывается значение с большим отклонением от остальных, то среднее значительно смещается в его сторону. На примере видно (рис. 1), что всего одного заведомо неправильного значения достаточно, чтобы сдвинуть предсказанный возраст.



Рис. 1. Смещение значения вычисляемого возраста из-за заведомо некорректных данных

Медиана. Для решения описанной выше проблемы был применен метод расчета медианы вместо математического ожидания. В силу большей робастности [4]

она позволяет снизить негативное влияние всплесков на концах выборки. Так, если для приведенного приме-

ра математическое ожидание заменить на медиану, то получим верный результат (рис. 2).

Тем не менее экспериментальные исследования [5, 6] показывают, что медиана не может обеспечить нужную точность на достаточно значимой части набора экспериментальных данных.

Искусственная нейронная сеть (ИНС). Так как статистические методы показали не лучшие результаты на широком наборе учетных записей, появилась необходимость в использовании альтернативных методов. В качестве такого было решено применить ИНС. Она обладает важной особенностью – способ-

ностью к обучению. Это значит, что хорошо подобранная обучающая выборка, скорее всего, позволит сети достичь высокой точности определения возраста.

Для подготовки обучающей выборки был написан сценарий, позволяющий просматривать только стра-

ницы профилей с указанным возрастом одновременно с частотной диаграммой возраста друзей. С его помощью можно быстро создавать большие выборки с высокой степенью достоверности.

Элрафан

Указанный год рождения: 1991

Медиана: 1991



Рис. 2. Использование медианы на выборке с неправильным значением

В качестве входных данных ИНС принимает распределение возраста друзей пользователя на фиксированном интервале и возвращает наиболее вероят-

ный возраст пользователя. Пример работы ИНС показан на рис. 3.

Ородгорм

Указанный год рождения: 1991

Нейронная сеть: 1991



Рис. 3. Применение нейронной сети к неоднозначной выборке

Несмотря на то что нейронная сеть требует обучения, его необходимо провести только один раз. Поэтому в вычислительной сложности метода нейрон-

ной сети ее обучение учитывать не будем. При вычислении возраста пользователя социальной сети

сложность этого метода составляет $O(N)$, где N – количество друзей с указанным возрастом.

Клики в социальном графе. В социальном графе пользователя могут оказаться люди, чей возраст никак не связан с его собственным. Например, они могут быть связаны с его работой или увлечениями (преподаватель в вузе или вожатый в детском лагере). Если таких людей достаточно много, они начинают оказывать существенное влияние на правильность определения возраста пользователя. Необходим способ, который позволит не учитывать неподходящих друзей. Таким способом может быть выделение клик (полных подграфов) в социальном графе. Среди них должна оказаться клика, содержащая людей с равными или близкими возрастами (одноклассники, одноклассники). Ее можно установить, посчитав дисперсию возрастов в каждой из найденных клик.

Однако в процессе исследований выяснилось, что такой подход обладает несколькими серьезными недостатками. Основной из них состоит в том, что самые большие клики, как правило, представляют одну и ту же социальную группу. По всей видимости, это происходит из-за того, что внутри группы не у каждой пары людей обязательно должна быть связь.

Кластеризация на социальные группы. ИНС показывает хороший результат практически на всех видах выборок. Однако если частотная диаграмма возрастов друзей достаточно плоская, нейронная сеть не может обеспечить приемлемой точности. Для решения этой проблемы было решено кластеризовать социальный граф пользователя. Получающиеся группы людей объединены по той или иной причине и отражают социальную структуру. Затем из этих групп нужно выбрать, например, одноклассников или одноклассников анализировать пользователя.

Алгоритм кластеризации Маркова (далее – MCL) выделяет кластеры в графе при помощи математического бутстрэппинга [7]. Процесс детерминированно вычисляет вероятности случайных блужданий по графу и использует два оператора преобразования одного набора вероятностей в другой. Он делает это с помощью языка стохастических матриц (матриц Маркова), которые включают математическое понятие

случайных блужданий на графе. Алгоритм MCL имитирует случайные блуждания в пределах графа чередованием двух операторов, называемых расширением (expansion) и накачкой (inflation).

Расширение совпадает с обычным возведением в степень стохастической матрицы (на основе матричного произведения). Накачка соответствует возведению матрицы в аддитивную степень, а затем масштабированию матриц так, чтобы результат снова являлся стохастической матрицей, т.е. матричные элементы (в каждой колонке) отвечали бы значениям вероятностей.

Общая схема метода

1. На вход поступает неориентированный граф, параметр расширения e и параметр накачки r .
2. Создается ассоциированная матрица.
3. Добавляется цикл к каждой вершине.
4. Нормализуется матрица.
5. Расширяется матрица взятием e -й степени.
6. Производится накачка матрицы с параметром r .
7. Повторяются шаги 5 и 6, пока не будет достигнуто стационарное состояние.
8. Интерпретируется матрица для выделения кластеров.

Использование социального графа. Полученная после применения алгоритма MCL матрица интерпретируется так, чтобы разбить все вершины социального графа на непересекающиеся группы. Фактически они будут представлять собой естественные группы из друзей пользователя (одноклассники, коллеги и т.д.). Затем выбираются наиболее большие кластеры (количество узлов – не менее 60 % от самого большого). Среди них устанавливается кластер с наименьшей дисперсией, т.е. в который объединены люди примерно одного возраста. Для них вычисляется медиана, которая и принимается в качестве предполагаемого возраста. На рис. 4 приведен пример успешной работы алгоритма с использованием кластеризации в случае практически плоской диаграммы распределения возрастов друзей.

Белил-Ганд
Указанный год рождения: 1981
Кластер: 1982



Рис. 4. Пример успешной работы алгоритма с использованием кластеризации

Экспериментальные исследования

В данном разделе приведены результаты экспериментальных исследований, проведенных на широком наборе пользователей. Их возраст известен заранее. Для проведения экспериментальных исследований было разработано программное средство, реализующее описанные методы [8].

В самом простом случае на гистограмме можно видеть отчетливый пик, который означает большое количество друзей одного возраста. Однако такое встречается довольно редко. Социальный граф имеет типичную структуру: 3, 4 большие группы, соединенные между собой несколькими связями, и небольшое количество не связанных ни с чем узлов.

Широко распространены случаи, когда распределение возрастов смещено в сторону от пика. Кроме того, в нем могут присутствовать заведомо неверные значения. Это может приводить к тому, что некоторые методы дают ошибочный результат (особенно это касается математического ожидания). Тем не менее более сложные методы, такие как нейронная сеть или кластеризация, позволяют нивелировать такие отклонения.

Одним из случаев, наиболее сложных для анализа, является пример, показанный на рис. 5. У пользователя небольшое количество друзей, возраст которых распределен довольно равномерно.

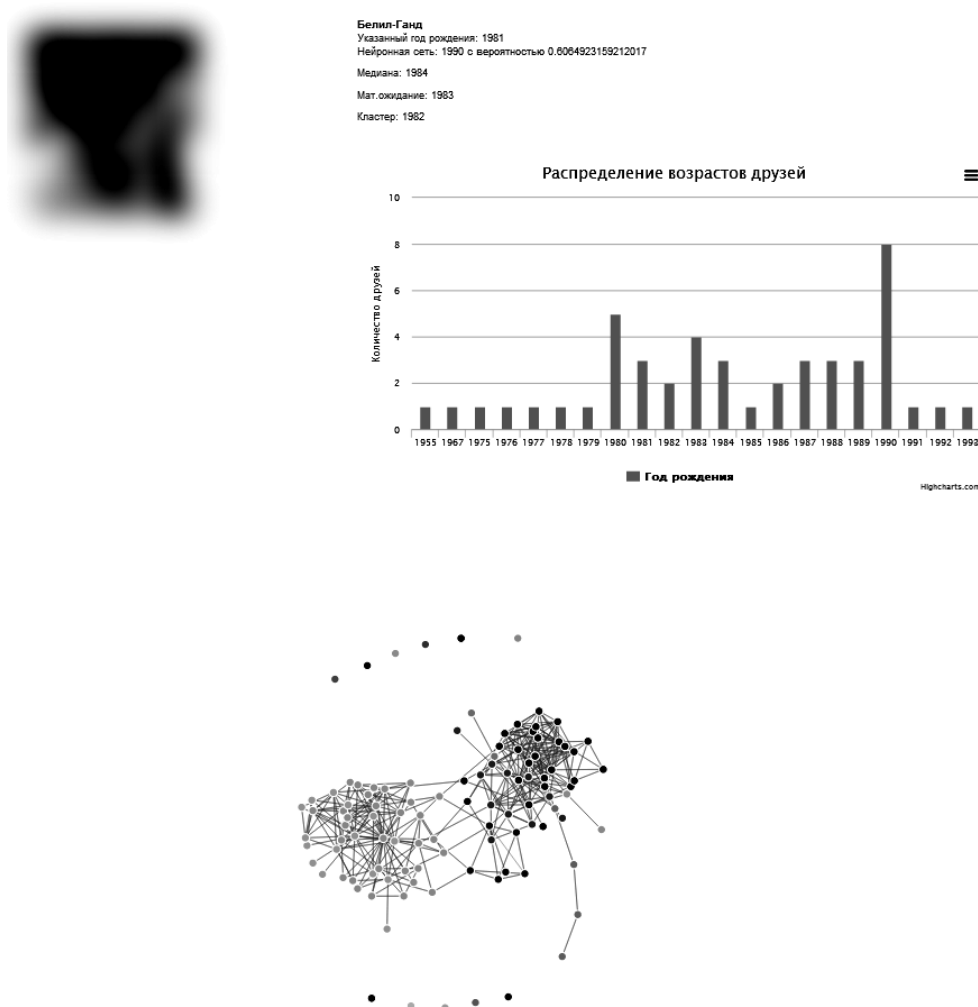


Рис. 5. Неинформативная диаграмма

Заметен пик на значении 1990, почти вдвое превышающий ближайший к нему. Однако верный возраст для исследуемого пользователя был заранее из-

вестен. Соответственно, в данном случае статистические методы неприменимы. Нейронная сеть тоже показывает ошибочный результат. Тем не менее исполь-

зование кластеризации позволяет определить правильный возраст с высокой точностью. В конкретном примере исследуемый пользователь – это преподаватель, у которого в друзьях находится большое количество его студентов. Но с ними он не связан по возрастному критерию, а значит, они не должны быть включены в набор анализируемых данных. Именно

такой подход используется при вычислении возраста с использованием кластеризации.

Был проведен анализ 173 пользователей с известным годом рождения с целью установления точности каждого метода. Считается, что возраст верно определен, если погрешность не превышает одного года. Результаты приведены в таблице.

Результаты работы методов на тестовой выборке

Количество пользователей	Возраст	Точность метода, %		
		Медиана, $O(\log(N))$	Нейронная сеть, $O(N)$	Кластеризация, $O(N \cdot k^2)$
47	16–22	89	91	93
57	23–30	86	91	94
43	30–39	83	87	90
26	40–56	72	81	88

Таким образом, применение более сложных методов при определении возраста является оправданным, так как приводит к получению более точных результатов. Однако для возрастных групп 16–22 и 23–30 применение метода медианы также является оправданным, так как дает достаточно высокую точность. Следовательно, при выборе метода определения возраста необходимо учитывать два требования: точность метода и скорость его работы.

Заключение

Исследованные и адаптированные методы позволяют определять возраст участника социальной сети, основываясь на открытой информации о его друзьях. Анализ существующих открытых решений в области автоматического определения возраста пользователя в сети Интернет показал, что определение возраста с использованием информации о социальных связях пользователя еще не реализовано, а методы, опирающиеся на поведение пользователя или анализ генерируемого им контента, не дают достаточной точности. Для решения такой задачи были рассмотрены следующие подходы: использование статистических методов, применение ИНС, кластеризация социального графа.

По результатам проведенных экспериментальных исследований наиболее эффективным показал себя метод кластеризации социального графа. Однако из-за необходимости получения матрицы смежности для социального графа, а также вычислительной сложности кластеризации время вычисления оценки возраста таким способом существенно превышает этот показатель у других методов.

Следующим по эффективности показал себя подход с использованием ИНС. Как правило, он дает результат достаточной точности и при этом работает многократно быстрее, чем кластеризация. К минусам можно отнести некорректную работу на определенном типе распределений (например, в качестве исследуемого пользователя выступает преподаватель, у

которого в друзьях находится большое количество его студентов), а также необходимость обучения нейронной сети на заранее сформированной выборке.

Использование медианы дает худшие результаты в сравнении с описанными выше методами. Тем не менее такой подход может применяться как наиболее быстрый и просто реализуемый.

Для дальнейшего повышения точности определения возраста представляется возможным использовать дополнительную информацию со страниц друзей, например, город, школа, вуз. Так, при выборе кластера следует учитывать не только дисперсию, но и количество человек внутри него, которые обучались в одном университете. Предположительно это поможет снизить количество случаев, когда для анализа выбирается неподходящий кластер.

Литература

1. Kakkar M., Upadhyay D. Web Browsing Behaviors Based Age Detection // International J. of Soft Computing and Engineering (IJSCE). 2013. Vol. 3, Issue 1.
2. Dong Nguyen, Smith N.A., Rose C.P. Author Age Prediction from Text using Linear Regression // Proceedings of the 5th ACL-HLT Workshop on Language Technology for Cultural Heritage, Social Sciences, and Humanities. Portland, USA, 2011. P. 115–123.
3. Peersman C., Daelemans W., Vaerenbergh L. Van. Predicting Age and Gender in Online Social Networks // SMUC'11, October 28, 2011. Glasgow, UK, 2011.
4. Максимов Ю.Д. Вероятностные разделы математики: энциклопедия. М., 2001. 592 с.
5. Грезин В.С., Новосядлый В.А. Методы вычисления возраста участника социальной сети // Теоретические и прикладные вопросы образования и науки : сб. науч. тр. Междунар. науч.-практ. конф. 31 марта 2014 г. Ч. 7. Тамбов, 2014. С. 39–40.
6. Грезин В.С. Способы определения возраста человека по учетной записи в социальной сети // Научная сессия ТУСУР-2014 : материалы Всерос. науч.-техн. конф.

- студентов, аспирантов и молодых ученых. Томск, 14–16 мая 2014 г. : в 5 ч. Ч. 3. Томск, 2014. С. 186–189.
7. Efron B. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife // *Annals of Statistics*. 1979. Vol. 7, № 1. P. 1–26.
 8. Свидетельство № 2014614425. Программное средство автоматического определения возраста участника социальной сети Ageception. Версия 1.1 / Грезин В.С., Новосядлый В.А. 24.04.2013 г.
 4. Maksimov Yu.D. *Veroyatnostnye razdely matematiki* [Probabilistic branches of mathematics]: entsiklopediya. Moscow, 2001, 592 p.
 5. Grezin V.S., Novosyadlyi V.A. [Methods of calculating the age of the participant social network]. *Teoreticheskie i prikladnye voprosy obrazovaniya i nauki : sb. nauch. tr. Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. 31 marta 2014 g.* Ch. 7, Tambov, 2014, pp. 39–40.
 6. Grezin V.S. [Methods for determining the age of the person on the account on the social network]. *Nauchnaya sessiya TUSUR-2014 : materialy Vseros. nauch.-tekhn. konf. studentov, aspirantov i molodykh uchenykh*. Tomsk, 14–16 marta 2014 g. Ch. 3, Tomsk, 2014, pp. 186–189.
 7. Efron B. Bootstrap Methods: Another Look at the Jackknife. *Annals of Statistics*, 1979, vol. 7, no 1, pp. 1–26.
 8. Grezin V.S., Novosyadlyi V.A. *Programmnoe sredstvo avtomaticheskogo opredeleniya vozrasta uchastnika sotsial'noi seti Ageception. Versiya 1.1* [The software tool automatically determine the age of the participant social network Ageception. Version 1.1]. Certificate, no 2014614425, 24.04.2013.
 1. Kakkar M., Upadhyay D. Web Browsing Behaviors Based Age Detection. *International Journal of Soft Computing and Engineering (IJSCE)*, 2013, vol. 3, issue 1.
 2. Dong Nguyen, Smith N., Rose C. Author Age Prediction from Text using Linear Regression. *Proceedings of the 5th ACL-HLT Workshop on Language Technology for Cultural Heritage, Social Sciences, and Humanities*. Portland, USA, 2011, pp. 115–123.
 3. Peersman C., Daelemans W., Vaerenbergh van L. Predicting Age and Gender in Online Social Networks. *SMUC*, 11, October 28, 2011. Glasgow, UK, 2011.

References

Поступила в редакцию

24 декабря 2014 г.

УДК 519.8

РЕШЕНИЯ ДВОЙСТВЕННО СИМПЛЕКСНЫХ ИГР

© 2015 г. А.Б. Зинченко

Зинченко Александра Борисовна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра исследования операций, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: zinch46@mail.ru

Zinchenko Aleksandra Borisovna – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department of Operation Research, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: zinch46@mail.ru

Рассмотрено семейство $(0,1)$ -нормализованных, неотрицательных, несимметричных, двойственно симплексных кооперативных игр, порожденное симметричной выпуклой игрой. Показано, что все игры этого семейства имеют одинаковые множества дележей, а также совпадающие S -ядра, которые (кроме S -ядра выпуклой игры) не являются внешне устойчивыми. Для некоторых игр найдены решения по Нейману – Моргенштерну. Каждое из них состоит из S -ядра и дополнительного полиэдрального множества. Дележи из дополнительных множеств отражают наличие в игре двух групп попарно симметричных агентов.

Ключевые слова: кооперативная ТП-игра, S -ядро, NM -решение, двойственно симплексная игра.

The family of $(0,1)$ -normalized, nonnegative, nonsymmetric, dual simplex cooperative games, generated by symmetric convex game, are considered. It is shown that all games in this family have the identical imputation sets and the same cores which (except for the core of convex game) are not stable. The vNM solutions of some games are provided. Each of them consists of the core and complementary polyhedral set. The allocations in complementary sets reflect the existence in a game two groups of pairwise symmetric agents.

Keywords: cooperative TU game, core, vNM solution, dual simplex game.

Решение кооперативной игры с трансферабельной полезностью (ТП-игры), предложенное Дж. фон Нейманом и О. Моргенштерном [1] (NM -решение), прогнозирует поведение экономических агентов, но с NM -решениями трудно работать, так как нет универсального алгоритма их вычисления и критерия существования. Основным решением – множеством ТП-игры стало S -ядро. Однако S -ядро может быть пустым, а непустое S -ядро – состоять из парадоксальных дележей [2]. В литературе описаны NM -решения некоторых частных классов игр, но, насколько известно автору, NM -решения двойственно симплексных игр [3] не исследовались.

В данной статье рассматриваются $(0,1)$ -нормализованные, несимметричные, двойственно

симплексные (1-выпуклые) игры, порожденные симметричной выпуклой игрой. Показано, что все они имеют одинаковые множества дележей, а также совпадающие S -ядра, которые (кроме S -ядра выпуклой игры) не являются внешне устойчивыми. Для некоторых игр этого семейства найдены NM -решения. Каждое из них состоит из S -ядра и дополнительного множества. Дележи из дополнительных множеств отражают наличие в игре двух групп попарно симметричных агентов.

Далее будем отождествлять ТП-игру (N, v) , где $N = \{1, \dots, n\}$, с ее характеристической функцией $v: 2^N \rightarrow R$ и для любых $x \in R^n$, $K \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$ использовать обозначение $x(K) = \sum_{i \in K} x_i$. Предполага-

ется, что $v(\emptyset) = 0$, $n \geq 2$. NM-решение определяется через отношение предпочтения на множестве дележей $I(v) = \{x \in R^n \mid x(N) = v(N), x_i \geq v(i), i \in N\}$. Говорят, что $x \in I(v)$ доминирует $y \in I(v)$ по коалиции K ($x \succ_K y$), если $x(K) \geq v(K)$ и $x_i > y_i$, $i \in K$. Дележ $x \in I(v)$ доминирует $y \in I(v)$ ($x \succ y$), если $x \succ_K y$ для некоторой коалиции $K \in 2^N \setminus \{\emptyset\}$. Обозначим

$$\Omega = \{K \in 2^N \mid 2 \leq |K| \leq n-1\};$$

$$Dom_K A = \{x \in I(v) \mid \exists y \in A, y \succ_K x\};$$

$$Dom A = \bigcup_{K \in \Omega} Dom_K A.$$

NM-решение $NM(v)$ игры v есть подмножество дележей, удовлетворяющее условиям: $NM(v) \cap Dom NM(v) = \emptyset$ (внутренняя устойчивость), $I(v) \setminus NM(v) \subset Dom NM(v)$ (внешняя устойчивость). Если $v \in \bigcup_{i \in N \setminus K} v \in \bigcup_{i \in N \setminus K} v \in \bigcup_{i \in N \setminus K} v$, $K \subset N$, то С-ядро $\tilde{N}(v) = \{x \in I(v) \mid x(K) \geq v(K), K \in 2^N \setminus \{N, \emptyset\}\}$ игры v внутренне устойчиво. Внешне и внутренне устойчивое С-ядро называется устойчивым. Например, $\tilde{N}(v)$ устойчиво в классе выпуклых игр.

Обозначим через C^N и $1C^N$ множества $(0, 1)$ -нормализованных, неотрицательных, выпуклых и 1-выпуклых игр n лиц соответственно, а через $NM(v)$ – семейство NM-решений игры v . Множество $1C^N$ определяется условиями: $v(S) \geq 0$, $S \in 2^N$;

$$v(N) = 1; v(i) = 0, i \in N; m^v(N) \geq 1,$$

$$v(K) + m^v(N \setminus K) \leq 1, 1 \leq |K| \leq n-2,$$

где $m^v = \bigcup_{i \in N} v \in \bigcup_{i \in N} v \in \bigcup_{i \in N} v$ – вектор вкладов игроков в максимальную коалицию (вектор маргинальных вкладов).

Теорема 1. Пусть $n \geq 4$, $H \in \Omega$, $|H| \leq n-2$, $\dot{m} = 1/(n-1)$,

$$\omega(K) = (|K|-1)\dot{m}, K \in 2^N \setminus \{\emptyset\},$$

$$v^H(K) = \begin{cases} \omega(K), & K \not\subseteq H, \\ 0, & K \subseteq H. \end{cases}$$

Тогда

$$1. 1C^N \cap C^N = \{\omega\}, NM \bigcup_{K \in \Omega} \tilde{N}(v^H);$$

$$2. v^H \in 1C^N, I(v^H) = I(\omega) = \{x \in R_+^n \mid x(N) = 1\},$$

$$\tilde{N}(v^H) = \tilde{N}(\omega) = \{x \in I(\omega) \mid x_i \leq \dot{m}, i \in N\};$$

$$3. C(v^H) \not\subset NM(v^H).$$

Доказательство. 1. Равенство $1C^N \cap C^N = \{\omega\}$ доказано в [4]. $NM \bigcup_{K \in \Omega} \tilde{N}(v^H)$ следует из выпуклости игры ω .

2. Игры ω и v^H имеют $(0, 1)$ -форму и $m_i^\omega = m_i^{v^H} = \dot{m}$, $i \in N$. Игра v^H 1-выпукла, так как

$$m^{v^H}(N) = n/(n-1) > 1 \text{ и для } K \in 2^N \setminus \{\emptyset\} \text{ справедли-}$$

$$\text{во } v^H(K) + m^{v^H}(N \setminus K) \leq \omega(K) + (n-|K|)\dot{m} = 1.$$

Равенство $I(v^H) = I(\omega)$ очевидно. С-ядро любой игры $v \in 1C^N$ имеет вид $\tilde{N}(v) = \{x \in I(v) \mid x_i \leq m_i^v, i \in N\}$ [3]. Следовательно, $\tilde{N}(v^H) = \tilde{N}(\omega)$.

3. Определим $y \in I(v^H)$, где

$$y_i = \begin{cases} 1/(n-|H|), & i \in N \setminus H, \\ 0, & i \in H. \end{cases}$$

Очевидно, $y \notin \tilde{N}(v^H)$. Кроме того, $y \notin \bigcup_{K \subseteq H} Dom_K \tilde{N}(v^H)$, так как $y \in R_+^n$ и $v^H(K) = 0$ для всех $K \subseteq H$. Если $K \in \Omega$ и $K \not\subseteq H$, то $y_i > \dot{m}$, по крайней мере для одного $i \in K$. Значит, $y \notin \bigcup_{K \not\subseteq H} Dom_K \tilde{N}(v^H)$. Получили, что $y \notin Dom \tilde{N}(v^H)$.

Для нахождения NM-решений игры v^H требуется описание подмножества дележей игры ω , доминируемых ее С-ядром по фиксированной коалиции $K \in \Omega$ (лемма 1) и подмножества дележей игры v^H , не доминируемых ее С-ядром (лемма 2).

Лемма 1. Множество $Dom_K \tilde{N}(\omega)$, где $K \in \Omega$, состоит из дележей $x \in I(\omega)$, для которых

$$x(K) < (|K|-1)\dot{m}; x_i < \dot{m}, i \in K. \quad (1)$$

Доказательство. Возьмем дележ $x \in I(\omega)$, удовлетворяющий (1). Положим $\Delta = \omega(K) - x(K)$, $b_i = \dot{m} - x_i$, $i \in K$. Рассмотрим $y \in R^n$, где

$$y_i = \begin{cases} x_i + \varepsilon_i, & i \in K, \\ \dot{m}, & i \in N \setminus K, \end{cases}$$

$\sum_{i \in K} \varepsilon_i = 0$, $0 < \varepsilon_i \leq b_i$, $i \in K$. Определяющая $\varepsilon \in R^{|K|}$ система имеет решение, так как $\sum_{i \in K} b_i > \Delta$.

Очевидно, $y \in C(\omega)$ и $y \succ_K x$. Значит, $x \in Dom_K \tilde{N}(\omega)$. Обратно, пусть $x \in Dom_K \tilde{N}(\omega)$. Тогда существует такой вектор $y \in C(\omega)$, что $y \succ_K x$. Из определения доминирования имеем $x_i < y_i \leq \dot{m}$, $i \in K$, $x(K) < y(K) = \omega(K)$, т.е. x удовлетворяет (1).

Лемма 2. Пусть $n \geq 4$, $H \in \Omega$, $|H| \leq n-2$, $\Omega_H^1 = \{K \in \Omega \mid K \subseteq H\}$, $\Omega_H^2 = \{K \in \Omega \mid K \not\subseteq H\}$, $L = (\bigcup_{K \in \Omega_H^1} Dom_K \tilde{N}(\omega)) \setminus (\bigcup_{K \in \Omega_H^2} Dom_K \tilde{N}(\omega))$. Тогда $L = \bigcup_{K \in \Omega_H^1} L_K$, где L_K – множество дележей $x \in I(\omega)$, удовлетворяющих условиям (1),

$$x_i \geq \dot{m}, i \in N \setminus H, \quad (2)$$

$$\max_{i \in N \setminus K} x_i > \dot{m}, \quad (3)$$

и справедливо равенство

$$(I(v^H) \setminus \tilde{N}(v^H)) \setminus Dom \tilde{N}(v^H) = L.$$

Доказательство. Из $\omega \in C^N$, устойчивости С-ядра выпуклой игры и равенства $\Omega = \Omega^1 \cup \Omega^2$ имеем $I(\omega) \setminus \tilde{N}(\omega) = \text{Dom} \tilde{N}(\omega) =$
 $= (\cup_{K \in \Omega_H^1} \text{Dom}_K \tilde{N}(\omega)) \cup (\cup_{K \in \Omega_H^2} \text{Dom}_K \tilde{N}(\omega)),$
 $L = (I(\omega) \setminus \tilde{N}(\omega)) \setminus (\cup_{K \in \Omega_H^2} \text{Dom}_K \tilde{N}(\omega)). \quad (4)$

Пусть $x \in L$. Тогда $x \in I(\omega)$ и существует такая коалиция $K \in \Omega_H^1$, что $x \in \text{Dom}_K C(\omega)$. По лемме 1 x удовлетворяет (1). Так как $x \notin C(\omega)$, то по теореме 1 для некоторого $l \in N \setminus K$ должно выполняться $x_l > \dot{m}$. Значит, x удовлетворяет (3). Если существует такое $r \in (N \setminus H) \setminus l$, что $x_r < \dot{m}$, то $x(K \cup r) < |K| \dot{m}$ и $x \in \text{Dom}_{K \cup r} \tilde{N}(\omega)$. Это противоречит (4), так как $K \cup r \in \Omega_H^2$. Значит, x удовлетворяет (2). Получили, что $x \in L_K$, т.е. $L \subseteq \cup_{K \in \Omega_H^1} L_K$.

Обратно, пусть $K \in \Omega_H^1$ и $x \in L_K$. Из теоремы 1 и (3) следует $x \notin C(\omega)$. Любая коалиция $S \in \Omega_H^2$ содержит по крайней мере один элемент из $N \setminus H$. Из (2) и леммы 1 имеем $x \notin \cup_{S \in \Omega_H^2} \text{Dom}_S \tilde{N}(\omega)$. Согласно (4) $x \in L$, т.е. $L \supseteq \cup_{K \in \Omega_H^1} L_K$. Из $I(v^H) \subset R_+^n$ и $v^H(K) = 0$, $K \subseteq H$, следует $\cup_{K \in \Omega_H^1} \text{Dom}_K \tilde{N}(v^H) = \emptyset$. Из теоремы 1 и $v^H(K) = \omega(K)$, $K \not\subseteq H$, имеем $\cup_{K \in \Omega_H^2} \text{Dom}_K \tilde{N}(v^H) = \cup_{K \in \Omega_H^2} \text{Dom}_K \tilde{N}(\omega)$. Значит, $\text{Dom} \tilde{N}(v^H) = \cup_{K \in \Omega_H^2} \text{Dom}_K \tilde{N}(\omega)$. Доказываемое равенство вытекает из (4).

В следующей теореме дано явное описание НМ-решения игры v^H , в которой коалиция H состоит из двух игроков.

Теорема 2. Пусть $n \geq 4$, $H \in \Omega$, $|H| = 2$ и F_H – множество дележей $x \in I(v^H)$, удовлетворяющих условиям

$$x(H) < (|H| - 1)\dot{m}, \quad (5)$$

$$x_i = \mu^x = \frac{1 - x(H)}{n - |H|}, \quad i \in N \setminus H. \quad (6)$$

Тогда $Q = C(v^H) \cup F_H \in \text{NM}(v^H)$.

Доказательство. Покажем вначале, что $F_H \subseteq L_H = L$, где L и L_H – множества, определенные в лемме 2. Если $|H| = 2$, то $\Omega_H^1 = \{H\}$, следовательно, $L_H = L$. Возьмем $x \in F_H$. Из (5) и $x \in R_+^n$ имеем $x_i < \dot{m}$, $i \in H$. Кроме того, $x_i > \frac{1 - \dot{m}}{n - 2}$, $i \in N \setminus H$, так как $x(H) < \dot{m}$. Значит, x удовлетворяет

(2) и условиям, полученным из (1), (3) заменой K на H , т.е. $x \in L_H$. Докажем внутреннюю устойчивость множества Q . Согласно второму пункту леммы 2,

$$\text{Dom} \tilde{N}(v^H) \cap L = \emptyset, \quad \text{поэтому} \quad \text{Dom} \tilde{N}(v^H) \cap F_H = \emptyset.$$

Так как $v^H(K) + \sum_{i \in N \setminus K} v^H(i) = (|K| - 1)\dot{m} < v^H(N) = 1$

для всех $K \subset N$, то v^H удовлетворяет достаточному условию внутренней устойчивости С-ядра. Значит,

$$\text{Dom} I(v^H) \cap \tilde{N}(v^H) = \emptyset. \quad \text{Покажем, что}$$

$$\text{Dom} F_H \cap F_H = \emptyset. \quad \text{Возьмем } x, y \in F_H, \quad x \neq y \text{ и}$$

предположим противное, т.е. $x \succ_S y$ для некоторой коалиции $S \in \Omega$. Представим S в виде $S = S' \cup S''$,

где $S' \in N \setminus H$, $S'' \subseteq H$. Тогда $S' \neq \emptyset$, так как

$$v^H(K) = 0, \quad K \subseteq H, \quad \text{и } y \in R_+^n; \quad S'' \neq \emptyset, \quad \text{так как из}$$

$$x_i > \dot{m}, \quad i \in N \setminus H, \quad \text{следует } x(S') > |S'| \dot{m} > v^H(S').$$

Если $|S''| = 1$, то $x(S) > |S'| \dot{m} = v^H(S)$ (противоречит

$$x(S) \leq v^H(S)). \quad \text{Если } S'' = H, \quad \text{то } x(H) = 1 - (n - 2)\mu^x <$$

$$< 1 - (n - 2)\mu^y = y(H) \quad (\text{противоречит } x_i > y_i, \quad i \in H).$$

Докажем внешнюю устойчивость множества Q , т.е.

$$I(v^H) \setminus Q \subset \text{Dom} Q. \quad \text{Это включение эквивалентно}$$

$$((I(v^H) \setminus \tilde{N}(v^H)) \setminus F_H) \setminus \text{Dom} \tilde{N}(v^H) \subset \text{Dom} F_H. \quad \text{Учи-}$$

тывая пункт 2 леммы 2, нужно показать, что

$$L \setminus F_H \subset \text{Dom} F_H. \quad \text{Пусть } x \in L \setminus F_H = L_H \setminus F_H,$$

$$x_{\min} = \min_{i \in N \setminus H} x_i \quad \text{и } H = \{1, 2\}. \quad \text{По лемме 2 } x \in I(v^H) \text{ и}$$

выполняется (5). Дележ x не удовлетворяет (6), так

как в противном случае он принадлежал бы F_H . Значит,

$$\Delta = x(N \setminus H) - x_{\min}(n - 2) > 0. \quad \text{Определим}$$

$$y \in R^n, \quad \text{где}$$

$$y_i = \begin{cases} \mu^y = x_{\min} + \beta, & i \in N \setminus H, \\ x_i + \alpha_i, & i \in H, \end{cases} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{\Delta - \alpha_1 - \alpha_2}{n - 2}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 < \min\{\Delta, \dot{m} - x(H)\}, \quad \alpha_i > 0,$$

$i \in H$. Существование таких α_1 и α_2 следует из

$$\Delta > 0, \quad x(H) < \dot{m}. \quad \text{Очевидно, } y \in I(v^H) \text{ и } y(H) < \dot{m}.$$

Учитывая $y(N) = 1$, получаем $y_i = \mu^y = \frac{1 - y(H)}{n - 2}$,

$i \in N \setminus H$. Значит, y удовлетворяет (5), (6), т.е.

$$y \in F_H. \quad \text{Пусть } i_{\min} \in \arg \min_{i \in N \setminus H} x_i, \quad \text{тогда } y \succ_{H \cup \{i_{\min}\}} x,$$

так как $y_i > x_i$, $i \in H$, $\mu^y > x_{\min}$ и

$$y(H \cup \{i_{\min}\}) = \frac{1 + (n - 3)(x(H) + \alpha_1 + \alpha_2)}{n - 2} <$$

$$< \frac{1 + (n - 3)\dot{m}}{n - 2} = 2\dot{m} = v^H(H \cup \{i_{\min}\}).$$

Покажем, что при увеличении мощности коалиции H множество F_H теряет свойство внутренней устойчивости.

Пример 1. Рассмотрим игру v^H , в которой $n=5$, $H=\{1,2,3\}$. Тогда $\dot{m}=1/4$, $v^H(K)=\frac{|K|-1}{4}$, $K \not\subset H$, и $v^H(K)=0$, $K \subseteq H$. Дележи $x=(1/8, 0, 0, 7/16, 7/16)$, $y=(1/16, 1/64, 1/64, 29/64, 29/64)$ удовлетворяют (5), (6), так как $x(H)=1/8 < 2\dot{m}$, $y(H)=3/32 < 2\dot{m}$, $x_4=x_5$, $y_4=y_5$. Значит, $x, y \in F_H$. Однако $y \succ_{\{2,3,4\}} x$.

В следующей теореме описано НМ-решение игры v^H пяти лиц, в которой $|H|=3$.

Теорема 3. Пусть $n=5$, $H \in \Omega$, $|H|=3$ и P_H – множество дележей $x \in I(v^H)$, удовлетворяющих (5), (6) и условию

$$\mu^x + x(S) \geq 2\dot{m}, \quad S \subset H, |S|=2. \quad (8)$$

Тогда $W = C(v^H) \cup P_H \in NM(v^H)$.

Доказательство. Некоторые из утверждений, использующихся при доказательстве данной теоремы, аналогичны утверждениям из доказательства теоремы 2. Они приводятся без пояснений. Пусть $x \in P_H$ и $H=\{1,2,3\}$. Предположим, что $x_i \geq \dot{m}$ для некоторого $i \in H$, например, $x_1 \geq \dot{m}$. Согласно (5), (6) $\mu^x > \frac{1-2\dot{m}}{2} = \dot{m}$. Из (8) вытекает $x_2 + x_3 \geq 2\dot{m} - \frac{1-x(H)}{2} = \frac{x(H)}{2}$. Следовательно, $x_2 + x_3 \geq x_1 \geq \dot{m}$ и $x(H) \geq 2\dot{m} = (|H|-1)\dot{m}$, что противоречит (5). Таким образом, $x_i < \dot{m}$, $i \in H$. Получили $P_H \subset L_H \subset L$. Множество W будет внутренне устойчивым, если $P_H \cap \text{Dom} P_H = \emptyset$. Возьмем $x, y \in P_H$, $x \neq y$ и предположим противное, т.е. $x \succ_S y$ для некоторой коалиции $S \in \Omega$. Тогда $S = S' \cup S''$, где $\emptyset \neq S' \subseteq N \setminus H$, $\emptyset \neq S'' \subseteq H$. Доминирование $x \succ_S y$ невозможно, если $|S''|=1$ или $S''=H$. Если $|S''|=2$, то, учитывая (8), также получаем противоречие $x(S) > y(S) = |S'| \mu^y + y(S'') \geq v^H(S)$. Докажем внешнюю устойчивость множества W , т.е. $I(v^H) \setminus W \subset \text{Dom} W$, что эквивалентно $L \setminus P_H \subset \text{Dom} P_H$. Пусть $x \in L \setminus P_H$. Тогда $x \in I(v^H)$ и возможны случаи.

1. $x \in L_H$, т.е. $x(H) < 2\dot{m}$, $x_i < \dot{m}$, $i \in H$, $\max_{i \in N \setminus H} x_i > \dot{m}$, $x_{\min} = \min_{i \in N \setminus H} x_i \geq \dot{m}$. В этом случае x удовлетворяет (5).

1.1. Существует такая коалиция $S \subset H$, $|S|=2$, что $x_{\min} + x(S) < 2\dot{m}$. Заметим, что при выполнении

$x_4 = x_5 = \mu^x$ дележ x не удовлетворяет (8), а при $x_4 \neq x_5$ он не удовлетворяет (6). Без ограничения общности, пусть $S = \{2,3\}$. Рассмотрим $y \in R^n$, где

$$y_i = \begin{cases} \mu^y = x_{\min} + \beta, & i \in \{4,5\}, \\ \alpha_1, & i=1, \\ x_i + \alpha_i, & i \in \{2,3\}, \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 < 2\dot{m} - x_{\min} - x(S), \alpha_i > 0, i \in S, \\ \alpha_1 = x(S) + \alpha_2 + \alpha_3, \beta = 2\dot{m} - x_{\min} - \alpha_1. \end{cases} \quad (10)$$

При сделанных предположениях такие α_2, α_3 существуют, $0 < \alpha_1 = 2\dot{m} - x_{\min} - \beta \leq \dot{m} - \beta < \dot{m}$, $\beta > 0$. Мы имеем $y \in I(v^H)$ и $y(H) = 2\alpha_1 < 2\dot{m}$, т.е. y удовлетворяет (5), (6). Кроме того, $\mu^y + y(S) = x_{\min} + \beta + \alpha_1 = 2\dot{m}$, $\mu^y + y(\{1,2\}) > 2\dot{m}$, $\mu^y + y(\{1,3\}) > 2\dot{m}$. Значит, y удовлетворяет (8). Получили $y \in P_H$. Далее $y \succ_{\{2,3,4\}} x$, так как $y(2,3,4) = \mu^y + y(S) = 2\dot{m} = v^H(2,3,4)$.

1.2. $x_{\min} + x(S) \geq 2\dot{m}$ для всех $S \subset H$, $|S|=2$. Тогда $x_4 \neq x_5$, так как в противном случае $x \in P_H$. Определим $y \in R^n$ по формуле (7), где $2\beta + \sum_{i=1}^3 \alpha_i = x(N \setminus H) - 2x_{\min}$, $\sum_{i=1}^3 \alpha_i < x(N \setminus H) - 2x_{\min}$, $\alpha_i > 0$, $i \in H$. Определяющая α_i , $i \in H$, система разрешима, так как из $x_4 \neq x_5$ вытекает $x(N \setminus H) - 2x_{\min} > 0$. Мы имеем $y \in I(v^H)$ и $y(H) = x(H) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i < 2\dot{m}$. Следовательно, y удовлетворяет (5), (6). Дележ y удовлетворяет (8), так как $\mu^y + y(S) > x_{\min} + x(S) \geq 2\dot{m}$ для всех $S \subset H$, $|S|=2$. Получили $y \in P_H$. Покажем, что $y \succ_{H \cup \{i_{\min}\}} x$, где $i_{\min} \in \arg \min_{i \in N \setminus H} x_i$. Действительно,

но, $y_i > x_i$, $i \in H$, $\mu^y > x_{\min}$ и

$$\begin{aligned} y(H \cup \{i_{\min}\}) &= x_{\min} + \beta + x(H) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i = \\ &= \frac{1 + x(H) + \sum_{i=1}^3 \alpha_i}{2} < 3\dot{m} = v^H(H \cup \{i_{\min}\}). \end{aligned}$$

2. $x \notin L_H$. Тогда существует такая коалиция $K \subset H$, $|K|=2$, что $x \in L_K$. По лемме 2 $x(K) < \dot{m}$, $x_i \geq \dot{m}$, $i \in N \setminus H$, $\max_{i \in N \setminus K} x_i > \dot{m}$, $x_i < \dot{m}$, $i \in K$. Пусть $K = \{2,3\}$. Если $x_1 < \dot{m}$, то $x \in L_H$, что противоречит предположению. Значит, $x_1 \geq \dot{m}$. Определим $y \in R^n$ по формуле (9), а α_i , $i \in H$, и β – по формуле (10), где $S = K$. Такие α_2, α_3 существуют и

$2\dot{m} - x_{\min} - x(K) \geq \frac{x_1 - x(K)}{2} > 0$. Аналогично пункту

1.1 доказывается, что $y \in P_H$ и $y \succ_{\{2,3,4\}} x$.

Покажем, что утверждение теоремы 3 неверно для игр v^H , где $n > 5$ и $|H| = 3$.

Пример 2. Пусть $n = 6$ и $H = \{1, 2, 3\}$. Тогда $v^H(K) = \frac{|K| - 1}{5}$ для $K \subset H$, $v^H(K) = 0$ для $K \subseteq H$. Дележ $y = (0, 0, 1/10, 3/10, 3/10, 3/10)$ не принадлежит С-ядру, так как $\mu^y = 3/10 > \dot{m} = 1/5$, и $y \notin P_H$, так как $\mu^y + y(1, 2) = 3/10 < 2\dot{m} = 2/5$. Значит, $y \notin W$. Как при доказательстве теоремы 3, получаем, что доминирование возможно только по коалициям $\{1, 2, j\}$, $j \in N \setminus H$. Рассмотрим коалицию $\{1, 2, 4\}$ и предположим существование такого дележа $x \in W$, что $x \succ_{\{1, 2, 4\}} y$. Тогда $x(1, 2, 4) \leq v^H(1, 2, 4) = 2\dot{m}$. Из $x_4 > y_4 > \dot{m}$ следует $x \notin C(v^H)$. Значит, $x \in P_H$. Из (8) и последнего неравенства имеем $x(1, 2, 4) = 2\dot{m}$. Согласно (5), (6) $\mu^x = x_5 = x_6 > \dot{m}$. Тогда $x(N) = 2\dot{m} + 2\mu^x + x_3 > 1$, что противоречит

$x \in I(v^H)$. Получили $y \notin Dom W$. Значит, при $n > 5$ и $|H| = 3$ множество W теряет свойство внешней устойчивости.

Представляет также интерес нахождение НМ-решений для игр $v^H/\dot{m}$, $\omega/\dot{m}$ с целочисленными дележами. Известно [5], что даже выпуклость характеристической функции недостаточна для устойчивости С-ядра дискретной игры.

Литература

1. Нейман фон Дж., Моргенштерн О. Теория игр и экономическое поведение. М., 1970. 665 с.
2. Zinchenko A.B. On polytope of (0-1)-normal big boss games: redundancy and extreme points // Contributions to game theory and management. 2012. Vol. 5. P. 386–397.
3. Driessen T.S.H., Tijs S.H. The τ -value, the nucleolus and the core for a subclass of games // Methods Operations Research. 1983. Vol. 46. P. 395–406.
4. Зинченко А.Б. Устойчивость ядер кооперативной игры в форме характеристической функции // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2014. № 3. С. 14–18.
5. Zinchenko A.B. Set-valued solutions for cooperative game with integer side payments // Applied Mathematical Sciences. 2014. Vol. 11, № 8. P. 541–548.

References

1. Neiman fon Dzh., Morgenshtern O. *Teoriya igr i ekonomicheskoe povedenie* [Theory of games and economic behavior]. Moscow, 1970, 665 p.
2. Zinchenko A.B. On polytope of (0-1)-normal big boss games: redundancy and extreme points. *Contributions to game theory and management*, 2012, vol. 5, pp. 386-397.
3. Driessen T.S.H., Tijs S.H. The τ -value, the nucleolus and the core for a subclass of games. *Methods Operation Research*, 1983, vol. 46, pp. 395-406.
4. Zinchenko A.B. Ustoichivost' yader kooperativnoi igry v forme kharakteristicheskoi funktsii [Stability of nuclei cooperative game in characteristic function form]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*. 2014, no 3, pp. 14-18.
5. Zinchenko A.B. Set-valued solutions for cooperative game with integer side payments. *Applied Mathematical Sciences*, 2014, vol. 11, no 8, pp. 541-548.

УДК 622.235.5.001.57

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ВЗРЫВОВ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ В ДВУХСЛОЙНОЙ СРЕДЕ

© 2015 г. Р.З. Камалян, С.Р. Камалян

Камалян Рубен Завенович – доктор технических наук, профессор, кафедра математики и вычислительных систем, Академия маркетинга и социально-информационных технологий, ул. Зиповская, 5, г. Краснодар, 350010, e-mail: karuzav@mail.ru

Kamalian Ruben Zavenovich – Doctor of Technical Science, Professor, Department of Mathematics and Computer Systems, Academy of Marketing and Social and Information Technologies, Zipovskaya St., 5, Krasnodar, 350010, Russia, e-mail: karuzav@mail.ru

Камалян Самвел Рубенович – кандидат физико-математических наук, доцент, заведующий кафедрой математики и прикладной информатики, Краснодарский филиал Российского государственного торгово-экономического университета, ул. Садовая, 17, г. Краснодар, 350002, e-mail: karuzav@mail.ru

Kamalian Samvel Rubenovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Head of Department of Mathematics and Applied Informatics, Krasnodar Branch of the Russian State University of Economics and Trade, Sadovaya St., 17, Krasnodar, 350002, Russia, e-mail: karuzav@mail.ru

Представлены результаты экспериментальных исследований на физических моделях взрывов цилиндрических зарядов в двухслойной среде. Основной целью исследований явилось качественное изучение смещений среды в результате динамического воздействия на нее массива. Установлено наличие трех областей разрушения массива. Соотношение между областями существенно зависит от условий на границе массива. Показано, что увеличение смещения при двустороннем инициировании происходит за счет повышения давления продуктов взрыва при встрече детонационных волн. Прямолинейность датчиков до и после взрыва свидетельствует о прохождении по среде плоской волны напряжений и, следовательно, об одноосности деформированного состояния среды.

Ключевые слова: модель, массив, трещины, контакт, разрушение, детонирующий шнур, продукты взрыва, заряд, деформация.

There are presented experimental studies results on physical models of explosions cylindrical charges in two-layer medium. The main goal of the research was a qualitative study of the displacement of the medium as a result of the dynamic effects on her array. The presence of the three areas of destruction of the array. The ratio between the areas substantially depends on the conditions at the boundary of the array. It is shown that an increase in bilateral offset initiation occurs by increasing the pressure of the explosion products at a meeting of detonation waves. Straightness sensors before and after the explosion indicates a plane passing through the medium-wave voltages and therefore, the deformed state of the uniaxial medium.

Keywords: model, array, fracture, contact, destruction, detonating cord, combustion products, charge, deformation.

Исследования в данной работе проводились на физических моделях; моделировался случай взрыва зарядов в двухслойной среде. Конкретным примером служило взрывание в зажимающей среде (ЗС) при разработке месторождений как открытым, так и подземным способами. Заметим, что физическое моделирование давно получило достаточно широкое распространение во взрывном деле [1].

Основной целью моделирования явилось качественное изучение смещений среды в результате динамического воздействия на нее массива. От этого процесса зависят размеры и форма разрушенной взрывом секции массива и результаты ее выпуска. В связи с этим было уделено внимание характеру разрушения массива.

Параметры и техника моделирования

Параметры создаваемых моделей обусловлены тем, что исследовался подземный взрыв в системе

разработки. В первую очередь модели геометрически походили на натуру. Были выбраны вертикальные веерные цилиндрические заряды как наиболее распространенные при подземной разработке крепких горных пород. Расстояние между веерами w и концами скважин в веере a составляли отношение $a/w=2\div 3$. Величину a подбирали таким образом, чтобы, с одной стороны, объяснить проработку массива между скважинами (ограничение сверху), а с другой – достичь примерно геометрического подобия в смещении контакта взорванного массива со средой (ограничение снизу). Далее под массивом понимается значительно более жесткая среда, а просто под средой – сжимаемая пластическая среда.

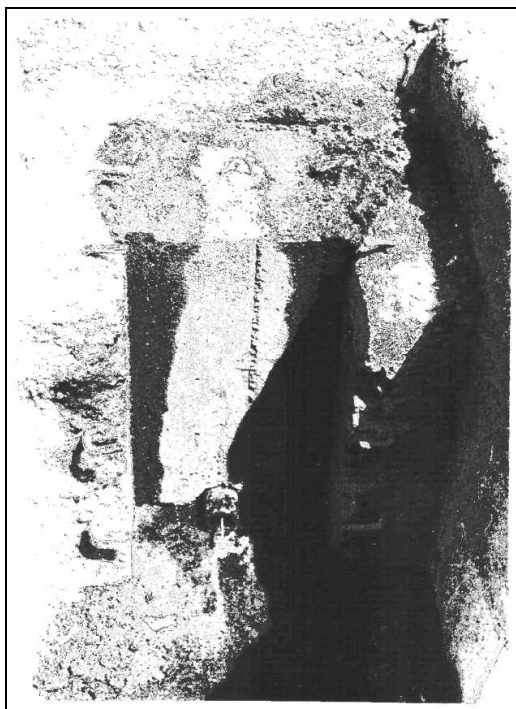
Модели отливали из песчано-цементной смеси в отношении 2,5:1,0 и выдерживали около месяца. В объемных моделях были приняты следующие параметры системы зарядов: $w = 6$ см; $a = 18$ см. Зарядные выработки создавали с помощью стальных стержней

диаметром 6 мм, после чего в них вводили отрезки детонирующего шнура ДШ-А или ДШ-Э.

Модели *А* имели форму параллелепипеда с ребрами 60, 32 и 30 см. Заряженную модель (рис. 1а) опускали в бетонированную яму и заливали песчано-цементным раствором (рис. 1б).



а



б

Рис. 1. Заряженные модели: а – с выводом ДШ по периметру; б – установленная в яме (вывод ДШ снизу)

Этим создавали условия, аналогичные тем, которые реально имеют место при отбойке рудного тела в пределах некоторого контура. В качестве ЗС в яму засыпали щебень (фракция $\Delta \leq 3$ см) или гальку ($\Delta \leq 10$ см) и сверху укладывали массивную бетонную плиту, имитирующую более глубокое погружение массива в среду и исключая выброс при взрыве. Заряды инициировали сверху, выводя ДШ по периметру модели, или снизу, помещая собранный пучок ДШ в трубу из стали (ст. 3), обладающей пластическими свойствами. Взрывали по два-три веера. Некоторое замедление между ними создавали с помощью петель ДШ. После взрыва осколки модели извлекали из ямы в той же последовательности, в какой они находились в объеме разрушенной модели.

Объемные модели *Б* и плоские модели *В* применяли для исследования смещений среды. Модели *Б* с размерами ребер 100, 90 и 30 см также помещали в бетонированную яму, а средой служил крупнозернистый песок. Большой размер модели позволял сразу создать в ней большую разницу в концентрации ВВ в силу веерного расположения зарядов: от 1 до 8 кг/м³ (в 1 м ДШ помещается 12 г ТЭНа), а для взрывания модели выводить ДШ по ее периметру, не вызывая при этом заметных искажений в основном объеме. После взрыва с модели снимали горизонтальные слои и каждую образованную поверхность с наложенной на нее масштабной рейкой фотографировали. Засыпку среды с противоположной от модели стороны ограничивала жесткая стенка бетонной ямы. Свободная плоскость модели устанавливалась параллельно этой стенке на известном расстоянии. Это позволяло по фотографиям строить вертикальный продольный (перпендикулярный плоскости веера) разрез модели и показать на нем смещение контакта разрушенного массива со средой.

Плоские модели *В* имели форму параллелепипеда с ребрами 30, 20 и 5 см, одну «скважину» с $w = 5$ см и помещались в металлический взрывной бокс (рис. 2). Бокс со снятой крышкой укладывали горизонтально на щебневую подушку. Затем в него укладывали модель и среду – щебень фракции 0,5÷3 см. В среде устанавливали датчики-стержни из алюминиевой проволоки. После этого в модель вводили ДШ, накладывали масштабную рейку и фотографировали. Досыпав щебень, бокс закрывали крышкой и зажимали струбцинами. Инициирование заряда было одно- и двусторонним.

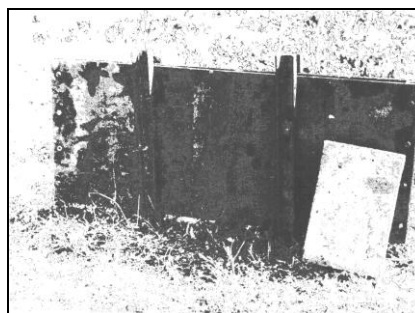


Рис. 2. Общий вид бокса и модели *В*

Имелись модели с увеличенным диаметром скважины, в среднюю треть которой вводили дополнительный отрезок ДШ длиной около 12 см, а торцы сквозной скважины засыпали песком. В этом случае модель укладывали в бокс после зарядки. После взрыва снимали крышку, вскрывали датчики, накладывали масштабную рейку и снова фотографировали модель.

Модели с неизменными параметрами взрывали не менее двух раз. От сходимости результатов этих двух взрывов, которая была довольно высокой, зависела необходимость их повторения.

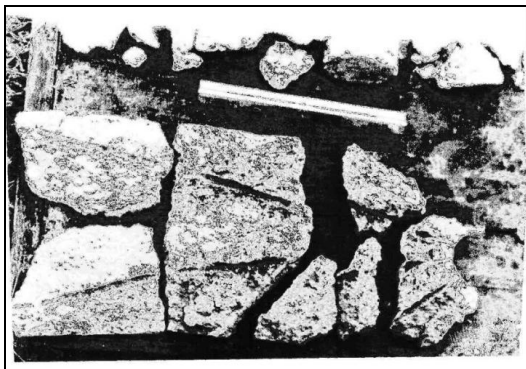
Характер разрушения массива

На рис. 3 показаны осколки моделей после взрывов в среде с $\Delta \leq 3$ см и 10 см соответственно. Значительно более крупные осколки принадлежат первому слою, имевшему непосредственный контакт со средой. Дробление второго слоя, даже при весьма незначительном замедлении взрыва его зарядов (петля ДШ длиной 5 м дает замедление 0,8 мс), в 2÷4 раза лучше.

Если рассматривать размеры осколков и характер разрушения в объеме модели, то здесь можно выделить три характерные области (рис. 3). Образование этих областей обязано изменению только расстояния между скважинами в силу их веерного расположения. В области 1 – примерно верхней трети модели на рис. 3, где $3,7 > a/w > 2,7$, особенность разрушения состоит в том, что неразрушенные части слоя в форме равнобедренных треугольных призм одним своим ребром примыкают к зарядам. На рис. 3а – это два верхних осколка. Остальная часть слоя, в данном случае также в треугольных призмах, разрушена радиальными трещинами, поверхности которых проходят через оси зарядов.

В области 2 – средней по высоте трети модели на рис. 3, где $2,7 > a/w > 1,3$, разрушение произошло только вблизи плоскости веера скважин, подобно тому как это происходит при контурном взрывании.

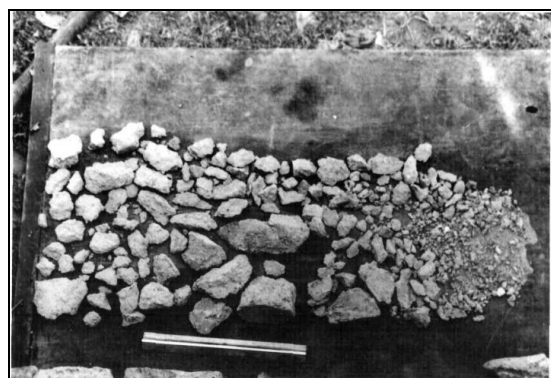
И, наконец, в области 3, где $1,3 > a/w$, разрушение происходило в волне сжатия. За зоной интенсивного дробления следует зона, в которой преобладающее число поверхностей трещин почти перпендикулярно к плоскости веера, что характерно для разрушения образцов под прессом при смазанных опорных гранях.



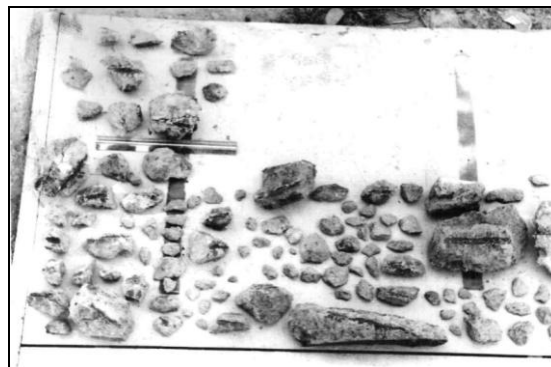
а



б



в



г

Рис. 3. Осколки модели при $\Delta \leq 3$ см: а – первый слой; б – второй слой; в – осколки, принадлежность которых не удалось выявить; г – осколки модели при $\Delta \leq 10$ см

Области 1 и 2 разделены трещиной, поверхность которой нормальна к плоскости веера. То же самое для областей 2 и 3.

Соотношение между областями 1, 2, 3 существенно зависит от условий на границе массива. В нашем случае эти условия определяются крупностью зерен среды. Как видно из сравнения рис. 3, увеличение Δ привело к улучшению дробления первого слоя массива. Контакт массива со средой имеет точечный характер (размеры поверхности контакта много меньше

размеров зерна). Если допустить, что зернами среды являются шары, то при $\Delta \rightarrow 0$ мы приходим к границе раздела двух сплошных сред, и при данных их механических свойствах взрыв будет развиваться как камуфлетный. При $\Delta = H_5$ (H_5 – высота секции) [2] получается взрывание на свободную поверхность. Здесь же и происходит изменение соотношения между областями разрушения. Так, при $\Delta \leq 10$ см (рис. 3) область 2 отсутствует. Отсюда можно предположить существование оптимального по качеству дробления первого слоя размера зерна среды. Несомненно, что

этот вопрос требует специального исследования, однако ясно, что степень дробления первого слоя зависит от крупности зерна.

Смещение контакта массива со средой

На рис. 4а показан один из вееров модели *Б* с нанесенными линиями уровней концентрации ВВ, вдоль которых $q = \text{const}$ (q – концентрация ВВ в массиве, кг/м^3), а на рис. 4б – соответствующий контур контакта взорванного массива со средой.

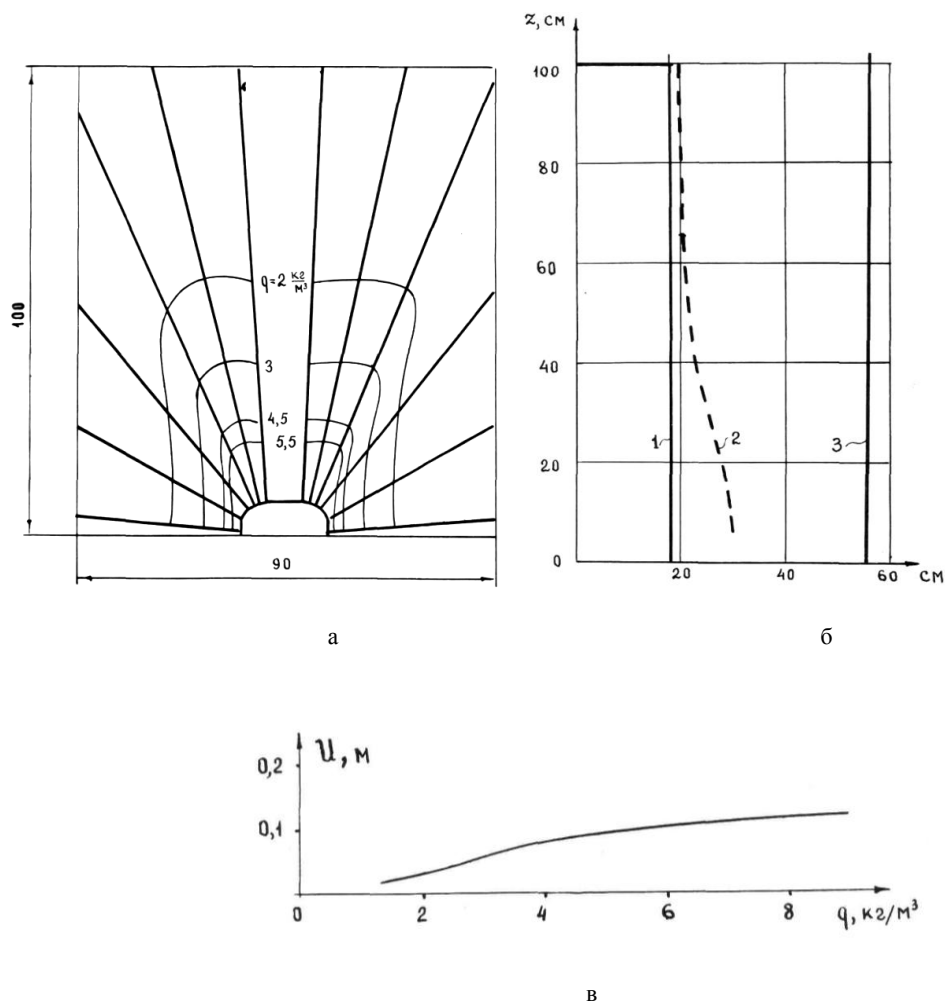


Рис. 4. Веер модели *Б* с линиями уровней $q(a)$ и смещение контакта массива со средой (б):

1 – положение контакта до взрыва; 2 – то же после взрыва; 3 – жесткая стенка, ограничивающая слой среды; 4 – зависимость смещения контакта от концентрации ВВ в массиве

В интервале z от 20 до 100 см величина смещения контакта примерно линейно зависит от z . При $z < 20$ см линейность нарушается и в вертикальной плоскости, нормальной к плоскости веера, контакт становится выпуклым в сторону среды. При этом средняя деформация слоя среды в сечении $z \approx 6$ см достигла значения 0,35.

На поверхностях горизонтальных сечений отмечался прогиб контакта в сторону среды.

По рис. 4 легко построить зависимость смещений контакта от концентрации ВВ в массиве: $u = u(q)$, если

учесть, что концентрация ВВ при веерном расположении зарядов

$$q = ml_z/zaw, \quad 0 < z \leq l_s,$$

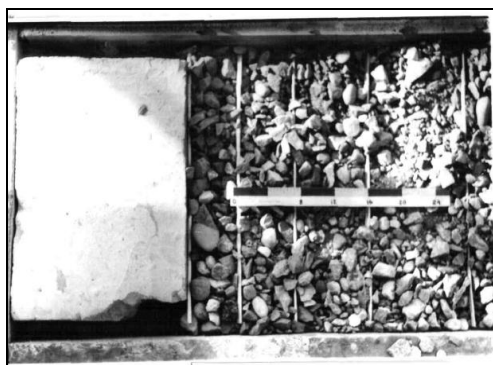
где m – масса ВВ в единице длины скважины; l_s – длина скважины.

В моделях *В* вначале производили одностороннее инициирование заряда. Результат взрыва показан на рис. 5.

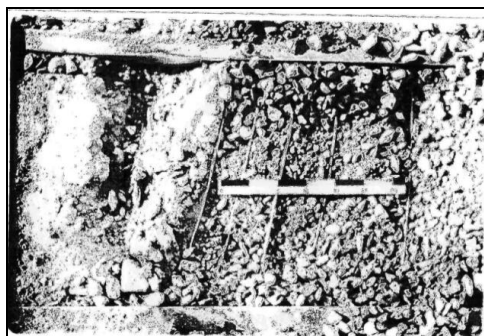
Значительную роль в процессе формирования контакта сыграла коническая форма фронта волны на-

пряжений в массиве, образующая которого наклонена к оси заряда под углом $\arctg(\theta/D)$, где θ – скорость продольных волн в массиве; D – скорость детонации заряда.

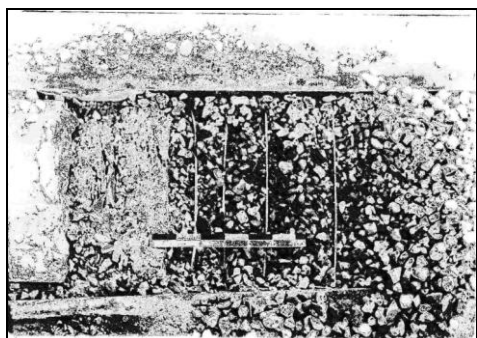
Однако решающее значение в образовании наклонного контакта принадлежит нижней ограждающей стенке бокса: она создавала переменную толщину слоя среды. Взрывы с двусторонним инициированием (образовывалась петля ДШ) привели к параллельному относительно оси заряда перемещению контакта. Последующие взрывы показали высокую степень устойчивости этих результатов.



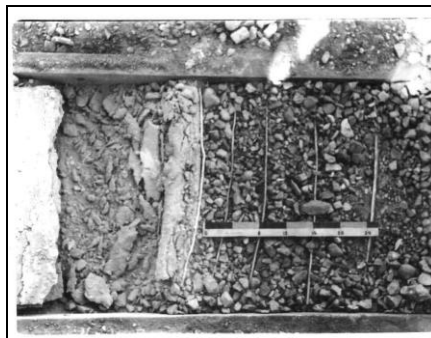
а



б



в



г

Рис. 5. Модель В при одностороннем (сверху-вниз) инициировании заряда: а – до взрыва; б – после взрыва; в – результат взрыва модели В при двустороннем (встречном) инициировании заряда; г – результат взрыва модели В с дополнительным отрезком ДШ

Верхняя точка контакта на рис. 5б сместилась на 8,4 см, что на 16 % меньше смещения всего контакта, равного 10 см. Увеличение смещения при двустороннем инициировании можно отнести на счет повышения давления ПВ при встрече детонационных волн.

Прямолинейность датчиков до и после взрыва свидетельствует о прохождении по среде плоской волны напряжений и, следовательно, об одноосном деформированном состоянии среды.

На рис. 5г показан результат взрыва модели с дополнительным отрезком ДШ длиной 12 см, который помещался в среднюю треть скважины. Иницирование заряда было двусторонним. Как видно, контакт приобрел заметную кривизну. На датчике, примыкающем к контакту, видны две ступеньки, положение которых соответствует концам дополнительного отрезка ДШ. Смещения контакта составили: минимальное – 12, максимальное – 13,3 см. Таким образом, двукратное увеличение концентрации заряда привело к увеличению смещения на 11 %. Задача оптимизации параметров такого выпуклого контакта рассматривалась в [2].

Характер разрушения массива моделей В таков, что он вблизи контакта почти не разуплотняется и действует на среду как поршень. Оценим это воздействие. Давление ПВ зависит от объема θ_1 единицы длины зарядной полости как

$$P = \rho_{BB} D^2 \left(\frac{Q}{Q_1} \right)^\gamma / 8.$$

Начальный объем полости довольно мал. Это сердцевина ДШ с $Q = 7,1 \times 10^{-6} \text{ м}^3$. Плотность заряда примем равной $\rho_{BB} = 1000 \text{ кг/м}^3$, скорость детонации $D = 6000 \text{ м/с}$. Если слой массива переместился на 0,02 м, то полость превратилась в щель сечением $0,05 \times 0,02 \text{ м}^2$ (0,05 м – расстояние между стенками бокса), и при показателе адиабаты, примерно равном $\gamma = 2$, давление продуктов детонации в ней

$$P = 1000 \cdot 6 \cdot 10^3 \cdot 7,1 \cdot 10^{-6} / 10^3 \cdot 2 / 8 = 2,315 \text{ бар},$$

но так как общее перемещение массива достигает 0,10–0,14 м, то, очевидно, дальнейшее движение слоя осуществляется путем передачи среде импульса, приобретенного слоем в процессе его кратковременного разгона расширяющимися продуктами детонации.

Эти моменты обсуждались ранее и нашли свое обоснование в [3].

Литература

1. Моделирование разрушающего действия взрыва в горных породах / под ред. Н.В. Мельникова. М., 1972. 215 с.
2. Камалян Р.З., Королев К.Д. О математическом моделировании и оптимизации геометрических параметров выпуска руды // ФТПРПИ. 1990. № 3. С. 102–107.

3. Камалян Р.З., Камалян С.Р. О взрыве плоского заряда в двухслойной среде (тезис) // Обозрение прикл. и промышл. математики. 2001. Т. 8, № 1. С. 203.

References

1. *Modelirovanie razrushayushchego deistviya vzryva v gornykh porodakh* [Simulation of the destructive action of the explosion in the rocks]. Ed. N.V. Melnikov. Moscow, 1972, 215 p.
2. Kamalyan R.Z., Korolev K.D. O matematicheskom modelirovanii i optimizatsii geometricheskikh parametrov vypuska rudy [Mathematical modeling and optimization of geometrical parameters of ore output]. *FTPRPI*, 1990, no 3, pp. 102-107.
3. Kamalyan R.Z., Kamalyan S.R. O vzryve ploskogo zaryada v dvukhsloinoi srede (tezis) [On the flat explosion of a charge in a two-layer medium (thesis)]. *Obozrenie prikladnoi i promyshlennoi matematiki*, 2001, vol. 8, no 1, p. 203.

Поступила в редакцию

22 декабря 2014 г.

УДК 519.634

ДИНАМИКА ВНУТРЕННЕЙ СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЫ ЖИДКОСТИ НА МАЛЫХ ВРЕМЕНАХ ПРИ ВЕРТИКАЛЬНОМ УДАРЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА, ПОЛНОСТЬЮ ПОГРУЖЕННОГО В ЖИДКОСТЬ*

© 2015 г. М.В. Норкин

Норкин Михаил Викторович – доктор физико-математических наук, доцент, профессор, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, ул. Милчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: norkin@math.sfedu.ru

Norkin Mikhail Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Professor, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: norkin@math.sfedu.ru

Рассматривается совместное движение идеальной несжимаемой жидкости и полностью погруженного в нее кругового цилиндра на малых временах после удара. Определяется форма внутренней и внешней свободных границ жидкости. Проводится асимптотический анализ внутренней свободной границы вблизи точек отрыва.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, удар с отрывом, малые времена, асимптотический анализ, динамика точек отрыва, каверна, число Фруда, число кавитации.

The joint movement of ideal incompressible liquid and the circular cylinder which is completely shipped in it after impact on small times is considered. The form of internal and external free border of liquid is defined. The asymptotic analysis of internal free border near separation points is carried out.

Keywords: ideal incompressible liquid, impact with a separation, small times, asymptotic analysis, dynamics of points of a separation, a cavity, Frud number, cavitation number.

В последние годы большую актуальность приобрели задачи, в которых необходимо учитывать явление отрыва частиц жидкости от поверхности плавающего тела. Анализ опубликованных результатов показывает, что в настоящее время достаточно хорошо изучены задачи об ударе с отрывом в постановке Л.И. Седова, где рассматривается момент, непосредственно следующий после удара [1]. Проведенные в этой области исследования позволяют сделать вывод о том, что отрыв жидкости от тела при ударе происходит в подавляющем большинстве случаев. Если тело полностью погружено в жидкость, то отрыв ожидается практически всегда. Подробные обзоры работ по удару с отрывом приводятся в [2–5].

В гораздо меньшей степени изучены нелинейные нестационарные задачи о движении твердых тел в жидкости на малых временах с учетом отрыва частиц жидкости от их поверхностей. В результате отрыва вблизи поверхности тела образуется каверна и появляется новая внутренняя свободная граница. В естественных условиях в каверне образуются пары жидкости или газа с давлениями, близкими к нулю. Давление в каверне можно создавать и искусственным путем, считая, например, что сразу после начала движения в каверну (со стороны тела) поступает газ постоянного давления. Основные трудности, возникающие

при решении таких задач, связаны с тем, что формы внутренней и внешней свободных границ жидкости заранее неизвестны и подлежат определению в ходе решения задачи. Отметим, что вместе с телом в движение приходят и точки отрыва (точки пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью тела). Пренебречь перемещениями точек отрыва на малых временах можно не всегда. Как показано в работах [6, 7], при небольших числах Фруда начальная скорость движения точек отрыва может быть достаточно большой. Таким образом, в ходе решения задачи необходимо определить формы внутренней и внешней свободных границ жидкости и динамику точек отрыва на малых временах. Кроме этого, нужно контролировать давление на смоченной поверхности тела (в зоне контакта), которое не должно опускаться ниже давления насыщенных паров жидкости или газа [1].

Исследования по динамике отрыва на малых временах были начаты в статье [6], где на примере горизонтального удара полупогруженного в жидкость кругового цилиндра была изучена динамика оторвавшейся от поверхности цилиндра внутренней свободной границы жидкости. В [7] этот результат был обобщен на случай горизонтального удара цилиндра, полностью погруженного в жидкость. Задачи о начальном

*Работа выполнена в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (задание №1.1398.2014/к).

отрывном движении кругового и эллиптического цилиндров в идеальной несжимаемой жидкости с постоянным ускорением рассматривались в [8, 9].

Нелинейные нестационарные задачи о генерации волн погруженным в жидкость телом без учета отрыва частиц жидкости от его поверхности рассматривались во многих работах. Подробные обзоры приведены в статье [10].

Постановка задачи

Рассмотрим круговой цилиндр, полностью погруженный в идеальную несжимаемую и неограниченную жидкость. До начала процесса тело и жидкость находились в покое. Пусть в некоторый начальный момент времени происходит удар плавающего тела, в результате которого цилиндр мгновенно приобретает вертикальную скорость ϑ_0 . Удар цилиндра, полностью погруженного в жидкость, сопровождается отрывом частиц жидкости от его поверхности. При этом зона отрыва частиц жидкости заранее неизвестна и находится на основании модели удара Л.И. Седова [1]. После удара цилиндр движется поступательно в вертикальном направлении с постоянной скоростью ϑ_0 . Позади цилиндра образуется каверна, форма которой зависит от числа Фруда, числа кавитации и глубины погружения цилиндра (рисунок).

Согласно классической теории удара, движение идеальной жидкости будет потенциальным в момент, непосредственно следующий после удара (в начальный момент времени), а в силу теоремы Лагранжа оно будет потенциальным и во все последующие моменты времени [11]. Математическая постановка задачи, записанная в безразмерных переменных в подвижной системе координат, жестко связанной с цилиндром, имеет вид

$$\Delta\Phi = 0, \quad R \in \Omega(t), \quad (1)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n} = \gamma m_y, \quad R \in S_{11}(t), \quad (2)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\nabla\Phi \right)^2 + Fr^{-2} \left(\nabla\Phi \right)^2 + \gamma t - H = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} - \gamma \sin\theta = \frac{\partial r_f}{\partial\theta} G + \frac{\partial r_f}{\partial t}, \quad R \in S_{12}(t), \quad (4)$$

$$G = \frac{1}{(1+r_f(\theta,t))^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta} - \frac{\gamma \cos\theta}{1+r_f(\theta,t)},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} - \gamma \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\nabla\Phi \right)^2 + Fr^{-2} \left(\nabla\Phi \right)^2 + \gamma t - H = 0, \quad (5)$$

$$R \in S_2(t),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad R \in S_2(t),$$

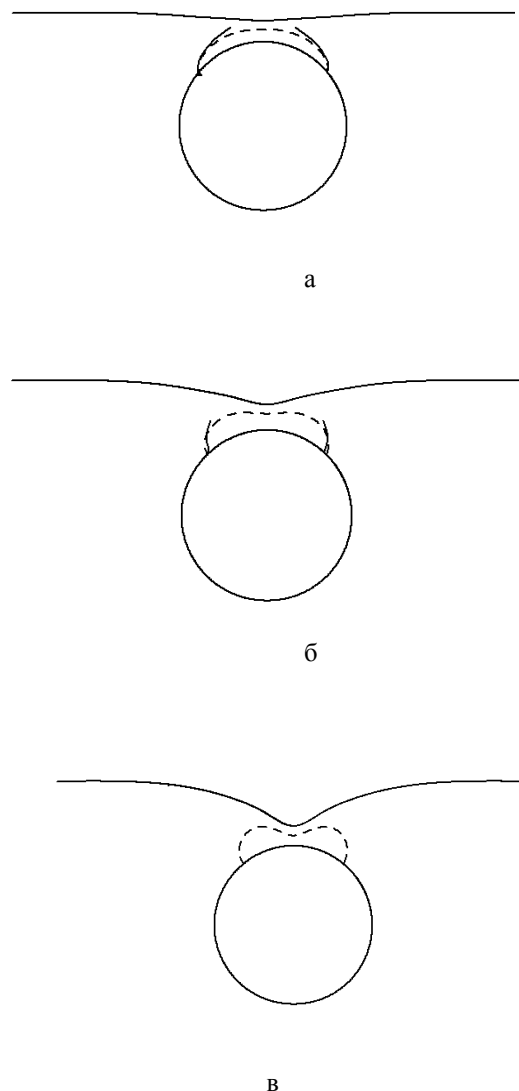
$$\Phi \rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty, \quad (6)$$

$$\Phi(x, y, 0) = \Phi_0(x, y), \quad \xi(x, 0) = 0, \quad r_f(\theta, 0) = 0.$$

Переход к безразмерным переменным осуществляется по формулам:

$$t' = \frac{a}{|\vartheta_0|} t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = a |\vartheta_0| \Phi, \quad p' = \rho \vartheta_0^2 p,$$

где штрихами помечаются размерные величины.



Вертикальный удар цилиндра: а – $t = 0,2$; б – $t = 0,4$;
в – $t = 0,6$

Подвижные координаты x, y связаны с неподвижными X, Y соотношениями $X = x, Y = y + \gamma t$.

Здесь и далее используются следующие обозначения: $\Phi(x, y, t)$ – потенциал скоростей абсолютного движения жидкости, записанный в подвижной системе координат; $\Omega(t)$ – область, занятая жидкостью; $S_{11}(t)$ – часть поверхности цилиндра, на которой не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ – отошедшая от поверхности цилиндра внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ – свободная граница жидкости, которая первоначально

была горизонтальной; $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости; p – давление; a – радиус цилиндра; H – глубина его погружения в начальный момент времени; $\mathbf{R}$ – радиус-вектор с координатами (x, y) ; параметр γ характеризует направление движения цилиндра (при $\gamma = 1$ цилиндр движется вверх, а при $\gamma = -1$ – вниз).

Задача (1) – (6) содержит безразмерные параметры

$$Fr = \frac{|\vartheta_0|}{\sqrt{ga}}, \quad \chi = 2 \frac{p_a - p_c}{\rho \vartheta_0^2},$$

где Fr – число Фруда; χ – число кавитации (безразмерная разность давлений на внешней свободной поверхности жидкости и в каверне); p_a – атмосферное давление; p_c – давление в каверне; g – ускорение свободного падения.

На внутренней и внешней свободных границах ставятся динамические и кинематические условия (3)–(5). Кинематическое условие на $S_{12}(t)$ удобно записывать в полярных координатах r, θ ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$). Уравнения внутренней и внешней свободных границ относительно подвижной системы координат имеют вид

$$r = 1 + r_f(\theta, t), \quad y = H - \gamma t + \xi(x, t).$$

Течение жидкости в начальный момент времени, создаваемое ударом кругового цилиндра, имеет потенциал $\Phi_0(x, y)$, определяемый решением следующей смешанной краевой задачи теории потенциала с неизвестными априори областями контакта [1–6]:

$$\begin{aligned} \Delta \Phi_0 &= 0, \quad R \in \Omega(0), \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} &= \gamma n_y, \quad \Phi_0 \leq 0, \quad R \in S_{11}(0), \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial n} &\geq \gamma n_y, \quad \Phi_0 = 0, \quad R \in S_{12}(0), \\ \Phi_0 &= 0, \quad R \in S_2(0), \\ \Phi &\rightarrow 0, \quad R \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (7)$$

Для полной постановки задачи необходимо также сформулировать дополнительное условие в точках пересечения внутренней свободной границы с поверхностью тела (в точках отрыва). Будем требовать, чтобы в этих точках скорость жидкости была конечной (условие Кутта – Жуковского).

После нахождения функции Φ давление в жидкости определяется на основании интеграла Коши – Лагранжа:

$$p = p_0 - \left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} - \gamma \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\nabla \Phi \right)^2 + Fr^{-2} \left(\nabla \Phi + \gamma t - H \right) \right],$$

где p_0 – безразмерное атмосферное давление.

Отметим, что давление в жидкости не может опуститься ниже некоторой положительной величины p_d . Возможным нижним пределом p_d является давление насыщенных паров жидкости, зависящее от ее температуры [1].

Асимптотика точек отрыва на малых временах

После удара точки отрыва внутренней свободной границы движутся вдоль твердой поверхности цилиндра. Чтобы изучить их динамику на малых временах, сделаем замену переменных, при которой точки отрыва, зависящие от времени, переходят в фиксированные точки отрыва, соответствующие начальному моменту времени. С этой целью запишем задачу (1)–(6) в полярных координатах и сделаем замену переменной по угловой координаты θ

$$\alpha = \frac{\pi - 2\theta_{s1}}{\pi - 2\theta_{s1}(t)} [\theta - \theta_{s1}(t)] \theta_{s1}, \quad (8)$$

где углы $\theta_{s1}(t), \theta_{s2}(t) = \pi - \theta_{s1}(t)$ определяют положение точек отрыва в момент времени t ; углы $\theta_{s1}, \theta_{s2} = \pi - \theta_{s1}$ – в начальный момент времени. В дальнейшем будем интересоваться опускающимся цилиндром ($\gamma = -1$), расположенным до начала процесса в непосредственной близости к свободной поверхности жидкости ($0 < \theta_{s1}(t) < 0,5\pi$). Введем новые обозначения:

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha, r, t) &= \Phi(r \cos \theta(\alpha, t), r \sin \theta(\alpha, t), t), \\ \eta(\alpha, t) &= r_f(\theta(\alpha, t), t). \end{aligned}$$

В результате замены (8) уравнение Лапласа (1) и граничные условия (2)–(4) примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \alpha^2} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-2} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial r} &= \gamma \sin \theta(\alpha, t), \quad R \in S_{11}(t), \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \theta}{\partial t} - \gamma \left[\frac{\partial \varphi}{\partial r} \sin \theta(\alpha, t) + \frac{\psi}{r} \cos \theta(\alpha, t) \right] &+ \\ + \frac{1}{2} \left[\frac{\psi^2}{r^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 \right] &+ \\ + Fr^{-2} (r \sin \theta(\alpha, t) + \gamma t - H) - 0,5\chi &= 0, \quad R \in S_{12}(t), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \gamma \sin \theta(\alpha, t) &= \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1} G_1 + \frac{\partial \eta}{\partial t} - \\ - \frac{\partial \eta}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1} \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad R &\in S_{12}(t), \end{aligned}$$

$$G_1 = \frac{\psi}{(1 + \eta(\alpha, t))^2} - \frac{\gamma \cos \theta(\alpha, t)}{1 + \eta(\alpha, t)},$$

$$\psi = \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \left(\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} \right)^{-1}.$$

Динамическое условие на $S_2(t)$ преобразуется аналогично условию на $S_{12}(t)$ и определяется по формуле (8) с постоянной $\chi = 0$. Кинематическое условие на $S_2(t)$ сохраняет свой вид, но теперь производные потенциала Φ находятся по формулам

$$\eta_0(\alpha) = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r}(\alpha, 1) - \gamma \sin \alpha,$$

$$2\eta_1(\alpha) = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2}(\alpha, 1)\eta_0(\alpha) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial r}(\alpha, 1) - \gamma q(\alpha) \cos \alpha + (q(\alpha) + \gamma \cos \alpha)\eta'_0(\alpha).$$

Проведем анализ функции $\eta(\alpha, t)$ вблизи первой точки отрыва. Рассмотрим случай опускающегося цилиндра ($\gamma = -1$). Первое слагаемое $t\eta_0(t)$ в этом разложении ведет себя как $t\sqrt{\alpha - \theta_{s1}}$, второе – как $t^2(\alpha - \theta_{s1})^{-1/2}$. Таким образом, вблизи рассматриваемой точки разложение (11) неприменимо. В этом случае нужно построить внутреннее решение, справедливое в окрестности данной точки, и согласовать его с внешним разложением (11). Анализ первых двух членов разложения (11) в окрестности первой точки отрыва показывает, что оба эти выражения будут иметь одинаковый порядок по t , если $\alpha - \theta_{s1} = O(t)$ при $t \rightarrow 0$. Следовательно, внутренняя переменная τ во внутреннем решении должна представляться в виде

$$\tau = \frac{\alpha - \theta_{s1}}{t}. \quad (16)$$

Внешнее решение после перехода к внутренней переменной примет вид

$$\eta(\alpha, t) = \beta(\theta_{s1})t^{3/2} \left[\sqrt{\tau} + \frac{\beta}{4\sqrt{\tau}} \right] + o(t^{3/2}), \quad t \rightarrow 0, \quad (17)$$

где постоянная $\beta(\theta_{s1})$ есть коэффициент в разложении функции $\eta_0(\alpha)$ в окрестности рассматриваемой точки: $\eta_0(\alpha) \sim \beta(\theta_{s1})\sqrt{\alpha - \theta_{s1}}$, а величина β определяется равенством $\beta = \tilde{\eta}_1 + \gamma \cos \theta_{s1}$.

В соответствии с (17) внутреннее представление свободной границы будем искать в виде

$$\eta(\alpha, t) = \beta(\theta_{s1})t^{3/2}F(\tau) + o(t^{3/2}), \quad (18)$$

где $F(\tau)$ – новая неизвестная функция.

Далее в преобразованном кинематическом уравнении внутренней свободной границы сделаем замену переменной (16) и используем разложения (11), (18). Ограничиваясь только главными по t членами (порядка $t^{1/2}$), получим для определения функции $F(\tau)$ обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$(\tau - \beta_1)F'(\tau) - 1,5F(\tau) = -\sqrt{\tau}, \quad 0 < \tau < \infty, \quad (19)$$

где $\beta_1 = -\beta$.

Функция $F(\tau)$ удовлетворяет нулевому начальному условию и условию срачивания с внешним решением на бесконечности, которое следует из (17), (18):

$$F(0) = 0, \quad F(\tau) = \sqrt{\tau} - \frac{\beta_1}{4\sqrt{\tau}}, \quad \tau \rightarrow \infty. \quad (20)$$

Далее исследуется случай $\beta_1 > 0$. Для таких β_1 решение задачи (19), (20) имеет вид

$$F(\tau) = \frac{2}{3\beta_1}\tau^{3/2}, \quad 0 \leq \tau \leq \beta_1,$$

$$F(\tau) = \frac{2}{3\beta_1} \left[\frac{3}{2} - (\tau - \beta_1)^{3/2} \right], \quad \beta_1 \leq \tau < \infty.$$

Численная реализация и анализ результатов

Для решения поставленной задачи применяется численно-аналитический метод, в основе которого лежат асимптотики на малых временах. Для решения задачи об ударе с отрывом (7) используется специальный итерационный процесс, основанный на сведении данной нелинейной задачи к последовательному решению линейных краевых задач (с фиксированным разбиением границы тела на области задания краевых условий типа Дирихле – Неймана). Последние решаются численно методом конечных элементов с использованием пакета FreeFem++ [12]. Ранее такой подход применялся для решения задач об отрывном ударе и разгоне плавающих тел в жидкости [6–9].

Подробно остановимся на случае опускающегося цилиндра ($\gamma = -1$), расположенного достаточно близко к внешней свободной поверхности жидкости. Исследования проводились при фиксированных значениях параметров задачи $Fr = 5$; $\chi = 0,5$; $h = 1,1$. При этом рассматривались случаи, соответствующие различным моментам времени. На рисунке показаны положение цилиндра и форма внешней свободной поверхности в моменты времени $t = 0,2; 0,4; 0,6$. Хорошо видно, что на внутренней свободной границе образуется впадина, которая увеличивается с ростом t . Приближенное значение угловой координаты $\theta_{s1} = 0,567$. Угловая скорость движения точки отрыва в начальный момент времени $c_1 = 0,63$. Численные значения параметров β и β_1 – 0,21 и 1,46.

Пусть, например, радиус цилиндра $a = \frac{1}{3}$ м. Тогда

данные значения чисел Фруда и кавитации соответствуют физической ситуации, когда безразмерное атмосферное давление и безразмерное давление в каверне равны 1,2 и 0,95. В этом случае давление (в главном приближении по времени) будет положительным на всей смоченной поверхности цилиндра. Отметим, что при дальнейшем увеличении числа Фруда в маленькой окрестности точки $x = 1, y = 0$ наблюдается падение давления до отрицательных значений, хотя и весьма незначительное.

По аналогии может быть решена задача удара для поднимающегося цилиндра, полностью погруженного в жидкость ($\gamma = 1$). Предложенный метод также обобщается на случай отрывного удара кругового цилиндра, погруженного в жидкость более чем наполовину.

Литература

1. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М., 1966. 448 с.
2. Норкин М.В. Методы решения нелинейных задач гидродинамического удара в ограниченных областях // Изв. РАН. МЖГ. 2005. № 4. С. 138–150.
3. Норкин М.В. Отрывной удар эллиптического цилиндра, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости конечной глубины // Изв. РАН. МЖГ. 2008. № 1. С. 120–132.
4. Норкин М.В. Отрывной удар круглого диска, плавающего на поверхности идеальной несжимаемой жидкости бесконечной глубины // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 4. С. 76–86.
5. Норкин М.В. Смешанные задачи гидродинамического удара. Ростов н/Д, 2007. 135 с.
6. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // J. Eng. Math. 2011. Vol. 70. P. 239–254.
7. Норкин М.В. Движение кругового цилиндра в жидкости после удара на малых временах с образованием каверны // Изв. РАН. МЖГ. 2012. № 3. С. 101–112.
8. Норкин М.В. Образование каверны на начальном этапе движения кругового цилиндра в жидкости с постоянным ускорением // ПМТФ. 2012. Т. 53, № 4. С. 74–82.
9. Норкин М.В., Яковенко А.А. Начальный этап движения эллиптического цилиндра в идеальной несжимаемой жидкости со свободными границами // Журн. вычисл. математики. и мат. физики. 2012. Т. 52, № 11. С. 2060–2070.
10. Горлов С.И. Численные методы решения нелинейных нестационарных задач о генерации волн погруженным в жидкость телом // Вычисл. технологии. 1998. Т. 3, № 6. С. 9–20.
11. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М., 1963. 583 с.
12. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д, 2008. 256 с.
13. Methods for solving nonlinear problems of hydrodynamic impact in limited areas]. *Izv. RAN. MZhG*, 2005, no 4, pp. 138–150.
14. Norkin M.V. Otryvnoi udar ellipticheskogo tsilindra, plavayushchego na poverkhnosti ideal'noi neszkhimaemoi zhidkosti konechnoi glubiny [Tear kick of the elliptic cylinder floating on the surface of an ideal incompressible fluid of finite depth]. *Izv. RAN. MZhG*, 2008, no 1, pp. 120–132.
15. Norkin M.V. Otryvnoi udar kruglogo diska, plavayushchego na poverkhnosti ideal'noi neszkhimaemoi zhidkosti beskonечноi glubiny [Tear kick of the round disc floating on the surface of an ideal incompressible fluid of infinite depth]. *PMTF*, 2009, vol. 50, no 4, pp. 76–86.
16. Norkin M.V. *Smeshannyye zadachi gidrodinamicheskogo udara* [Mixed problems of the hydrodynamic shock]. Rostov-on-Don, 2007, 135 p.
17. Norkin M., Korobkin A. The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder. *Journal of Engineering Mathematics*, 2011, vol. 70, pp. 239–254.
18. Norkin M.V. Dvizhenie krugovogo tsilindra v zhidkosti posle udara na mal'kikh vremenakh s obrazovaniem kaverny [The movement of a circular cylinder in a liquid after impact at short times to form a cavity]. *Izv. RAN. MZhG*, 2012, no 3, pp. 101–112.
19. Norkin M.V. Obrazovanie kaverny na nachal'nom etape dvizheniya krugovogo tsilindra v zhidkosti s postoyannym uskoreniem [Education cavity at the initial stage of motion of a circular cylinder in a fluid with constant acceleration]. *PMTF*, 2012, vol. 53, no 4, pp. 74–82.
20. Norkin M.V., Yakovenko A.A. Nachal'nyi etap dvizheniya ellipticheskogo tsilindra v ideal'noi neszkhimaemoi zhidkosti so svobodnymi granitsami [The initial stage of the motion of an elliptical cylinder in an ideal incompressible fluid with free boundaries]. *Zhurn. vychisl. matematiki i mat. fiziki*, 2012, vol. 52, no 11, pp. 2060–2070.
21. Gorlov S.I. Chislennyye metody resheniya nelineynykh nestatsionarnyykh zadach o generatsii voln pogruzhennym v zhidkost' telom [Numerical methods for solving non-linear non-stationary problems of wave generation by a body immersed in fluid]. *Vychisl. tekhnologii*, 1998, vol. 3, no 6, pp. 9–20.
22. Kochin N.E., Kibel' I.A., Roze N.V. *Teoreticheskaya gidromekhanika* [Theoretical fluid mechanics]. Ch. 1, Moscow, 1963, 583 p.
23. Zhukov M.Yu., Shiryaeva E.V. *Ispol'zovanie paketa konechnyykh elementov FreeFem++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Using the finite element package FreeFem ++ for hydrodynamics problems, electrophoresis, and biology]. Rostov-on-Don, 2008, 256 p.

References

1. Sedov L.I. *Ploskie zadachi gidrodinamiki i aerodinamiki* [Plane problems of hydrodynamics and aerodynamics]. Moscow, 1966, 448 p.
2. Norkin M.V. *Metody resheniya nelineynykh zadach gidrodinamicheskogo udara v ogranichennykh oblastyakh* [Me-

УДК 519.217

ТЕОРЕМЫ О ДЕФОРМИРОВАННЫХ МАРТИНГАЛАХ: РАЗЛОЖЕНИЕ РИССА, ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЛОКАЛЬНЫХ МАРТИНГАЛОВ, ВЫЧИСЛЕНИЕ КВАДРАТИЧНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК*

© 2015 г. И.В. Павлов, О.В. Назарько

Павлов Игорь Викторович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, Ростовский государственный строительный университет, ул. Социалистическая, 162, г. Ростов-на-Дону, 344022, e-mail: pavloviv2005@mail.ru

Pavlov Igor Viktorovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Rostov State University of Civil Engineering, Sotsialisticheskaya St., 162, Rostov-on-Don, 344022, Russia, e-mail: pavloviv2005@mail.ru

Назарько Ольга Валерьевна – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Ростовский государственный строительный университет, ул. Социалистическая, 162, г. Ростов-на-Дону, 344022, e-mail: olganazarko28@gmail.com

Nazarko Olga Valeryevna – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Rostov State University of Civil Engineering, Sotsialisticheskaya St., 162, Rostov-on-Don, 344022, Russia, e-mail: olganazarko28@gmail.com

В случае дискретного времени доказывается представление деформированного супермартингала 2-го рода в виде суммы двух деформированных процессов 2-го рода: мартингала и потенциала (разложение Рисса). Дается критерий единственности такого представления. Устанавливается совпадение локального деформированного мартингала 1-го рода с обобщенным деформированным мартингалом 1-го рода и с деформированным мартингаловым преобразованием 1-го рода. Приводится формула для квадратичной характеристики деформированного мартингала 1-го рода.

Ключевые слова: фильтрованное пространство, деформированный стохастический базис 2-го рода, слабодеформированный стохастический базис, деформированные мартингалы, супермартингалы и потенциалы, разложение Рисса, квадратичная характеристика.

In this work in discrete time the decomposition of deformed supermartingale of the 2nd kind as a sum of two deformed processes of the 2nd kind (namely, of a martingale and a potential) is proved (Riesz decomposition). Criterion of the uniqueness of such decomposition is established. The coincidence of local deformed martingale of the 1st kind with generalized deformed martingale of the 1st kind and deformed martingale transformation of the 1st kind is shown. The formula for quadratic variation of deformed martingale of the 1st kind is given.

Keywords: filtered space, deformed stochastic basis of 2nd kind, weakly deformed stochastic basis of 2nd kind, deformed martingales, supermartingales and potentials, Riesz decomposition, quadratic variation.

В работе продолжено изучение деформированных мартингалов 1-го и 2-го рода с дискретным временем. Кроме того, в первой части работы впервые предложена концепция деформированного стохастического базиса 2-го рода с непрерывным временем. Соответствующее определение согласуется с соответствующим определением для дискретного времени (теорема 1).

Основные определения деформированных базисов с дискретным временем и их свойства подробно представлены в [1]. В [2–4] развивается стохастический анализ на этих структурах. В частности, доказаны следующие теоремы: о разложении Дуба для деформированных субмартингалов 1-го рода, о разложении Крикеберга для деформированных мартингалов 2-го рода, о преобразовании свободного выбора для деформированных субмартингалов 1-го и 2-го рода. Эти факты систематически применяются при изучении

финансовых (B,S)-рынков на деформированных структурах, а также для дальнейшего развития теории деформированных процессов. Например, если

$(M_n, F_n, Q)_{n \geq 0}$ – квадратично интегрируемый деформированный мартингал 1-го рода на ограниченном деформированном стохастическом базисе, то из теоремы о разложении Дуба вытекает формула для подсчета квадратичной характеристики этого мартингала

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n E^{Q^{(k)}} \left[\left(\Delta Z_k \right)^2 | F_{k-1} \right].$$

Теорема о преобразовании свободного выбора используется, к примеру, в третьей части данной работы при доказательстве теоремы 3 о характеристизации деформированных локальных мартингалов и т.д.

*Данная работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 13-01-00637а и 13-07013159).

Вторая часть статьи посвящена доказательству теоремы о разложении Рисса для деформированных супермартингалов 2-го рода (теорема 2). В классическом случае эта теорема также является мощным оружием стохастического анализа.

Определение и некоторые свойства деформированных стохастических базисов 2-го рода

Пусть $\mathbb{Q}, \mathbb{E}_t^{\infty}$ – фильтрованное пространство с непрерывным (или дискретным) временем. Через $\mathcal{F}_{-1}$ мы будем обозначать тривиальную σ -алгебру $\mathbb{Q}, \emptyset$, а через $\mathcal{F}_{\infty}$ – наименьшую σ -алгебру, содержащую все $\mathcal{F}_t$. Если $(\mathbb{Q}, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство, а G – σ -подалгебра σ -алгебры $\mathcal{F}$, то будем использовать обозначение: $E_G^P f = E^P \mathbb{I}_G$.

Рассмотрим семейство $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}_s^t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq s < t < \infty}$ вероятностных мер $\mathbb{Q}_s^t$ на $\mathcal{F}_t$, а также порождаемое им семейство $(\mathbb{E}_s^t)_{0 \leq s < t < \infty}$ операторов условного математического ожидания: $E_s^t f := E_{\mathcal{F}_s}^{\mathbb{Q}_s^t} f$, где f – неотрицательная $\mathcal{F}_t$ -измеримая с.в.

Определение 1. Тройку $\mathbb{Q}, \mathbb{E}_t^{\infty}, \mathbb{Q}$ будем называть деформированным стохастическим базисом 2-го рода (DSB2), если удовлетворяются условия:

- 1) $\forall 0 \leq s < r < t < \infty$ справедливо равенство $\mathbb{Q}_s^r = \mathbb{Q}_s^t|_{\mathcal{F}_r}$;
- 2) $\forall 0 \leq s < r < t < \infty$ выполняется соотношение $\mathbb{Q}_s^r \ll \mathbb{Q}_r^t|_{\mathcal{F}_r}$;
- 3) $\forall 0 \leq s < r < t < \infty$ и для любой неотрицательной $\mathcal{F}_t$ -измеримой с.в. f $\mathbb{Q}_s^t$ -п.н. выполняется равенство: $E_s^t f = E_s^r E_r^t f$.

Если 1) и 3) выполняются, а вместо 2) выполняется условие 2*) $\forall 0 \leq s < r < t < \infty$ $\mathbb{Q}_s^r \sim \mathbb{Q}_r^t|_{\mathcal{F}_r}$, то тройку $\mathbb{Q}, \mathbb{E}_t^{\infty}, \mathbb{Q}$ будем называть слабодеформированным стохастическим базисом (WDSB).

Следствие 1. Из свойства 1) определения 1 сразу вытекает соотношение $\mathbb{Q}_s^r|_{\mathcal{F}_s} = \mathbb{Q}_s^t|_{\mathcal{F}_s}$ ($\forall 0 \leq s < r < t < \infty$).

Следствие 2. Из свойства 2) определения 1 очевидным образом следует, что $\forall 0 \leq s < r \leq t < u < \infty$ выполняется соотношение $\mathbb{Q}_s^r \ll \mathbb{Q}_t^u|_{\mathcal{F}_r}$.

Следствие 3. Справедливо соотношение $\mathbb{Q}_s^t|_{\mathcal{F}_s} \ll \mathbb{Q}_r^t|_{\mathcal{F}_s}$ ($\forall 0 \leq s < r < t < \infty$).

Действительно, применяя следствие 1 и свойство 2) определения 1, получаем $\mathbb{Q}_s^t|_{\mathcal{F}_s} = \mathbb{Q}_s^r|_{\mathcal{F}_s} \ll \mathbb{Q}_r^t|_{\mathcal{F}_s}$.

Следствие 4. Из свойства 3) определения 1 вытекает, что $\forall 0 \leq s = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t < \infty$ и для любой неотрицательной $\mathcal{F}_t$ -измеримой с.в. f $\mathbb{Q}_s^t$ -п.н. выполняется равенство $E_s^t f = E_s^{s_1} E_{s_1}^{s_2} \dots E_{s_{n-1}}^t f$.

Теорема 1. Если $\mathbb{Q}, \mathbb{E}_t^{\infty}, \mathbb{Q}$ есть DSB2 с дискретным временем, то

$$\mathbb{Q}_{s-1}^s \ll \mathbb{Q}_s^{s+1}|_{\mathcal{F}_s} \quad (s \in \mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}) \quad (1)$$

и для всех целых s и t таких, что $0 \leq s < t < \infty$, выполняется равенство

$$\mathbb{Q}_s^t(A) = E_s^{\mathbb{Q}_s^{s+1}} E_{\mathcal{F}_{s+1}}^{\mathbb{Q}_{s+1}^{s+2}} \dots E_{\mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{Q}_{t-1}^t} I_A, \quad A \in \mathcal{F}_t, \quad (2)$$

где I_A – индикатор события A .

Обратно, если семейство вероятностных мер $(\mathbb{Q}_{s-1}^s, \mathcal{F}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ таково, что выполняется соотношение (1) и меры $(\mathbb{Q}_s^t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq s < t < \infty}$ заданы формулой (2), то $\mathbb{Q}, \mathbb{E}_t^{\infty}, \mathbb{Q}$ есть DSB2 с дискретным временем.

Доказательство. Пусть $\mathbb{Q}, \mathbb{E}_t^{\infty}, \mathbb{Q}$ есть DSB2 с дискретным временем. Соотношение (1) тривиально следует из свойства 2) определения 1. Докажем равенство (2).

Применяя свойство 3) определения 1, получаем

$$\mathbb{Q}_s^t(A) = E_s^{\mathbb{Q}_s^t} E_{\mathcal{F}_s}^{\mathbb{Q}_s^t} I_A = E_s^{\mathbb{Q}_s^t} E_s^t I_A =$$

$$= E_s^{\mathbb{Q}_s^t} (E_s^{s+1} E_{s+1}^{s+2} \dots E_{t-1}^t I_A) =$$

$$= E_s^{\mathbb{Q}_s^t} E_{\mathcal{F}_s}^{\mathbb{Q}_s^{s+1}} E_{\mathcal{F}_{s+1}}^{\mathbb{Q}_{s+1}^{s+2}} \dots E_{\mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{Q}_{t-1}^t} I_A.$$

Используя следствие 1 при $r = s+1$, имеем

$$\mathbb{Q}_s^t(A) = E_s^{\mathbb{Q}_s^{s+1}} E_{\mathcal{F}_s}^{\mathbb{Q}_s^{s+1}} E_{\mathcal{F}_{s+1}}^{\mathbb{Q}_{s+1}^{s+2}} \dots E_{\mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{Q}_{t-1}^t} I_A =$$

$$= E_s^{\mathbb{Q}_s^{s+1}} E_{\mathcal{F}_{s+1}}^{\mathbb{Q}_{s+1}^{s+2}} \dots E_{\mathcal{F}_{t-1}}^{\mathbb{Q}_{t-1}^t} I_A,$$

что и требовалось.

Пусть теперь семейство $(\mathbb{Q}_{s-1}^s, \mathcal{F}_s)_{s \in \mathbb{N}}$ таково, что выполняется соотношение (1) и меры $(\mathbb{Q}_s^t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq s < t < \infty}$ заданы формулой (2). Покажем, что $\mathbb{Q} = (\mathbb{Q}_s^t, \mathcal{F}_t)_{0 \leq s < t < \infty}$ удовлетворяет определению 1.

1) пусть $A \in \mathcal{F}_r$. Из (2) вытекает $\mathbb{Q}_s^t(A) = E_s^{\mathbb{Q}_s^{s+1}} E_{\mathcal{F}_s}^{\mathbb{Q}_s^{s+1}} E_{\mathcal{F}_{s+1}}^{\mathbb{Q}_{s+1}^{s+2}} \dots E_{\mathcal{F}_{r-1}}^{\mathbb{Q}_{r-1}^r} I_A = \mathbb{Q}_s^r(A)$, что совпадает с пунктом 1) определения 1;

2) пусть $A \in \mathcal{F}_r$ и $\mathbb{Q}_r^t(A) = 0$. Из доказанного выше в пункте 1) вытекает, что $\mathbb{Q}_r^{r+1}(A) = \mathbb{Q}_r^t(A) = 0$. Из (1) получаем $\mathbb{Q}_{r-1}^r(A) = 0$. Отсюда следует, что

$E_{F_{r-1}}^{Q_r} I_A = 0$ Q_{r-1}^r -п.н. и, следовательно, Q_{r-2}^{r-1} -п.н.

Окончательно имеем

$$Q_s^r(A) = E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} \dots E_{F_{r-2}}^{Q_{r-2}^{r-1}} E_{F_{r-1}}^{Q_{r-1}^r} I_A = 0.$$

Пункт 2) определения 1 доказан.

Из формулы (2) вытекает, что

$$E_{F_s}^{Q_s^t} f = E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} E_{F_{s+1}}^{Q_{s+1}^{s+2}} \dots E_{F_{t-1}}^{Q_{t-1}^t} f \quad (3)$$

для любой F_t -измеримой с.в. f . Докажем, что Q_s^t -п.н. справедливо равенство:

$$E_s^t f = E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} E_{F_{s+1}}^{Q_{s+1}^{s+2}} \dots E_{F_{t-1}}^{Q_{t-1}^t} f. \quad (4)$$

Прежде всего, используя формулу $Q_s^{s+1}|_{F_s} = Q_s^t|_{F_s}$ (см. первый пункт доказательства), отметим, что левая и правая части равенства (3) определены Q_s^{s+1} -п.н. Применяя это же соотношение, имеем при $A \in F_s$

$$\begin{aligned} E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} (A E_s^t f) &= E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} (I_A E_{F_s}^{Q_s^t} f) = \\ &= E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} E_{F_s}^{Q_s^t} (A f) = E_{F_s}^{Q_s^t} E_{F_s}^{Q_s^t} (A f) = E_{F_s}^{Q_s^t} (A f). \end{aligned} \quad (5)$$

С другой стороны, применяя формулу (3), получаем

$$\begin{aligned} E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} (I_A E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} E_{F_{s+1}}^{Q_{s+1}^{s+2}} \dots E_{F_{t-1}}^{Q_{t-1}^t} f) &= \\ &= E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} E_{F_s}^{Q_s^{s+1}} E_{F_{s+1}}^{Q_{s+1}^{s+2}} \dots E_{F_{t-1}}^{Q_{t-1}^t} (A f) = E_{F_s}^{Q_s^t} (A f). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь из (5) и (6) вытекает (4). Наконец, из (4) тривиальным образом получаем свойство 3) определения 1.

Доказательство завершено.

Замечание 1. Если в теореме 1 соотношение (1) заменить соотношением

$$Q_{s-1}^s \sim Q_s^{s+1}|_{F_s} \quad (s \in \mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}),$$

то эта теорема останется справедливой при замене аббревиатуры DSB2 на WDSB.

Определение 2. DSB2 $\mathcal{Q}, \mathcal{E}_{t \neq 0}^\infty, \mathcal{Q}_t$ называется замыкаемым, если $\forall 0 \leq t < \infty$ на F_t существует вероятностная мера Q_t^t с сопоставленным ей тождественным оператором E_t^t на множестве F_t -измеримых с.в., причем $\forall 0 \leq s < t < \infty$ выполняются условия $Q_s^s = Q_s^t|_{F_s}$ и $Q_s^t \ll Q_t^t$.

Замечание 2. Ясно, что в условиях определения 2 $\forall 0 \leq s < t < \infty$ выполняются соотношения

$$Q_s^s \ll Q_t^t|_{F_s}. \quad (7)$$

Предложение 1. Любой DSB2 $\mathcal{Q}, \mathcal{E}_{t \neq 0}^\infty, \mathcal{Q}_t$ замыкаем единственным образом, если $\forall 0 \leq s < \infty$ положить $Q_s^s = Q_s^t|_{F_s}$.

Доказательство. Корректность определения Q_s^s вытекает из следствия 1. Кроме того, по свойству 2) определения 1 $\forall 0 \leq s < t < u < \infty$ имеем $Q_s^t \ll Q_t^u|_{F_t} = Q_t^t$. Таким образом, условия определения 2 выполнены.

Замечание 3. В случае дискретного времени единственное замыкание DSB2 определяется формулой $Q_s^s = Q_s^{s+1}|_{F_s} \quad (\forall 0 \leq s < \infty)$.

С этого момента мы будем иметь дело только с замкнутыми DSB2.

Пример 1. Тривиальный пример WDSB получается следующим образом. Пусть $\mathcal{Q}_{s, F_s}^\infty$ – произвольное согласованное семейство вероятностных мер, а при $0 \leq s < t < \infty$ – $Q_s^t := Q_t^t$. Тогда $\forall 0 \leq s < r < t < \infty$, $Q_s^t|_{F_r} = Q_t^t|_{F_r} = Q_r^r = Q_s^r$, т.е. пункт 1) определения 1 выполняется. Далее, при тех же s, r и t $Q_s^r = Q_r^r = Q_t^t|_{F_r} = Q_r^r|_{F_r}$, т.е. и пункт 2*) определения 1 выполняется. Наконец, $E_s^r E_r^t f = E_{F_s}^{Q_s^r} E_{F_r}^{Q_r^t} f = E_{F_s}^{Q_r^r} E_{F_r}^{Q_r^t} f = E_{F_s}^{Q_t^t} E_{F_r}^{Q_t^t} f = E_{F_s}^{Q_t^t} f = E_s^t f$. Таким образом, $\mathcal{Q}, \mathcal{E}_{t \neq 0}^\infty, \mathcal{Q}_t$ где $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{s, F_s}^\infty$ – есть WDSB.

Предложение 2. DSB2 с дискретным временем естественным образом расширяется до DSB2 с непрерывным временем.

Доказательство. Пусть дан (замкнутый) DSB2 с дискретным временем, т.е. все три свойства определения 1 выполняются $\forall 0 \leq s \leq r \leq t < \infty$, где s, r и t – натуральные числа. Для любых действительных $0 \leq s \leq t < \infty$ полагаем $F_t := F_{[t]}$ и $Q_s^t := Q_{[t]}^t$, где $[t]$ – целая часть числа t . Беря произвольные $0 \leq s \leq r \leq t < \infty$ и записывая соотношения 1), 2) и 3) из определения 1 для натуральных чисел $0 \leq [s] \leq [r] \leq [t] < \infty$, получаем выполнение определения 1 для $\mathcal{Q}, \mathcal{E}_{t \neq 0}^\infty, \mathcal{Q}_t$ где $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{s, F_t}^\infty$.

Разложение Рисса для деформированных супермартиггалов 2-го рода

В этом параграфе мы будем работать на DSB2 с дискретным временем и обозначать этот базис $\mathcal{Q}, \mathcal{E}_{n \neq 0}^\infty, \mathcal{Q}_n$ где $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_{n, F_n}^\infty$, а $Q^{(n)} = Q_{n-1}^n$ (напомним, что $F_{-1} = \emptyset$). При $-1 \leq k < n < \infty$ меры Q_k^n определяются формулой (2), а $Q_n^n = Q_{n+1}^{n+1}|_{F_n} \quad (0 \leq n < \infty)$.

Следующее определение можно найти в работах [2–4].

Определение 3. Процесс $\{\mathbb{X}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$, где $X_n \in L_1(\mathbb{Q}, F_n, Q)$, называется деформированным супермартингалом (соответственно, субмартингалом, мартингалом) 2-го рода, если $\forall 0 \leq n < \infty$ $Q^{(n)}$ -п.н. $E^{Q^{(n+1)}}[\mathbb{X}_{n+1} | F_n] \leq X_n$ (соответственно, $E^{Q^{(n+1)}}[\mathbb{X}_{n+1} | F_n] \geq X_n$, $E^{Q^{(n+1)}}[\mathbb{X}_{n+1} | F_n] = X_n$).

В дальнейшем вместо словосочетания «деформированный супермартингал (соответственно, субмартингал, мартингал) 2-го рода» мы будем использовать аббревиатуру DSupM2 (соответственно, DSubM2, DM2). Нам понадобится также

Определение 4. Неотрицательный деформированный супермартингал 2-го рода $\{\mathbb{X}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ будем называть деформированным потенциалом 2-го рода (DP2), если $\lim_{n \rightarrow \infty} \downarrow E_{-1}^n Z_n = 0$, где

$$E_{-1}^n Z_n = E_{F_{-1}}^{Q^{(1)}} E_{F_0}^{Q^{(2)}} \dots E_{F_{n-1}}^{Q^{(n)}} Z_n.$$

Теорема 2. Пусть $\{\mathbb{X}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ – DSupM2, мажорирующий некоторый DSubM2 $\{\mathbb{Y}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$. Тогда существует DM2 $\{\mathbb{M}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ и DP2 $\{\mathbb{Z}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ такие, что $\Delta 0 \leq n < \infty$,

$$X_n = M_n + Z_n \quad Q\text{-п.н.} \quad (8)$$

Разложение (8) единственно тогда и только тогда, когда деформация Q – слабая.

Доказательство. Докажем существование разложения (8).

1. Определим $\Delta 0 \leq n < \infty$ с.в. $X_n^{\leftarrow} = E_{n+1}^{n+1} X_{n+1} \prec X_n$ Q -п.н. Покажем, что $\{\mathbb{X}_n^{\leftarrow}, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ – DSupM2. Действительно, $E_{n+1}^{n+1} X_{n+1}^{\leftarrow} = E_{n+1}^{n+1} E_{n+1}^{n+2} X_{n+2}$. Так как $E_{n+1}^{n+2} X_{n+2} \leq X_{n+1}$ $Q^{(n+1)}$ -п.н., то Q -п.н. $E_{n+1}^{n+1} E_{n+1}^{n+2} X_{n+2} \leq E_{n+1}^{n+1} X_{n+1} = X_n^{\leftarrow}$. Таким образом, $E_{n+1}^{n+1} X_{n+1}^{\leftarrow} \leq X_n^{\leftarrow}$. Итак, получаем, что $\{\mathbb{X}_n^{\leftarrow}, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ есть DSupM2, мажорируемый исходным DSupM2 $\{\mathbb{X}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$. Покажем, что $\{\mathbb{X}_n^{\leftarrow}, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ мажорирует DSubM2 $\{\mathbb{Y}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$. Действительно, так как

$$\forall 0 \leq n < \infty, \quad X_n \geq Y_n \quad Q\text{-п.н.}, \quad \text{то} \\ X_n^{\leftarrow} = E_{n+1}^{n+1} X_{n+1} \geq E_{n+1}^{n+1} Y_{n+1} \geq Y_n \quad Q\text{-п.н.}$$

2. Конструируя $X_n^{\leftarrow}$ по X_n таким же образом, как $X_n^{\leftarrow}$ по X_n и т.д., получим убывающую последовательность DSupM2 $\{\mathbb{X}_n^{\leftarrow}, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$, мажорирующую DSubM2 $\{\mathbb{Y}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$. Обозначим $M_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \downarrow X_n^{\leftarrow k} \quad Q$ -п.н. Ясно, что $M_n \geq Y_n$ Q -п.н.

Покажем, что $\{\mathbb{M}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ есть DM2. Действительно, так как $\forall 0 \leq n < \infty$ $Y_n \leq M_n \leq X_n$, то по теореме Лебега

$$E_{n+1}^{n+1} M_{n+1} = E_{n+1}^{n+1} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \downarrow X_{n+1}^{\leftarrow k} \right] = \\ = \lim_{k \rightarrow \infty} \downarrow E_{n+1}^{n+1} X_{n+1}^{\leftarrow k}. \quad (9)$$

Но легко видеть, что $X_{n+1}^{\leftarrow} = E_{n+1}^{n+2} \dots E_{n+k}^{n+k+1} X_{n+k+1}$,

$X_n^{\leftarrow+1} = E_{n+1}^{n+1} E_{n+1}^{n+2} \dots E_{n+k}^{n+k+1} X_{n+k+1}$ и, следовательно,

$$E_{n+1}^{n+1} X_{n+1}^{\leftarrow} = X_n^{\leftarrow+1}. \quad (10)$$

Продолжая равенство (9), имеем Q -п.н.

$$E_{n+1}^{n+1} M_{n+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \downarrow X_n^{\leftarrow+1 k} = M_n.$$

Таким образом, $\{\mathbb{M}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ есть DM2.

3. Обозначим $Z_n = X_n - M_n$ и покажем, что $\{\mathbb{Z}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ есть DP2. Ясно, что это DSupM2. Определим последовательность $Z_n^{\leftarrow}$ по Z_n так же, как мы определили $X_n^{\leftarrow}$ по X_n . Используя формулу (10), легко показать по индукции, что $Z_n^{\leftarrow} = X_n^{\leftarrow} - M_n$, $\forall 0 \leq n < \infty$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Имеем

$$E_{-1}^{n+k} Z_{n+k} = E_{-1}^0 E_0^1 E_1^2 \dots E_{n+k-1}^{n+k} Z_{n+k} = \\ = E_{-1}^0 E_0^1 \dots E_{n-1}^{n-1} \left(E_n^{n+1} E_{n+1}^{n+2} \dots E_{n+k-1}^{n+k} Z_{n+k} \right) = \\ = E_{-1}^0 E_0^1 \dots E_{n-1}^{n-1} Z_n^{\leftarrow} = E_{-1}^n Z_n^{\leftarrow} = E_{-1}^n X_n^{\leftarrow} - E_{-1}^n M_n.$$

Опять применяя теорему Лебега, получаем

$$\lim_{p \rightarrow \infty} E_{-1}^p Z_p = \lim_{k \rightarrow \infty} E_{-1}^{n+k} Z_{n+k} = E_{-1}^n \lim_{k \rightarrow \infty} X_n^{\leftarrow k} - E_{-1}^n Y_n = \\ = E_{-1}^n Y_n - E_{-1}^n Y_n = 0.$$

Таким образом, $\{\mathbb{Z}_n, F_n, Q\}_{n=0}^\infty$ есть DP2 и разложение (8) получено.

Докажем теперь вторую часть теоремы 2.

Достаточность. Пусть Q – WD и пусть

$X_n = \hat{M}_n + \hat{Z}_n$ – какое-либо другое разложение вида

(8). Конструируя, как и в предыдущей части доказательства, $X_n \mathbb{Q}$, получаем $\forall k \in N$, $X_n \mathbb{Q} = \hat{Y}_n + \hat{Z}_n \mathbb{Q}$,

где $\left(\hat{Z}_n \mathbb{Q}, F_n, Q \mathbb{Q}\right)_{n=0}^{\infty}$ – убывающая последовательность деформированных потенциалов 2-го рода. Обозначим $\lim_{k \rightarrow \infty} \downarrow \hat{Z}_n \mathbb{Q} = \tilde{Z}_n$ ($Q \mathbb{Q}$ -п.н.). Ясно, что

$\mathbb{Q}_n, F_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}$ – DP2. Из предыдущей теоремы имеем $\lim_{k \rightarrow \infty} \downarrow X_n \mathbb{Q} = M_n$ ($Q \mathbb{Q}$ -п.н.). Таким образом,

$M_n = \hat{M}_n + \tilde{Z}_n$. Обозначив $\tilde{Y}_n = M_n - \hat{M}_n$, получаем $\tilde{Y}_n = \tilde{Z}_n$ $Q \mathbb{Q}$ -п.н. $\forall 0 \leq n < \infty$. Так как

$\mathbb{Q}_n, Z_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}$ – DM2, то $\forall n \geq 0$, $E_{-1}^n Y_n = E_{-1}^0 Y_0 = c = const$, т.е. $\forall 0 \leq n < \infty$, $E_{-1}^n \tilde{Z}_n = c$.

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} E_{-1}^n \tilde{Z}_n = 0$, то $c = 0$. Следовательно,

$\forall 0 \leq n < \infty$, $E_{-1}^{Q_n} \tilde{Z}_n = E_{-1}^n \tilde{Z}_n = 0$. Следовательно,

$\tilde{Z}_n = 0$ Q_{-1}^n -п.н. Так как Q – WD, то $Q_{-1}^n \mathbb{Q} \sim Q_n^{(n+1)} \mathbb{Q}$, т.е. $\tilde{Z}_n = 0$ $Q_n^{(n+1)} \mathbb{Q}$ -п.н. Поэтому

$\tilde{Z}_n = 0$ $Q \mathbb{Q}$ -п.н. Таким образом, $M_n = \hat{M}_n$ $Q \mathbb{Q}$ -п.н. и единственность разложения (8) доказана.

Необходимость. Пусть теперь Q – D2 и не является слабой. Тогда $\exists k \mathbb{Q} \geq 0$ и $A \in F_k$ такие, что $Q \mathbb{Q} \mathbb{A} \geq 0$ и $Q^{(n+1)} \mathbb{Q} \mathbb{A} \geq 0$. Рассмотрим процесс

$\mathbb{Q}'_n, F_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}$, определяемый следующим образом: $Z'_n = 0$ при $n = 0, 1, \dots, k$ и $Z'_n = I_A$ при $n = k+1, k+2, \dots$. Легко видеть, что этот процесс ненулевой и является одновременно DM2 и DP2. Рассмотрим полученное в первой части теоремы 2 разложение Рисса $X_n = M_n + Z_n$, а также разложение

$X_n = (M_n - Z'_n) \mathbb{Q} + \mathbb{Q}_n + Z'_n \mathbb{Q}$. Ясно, что $(M_n - Z'_n, F_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty})$ – DM2 и $(\mathbb{Q}_n + Z'_n, F_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty})$ – DP2. Так как $Q^{(n+1)} \mathbb{Q}_{k+1} - Z'_{k+1} < M_k \mathbb{Q} \geq 0$, то разложение $X_n = (M_n - Z'_n) \mathbb{Q} + \mathbb{Q}_n + Z'_n \mathbb{Q}$ является разложением вида (3), не совпадающим с разложением $X_n = M_n + Z_n$.

Теорема 2 полностью доказана.

Локальные деформированные мартингалы 1-го рода

Следующее определение (как и определение 3) также можно найти в работах [2–4].

Определение 5. Тройку $\left(\Omega, \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}, Q = \mathbb{Q}^{(n)} \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}\right)$,

где $\forall n = 0, 1, 2, \dots$, $Q^{(n)}$ – вероятностная мера на F_n , будем называть деформированным стохастическим базисом 1-го рода (DSB1), если

$$Q^{(n+1)}|_{F_n} \ll Q^{(n)} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Процесс $\mathbb{Q}_n, F_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}$, где $X_n \in L_1(Q, F_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty})$, называется деформированным супермартингалом (соответственно, субмартингалом, мартингалом) 1-го рода, если $\forall 0 \leq n < \infty$ $Q^{(n+1)}|_{F_n}$ -п.н. $E^{Q^{(n+1)}}[\mathbb{Q}_{n+1}|F_n] \leq X_n$

(соответственно, $E^{Q^{(n+1)}}[\mathbb{Q}_{n+1}|F_n] \geq X_n$,

$E^{Q^{(n+1)}}[\mathbb{Q}_{n+1}|F_n] = X_n$).

Дальнейшие определения с формальной точки зрения являются новыми, однако представляют собой очевидные обобщения классических.

Определение 6. Процесс $X = \mathbb{Q}_t, F_t, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}$ называется локальным деформированным мартингалом 1-го рода (LDM1), если существует (локализирующая) последовательность марковских моментов $\tau_k \uparrow \infty$ ($k \in N$) такая, что $\forall k \in N$, процесс

$$\left(X_{n \wedge \tau_k}, F_{n \wedge \tau_k}, \frac{Q \mathbb{Q}^{\wedge \tau_k}}{Q \mathbb{Q}^{\wedge \tau_k} \mathbb{Q}}\right)_{n=0}^{\infty} \text{ есть DM1.}$$

Замечание 4. Из результатов работ [3, 4] вытекает, что если процесс X есть DM1, то для любой возрастающей последовательности марковских моментов

$$\mathbb{Q}_k \mathbb{Q}_{k=1}^{\infty} \text{ процесс } \left(X_{n \wedge \tau_k}, F_{n \wedge \tau_k}, \frac{Q \mathbb{Q}^{\wedge \tau_k}}{Q \mathbb{Q}^{\wedge \tau_k} \mathbb{Q}}\right)_{n=0}^{\infty} \text{ есть DM1.}$$

Определение 7. Процесс $X = \mathbb{Q}_t, F_t, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}$ называется обобщенным деформированным мартингалом 1-го рода (QDM1), если $\forall n = 0, 1, 2, \dots$ с.в. X_n σ -интегрируемы по $Q \mathbb{Q}$ относительно F_{n-1} и $\forall n \in N$ $Q \mathbb{Q}$ -п.н. выполняются равенства

$$E^{Q \mathbb{Q}}[\mathbb{Q}_n|F_{n-1}] = X_{n-1}.$$

Определение 8. Процесс $X = \mathbb{Q}_n, F_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty}$ называется деформированным мартингалным преобразованием 1-го рода (DMT1), если существует всюду определенный предсказуемый процесс $\mathbb{Q}_n, F_{n-1} \mathbb{Q}_{\neq 1}^{\infty}$ и

$$DM1 \quad M = \mathbb{Q}_n, F_n, Q \mathbb{Q}_{\neq 0}^{\infty} \text{ такие, что } \forall n \in N$$

$$\Delta X_n = g_n \Delta M_n \quad Q \mathbb{Q} \text{-п.н.}$$

$$(\Delta X_n := X_n - X_{n-1}, \Delta M_n := M_n - M_{n-1}).$$

Теорема 3. Пусть $Q = \mathbb{Q}_{F_n, \mathcal{F}_n}^{\infty}$ – ограниченная деформация 1-го рода (BD1), т.е. $\forall n=0,1,2,\dots$ плотно-

сти $\frac{dQ^{(n+1)}|_{F_n}}{dQ^{(n)}}$ ограничены Q^n -п.н. Пусть

$X = \mathbb{X}_{n, F_n, Q}^{\infty}$ – случайный процесс ($X_0 = 0$ Q^{∞} -п.н.). Тогда следующие условия равносильны:

- 1) X есть LDM1;
- 2) X есть GDM1;
- 3) X есть DMT1.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть X – LDM1 и

$\mathbb{X}_{k, \mathcal{F}_k}^{\infty}$ – соответствующая локализуемая последовательность моментов остановки. Обозначим $X_{n \wedge \tau_k} = X_n^{\tau_k}$. Таким образом, $\forall k \in N$ и $\forall n=0,1,2,\dots$ $E^{Q^{(\tau_k \wedge \infty)}}(|X_n^{\tau_k}|) < \infty$ и процесс

$\mathbb{X}_{n, F_n, Q}^{\tau_k \wedge \infty}$ есть DM1. Покажем сначала, что $\forall n=0,1,2,\dots$ с.в. X_{n+1} σ -интегрируема по Q^{∞} относительно F_n при локализующей последовательности событий $\tau_k > n$, $k \in N$. Имеем

$$\begin{aligned} \infty &> E^{Q^{(\tau_k \wedge \infty)}}(|X_{n+1}|) = E^{Q^{(\tau_k \wedge \infty)}}\left(|X_{n+1}| \cdot \sum_{i=0}^{\infty} I_{\tau_k = i}\right) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} E^{Q^{(\tau_k \wedge \infty)}}(|X_{n+1}| \cdot I_{\tau_k = i}) = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} E^{Q^{(i \wedge \infty)}}(|X_{n+1}| \cdot I_{\tau_k = i}) = \\ &= \sum_{i=0}^n E^{Q^{(i)}}(|X_i| \cdot I_{\tau_k = i}) + \sum_{i=n+1}^{\infty} E^{Q^{(i \wedge \infty)}}(|X_{n+1}| \cdot I_{\tau_k = i}) = \\ &= \sum_{i=0}^n E^{Q^{(i)}}(|X_i| \cdot I_{\tau_k = i}) + E^{Q^{(n \wedge \infty)}}(|X_{n+1}| \cdot I_{\tau_k > n}) \end{aligned}$$

Итак, $E^{Q^{(n \wedge \infty)}}(|X_{n+1}| \cdot I_{\tau_k > n}) < \infty$ и нужное утверждение доказано. Отсюда следует, что обобщенное условное матожидание $E^{n+1}[\mathbb{X}_{n+1}|F_n]$ существует и конечно $Q^{(n+1)}$ -п.н.

Проверим выполнение мартингального свойства. Имеем Q^{∞} -п.н.:

$$\begin{aligned} E^{Q^{(n+1)}}[\mathbb{X}_{n+1}|F_n] I_{\tau_k > n} &= \\ &= E^{Q^{(n+1)}}[\mathbb{X}_{n+1} I_{\tau_k > n} | F_n] I_{\tau_k > n} = \\ &= E^{Q^{(\tau_k \wedge \infty)}}[\mathbb{X}_{n+1} I_{\tau_k > n} | F_n] I_{\tau_k > n} \end{aligned}$$

(последнее равенство учитывает тот факт, что на множестве $\tau_k > n$ меры Q^{∞} и $Q^{\tau_k \wedge \infty}$ совпадают). Далее очевидно, что

$$\begin{aligned} E^{Q^{(\tau_k \wedge \infty)}}[\mathbb{X}_{n+1} I_{\tau_k > n} | F_n] I_{\tau_k > n} &= \\ &= E^{Q^{(\tau_k \wedge \infty)}}[\mathbb{X}_{n+1} I_{\tau_k > n} | F_{\tau_k \wedge n}] I_{\tau_k > n} = \\ &= E^{Q^{(\tau_k \wedge \infty)}}[\mathbb{X}_{n+1} | F_{\tau_k \wedge n}] I_{\tau_k > n} = \\ &= X_n^{\tau_k} \cdot I_{\tau_k > n} = X_n \cdot I_{\tau_k > n} \end{aligned}$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получаем выполнение Q^{∞} -п.н. равенства $E^{n+1}[\mathbb{X}_{n+1}|F_n] = X_n$, что и требовалось.

2) $\Rightarrow$ 3). Пусть X есть GDM1. Из этого следует, что $\forall n \in N$ с.в. X_n является σ -интегрируемой по Q^{∞} относительно F_{n-1} (с некоторой локализующей последовательностью τ_k , $k=1, \dots$, $\tau_k \in F_{n-1}$). Рассмотрим

плотность $h_{n-1} = \frac{dQ^{\infty}|_{F_{n-1}}}{dQ^{\infty}}$ (точнее, всюду определенную ее версию) и рассмотрим последовательность $\tau_k \leq k \leq \tau_k$. Ясно, что последовательность $\tau_k \leq k \leq \tau_k$ является локализующей при

проверке σ -интегрируемости (по Q^{∞}) с.в. X_{n-1} относительно F_{n-1} . Таким образом, $\forall n \in N$ с.в. ΔX_n является σ -интегрируемой по Q^{∞} относительно F_{n-1} . Нетрудно доказать, что $\forall n \in N$ существует F_{n-1} -измеримая с.в. $\eta_n > 0$ такая, что $\eta_n \Delta X_n$ Q^{∞} -интегрируема. Положим $M_0 = 0$, $\Delta M_n = \eta_n \Delta X_n$

$\mathbb{M} \in N$. Тогда $\Delta X_n = \frac{1}{\eta_n} \Delta M_n = g_n \Delta M_n$. Из того, что Q есть BD1, индуктивно вытекает включение $M_n \in L_1(\mathbb{Q}, F_n, Q^{\infty})$. Имеем

$$\begin{aligned} E^{Q^{(n)}}[\mathbb{M}_n | F_{n-1}] &= E^{Q^{(n)}}[\mathbb{M}_n \Delta X_n | F_{n-1}] = \\ &= \eta_n E^{Q^{(n)}}[\mathbb{X}_n | F_{n-1}] = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathbb{M}_n, F_n, Q^{\infty}$ есть DM1 и все доказано.

3) $\Rightarrow$ 1). Пусть X допускает представление $\Delta X_n = g_n \Delta M_n$, где $\mathbb{M}_{n, F_{n-1}}^{\infty}$ – предсказуемая (всюду определенная) последовательность с.в., а $\mathbb{M}_{n, F_n, Q}^{\infty}$ есть DM1. Определим последовательность марковских моментов $\tau_k = \inf \{n \geq 0 : |g_{n+1}| \geq k\}$ (считаем, что $\inf \emptyset = \infty$). Ясно, что при $k \rightarrow \infty$ $\tau_k \uparrow \infty$ всюду на Ω . Легко видеть, что $\forall k \in N$ $\forall n=0,1,2,\dots$ $E^{Q^{(n \wedge \tau_k)}}(|M_n^{\tau_k}|) < \infty$. Кроме того,

$$E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(\left| M_n^{\tau_k} \right| \right) = \sum_{j=0}^{\infty} E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge j}} \left(\left| M_{n \wedge j} \right| \cdot I_{\tau_k=j} \right) = \\ = \sum_{j=0}^n E^{Q^{(j)}} \left(\left| M_j \right| \cdot I_{\tau_k=j} \right) + E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(\left| M_n \right| \cdot I_{\tau_k > n} \right).$$

Так как Q есть BD1, то отсюда вытекает, что $E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(\left| M_n^{\tau_k} \right| \right) < \infty$. Следовательно,

$$E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(\left| \Delta M_{n+1}^{\tau_k} \right| \right) < \infty. \quad \text{Далее ясно, что}$$

$\tau_k \geq m \Rightarrow g_1 \leq k, \dots, g_m \leq k$. Поэтому величины $g_m \cdot I_{\tau_k \leq \tau_k}$ ($m=1,2,\dots$) ограничены. Так как они, с одной стороны, измеримы относительно F_{m-1} , а с другой – относительно F_{τ_k} , то они измеримы относительно $F_{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}$. Вычислим $\Delta X_n^{\tau_k}$:

$$\Delta X_n^{\tau_k} = \Delta X_{n \wedge \tau_k} = g_{n \wedge \tau_k} \Delta M_{n \wedge \tau_k} = g_n \cdot I_{\tau_k \geq n} \Delta M_{n \wedge \tau_k}.$$

Из предыдущего вытекает, что $E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(\left| \Delta X_{n+1}^{\tau_k} \right| \right) < \infty \quad \forall n=0,1,2,\dots$ (а так как

$X_0=0$, то и $E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(\left| X_{n+1}^{\tau_k} \right| \right) < \infty$). Имеем

$$E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(X_{n+1}^{\tau_k} \middle| F_{n \wedge \tau_k} \right) = \\ = E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(g_{n+1} I_{\tau_k \geq n+1} \Delta M_{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k} \middle| F_{n \wedge \tau_k} \right) = \\ = g_{n+1} I_{\tau_k \geq n+1} E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(M_{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k} \middle| F_{n \wedge \tau_k} \right).$$

Но по теореме о преобразовании свободного выбора [3, 4]

$$E^{Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k}} \left(M_{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k} \middle| F_{n \wedge \tau_k} \right) = 0 \quad Q^{(\mathfrak{q}+1) \wedge \tau_k} \text{-п.н.}$$

Следовательно, $(X_n^{\tau_k}, F_{n \wedge \tau_k}, Q_{n=0}^{n \wedge \tau_k})$ – DM1.

Таким образом, $(X_n, F_n, Q_{n=0}^{\infty})$ есть LDM1.

Доказательство теоремы 3 завершено.

Литература

1. Назарько О.В., Павлов И.В., Чернов А.В. Деформации и деформированные стохастические базисы // Математические методы в современных и классических моделях экономики и естествознания: материалы регион. науч.-практ. конф. профессорско-преподавательского состава и молодых ученых. Ростов н/Д, 2012. С. 37–54.
2. Павлов И.В., Назарько О.В. Теоремы о разложении деформированных мартингалов и их возможное применение в интеллектуальном моделировании // Вестн. РГУПС. 2013. № 4. С. 145–151.
3. Павлов И.В., Назарько О.В. Обобщение теоремы Дуба о свободном выборе для деформированных субмартингалов // Успехи мат. наук. 2013. Т. 68, вып. 6. С. 175–176.
4. Павлов И.В., Назарько О.В. Теорема о преобразовании свободного выбора для деформированных субмартингалов // Теория вероятностей и ее применения. 2014. Т. 59, вып. 3. С. 585–594.

References

1. Nazar'ko O.V., Pavlov I.V., Chernov A.V. [Deformation and deformed stochastic basis]. *Matematicheskie metody v sovremennykh i klassicheskikh modelyakh ekonomiki i estestvoznaniya: materialy region. nauch.-prakt. konf. professorsko-prepodavatel'skogo sostava i molodykh uchenykh* [Mathematical methods in modern and classic models of economics and science: proceedings of the region. scientific and practical. conf.]. Rostov-on-Don, 2012, pp. 37-54.
2. Pavlov I.V., Nazar'ko O.V. Teoremy o razlozhenii deformirovannykh martingalov i ikh vozmozhnoe primeneniye v intellektual'nom modelirovanii [Decomposition theorem of deformed martingales and their possible application in predictive modeling]. *Vestn. RGUPS*, 2013, no 4, pp. 145-151.
3. Pavlov I.V., Nazar'ko O.V. Obobshcheniye teoremy Duba o svobodnom vybore dlya deformirovannykh submartingalov [Generalization of Doob's theorem on free choice for deformed submartingales]. *Uspekhi mat. nauk*, 2013, vol. 68, issue 6, pp. 175-176.
4. Pavlov I.V., Nazar'ko O.V. Teorema o preobrazovanii svobodnogo vybora dlya deformirovannykh submartingalov [A theorem on the transformation of free choice for deformed submartingales]. *Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya*, 2014, vol. 59, no. 3, pp. 585-594.

КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА С СИЛАМИ ТРЕНИЯ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА*

© 2015 г. Д.А. Пожарский, Т.Г. Замулина

Пожарский Дмитрий Александрович – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики, Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону, 344000, e-mail: pozharda@rambler.ru

Замулина Татьяна Геннадиевна – аспирант, кафедра прикладной математики, Донской государственный технический университет, пл. Гагарина, 1, г. Ростов-на-Дону, 344000.

Pozharskii Dmitrii Aleksandrovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of Department of Applied Mathematics, Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia, e-mail: pozharda@rambler.ru

Zamulina Tatiana Gennadiyevna – Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics, Don State Technical University, Gagarin Sq., 1, Rostov-on-Don, 344000, Russia.

Исследована квазистатическая контактная задача с учетом сил трения Кулона для трансверсально изотропного полупространства, когда плоскости изотропии перпендикулярны его границе. На основе решения задачи Буссинеска, полученного при помощи двукратного интегрального преобразования Фурье, контактная задача сведена к двумерному интегральному уравнению первого рода. Затем для решения использован метод Галанова нелинейных граничных интегральных уравнений типа Гаммерштейна, позволяющий одновременно определить область контакта и давления в этой области. Сделаны расчеты контактного давления и вдавливающей силы для эллиптического штампа при разных направлениях движения и упругих материалах. Ранее аналогичные задачи изучались без учета сил трения.

Ключевые слова: контактная задача, трение, полупространство, анизотропия.

The quasi-static contact problem is investigated taking friction force into account for a transversely isotropic half-space is investigated, when the isotropy planes are perpendicular to its boundary. On the basis of a Boussinesq problem, the solution of which has been derived with the help of a double Fourier transformation, the contact problem is reduced to a two-dimensional integral equation of the first kind. Then for solving the problem the Galanov's method of Hammerstein type nonlinear boundary integral equations is used, which allows us to determine the contact domain as well as the contact pressure simultaneously. The contact pressure and the impressed force are calculated for an elliptical punch for different directions of motion and elastic materials.

Keywords: contact problem, friction, half-space, anisotropy.

Рассмотрим квазистатическую контактную задачу для трансверсально изотропного полупространства $x \geq 0$, граница которого перпендикулярна плоскостям изотропии $z = \text{const}$. Жесткий штамп начинает движение по границе $x=0$ под углом β к оси z . Силы кулоновского трения направлены против движения. Форма основания штампа описывается функцией $f(y, z)$. На штамп действует нормальная вдавливающая сила P и касательная сила $T = \mu P$ (в направлении движения; μ – коэффициент трения). При известных параметрах упругости $A_{11}, A_{13}, A_{33}, A_{44}, A_{66}$, величинах β, μ , осадке штампа δ и функции $f(y, z)$ требуется определить контактное давление $\sigma_x(0, y, z) = -q(y, z)$, а также область контакта Ω . Затем можно определить силу

$$P = \iint_{\Omega} q(y, z) dy dz. \quad (1)$$

На основании решения задачи Буссинеска [1] сведем задачу к следующему интегральному уравнению (ИУ) относительно $q(y, z)$:

$$\frac{1}{A_{66} \Omega} \iint_{\Omega} q(y_0, z_0) F(y - y_0, z - z_0) dy_0 dz_0 = 2\pi[\delta - f(y, z)], \quad (y, z) \in \Omega, \quad (2)$$

$$F(y, z) = \gamma_3^2 K(y, z) + \mu \cos \beta K_1(y, z) + \mu \sin \beta K_2(y, z),$$

$$K(y, z) = \frac{L_1(y, z)}{L_2(y, z)},$$

$$L_1(y, z) = (m_2 - m_1) y^2 \sqrt{\gamma_2^2 y^2 + z^2} \sqrt{\gamma_1^2 y^2 + z^2},$$

$$L_2(y, z) = m_2[(m_1 + 1)\gamma_3^2 y^2 + 2z^2]^2 \sqrt{\gamma_2^2 y^2 + z^2} - m_1[(m_2 + 1)\gamma_3^2 y^2 + 2z^2]^2 \sqrt{\gamma_1^2 y^2 + z^2} - 4(m_2 - m_1) z^2 \sqrt{\gamma_1^2 y^2 + z^2} \sqrt{\gamma_2^2 y^2 + z^2} \sqrt{\gamma_3^2 y^2 + z^2},$$

$$K_1(y, z) = -\frac{z}{\pi} \int_0^\pi \frac{h_1(\varphi) \zeta_2(\varphi) - h_2(\varphi) \zeta_1(\varphi)}{D(\varphi)[z^2 \cos^2 \varphi - y^2 \sin^2 \varphi]} \cos^2 \varphi d\varphi,$$

$$K_2(y, z) = \frac{y}{\pi} \times \int_0^\pi \frac{m_2 h_1(\varphi) \zeta_2(\varphi) - m_1 h_2(\varphi) \zeta_1(\varphi) + 2(m_1 - m_2) \zeta_1(\varphi) \zeta_2(\varphi) \zeta_3(\varphi)}{D(\varphi)[z^2 \cos^2 \varphi - y^2 \sin^2 \varphi]} \times \sin^2 \varphi d\varphi,$$

$$D(\varphi) = m_2 h_1^2(\varphi) \zeta_2(\varphi) - m_1 h_2^2(\varphi) \zeta_1(\varphi) + 4(m_1 - m_2) \sin^2 \varphi \zeta_1(\varphi) \zeta_2(\varphi) \zeta_3(\varphi),$$

$$h_k(\varphi) = (m_k + 1) \gamma_3^2 \cos^2 \varphi + 2 \sin^2 \varphi, \quad k = 1, 2;$$

$$\zeta_n(\varphi) = \sqrt{\gamma_n^2 \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi}, \quad n = 1, 2, 3;$$

$$m_1 = \frac{A_{11} \gamma_1^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \quad m_2 = \frac{A_{11} \gamma_2^2 - A_{44}}{A_{13} + A_{44}}, \quad \gamma_3^2 = \frac{A_{44}}{A_{66}},$$

γ_1^2, γ_2^2 являются корнями характеристического уравнения

$$\gamma^4 A_{11} A_{44} - \gamma^2 [A_{11} A_{33} - A_{13} (A_{13} + 2A_{44})] + A_{33} A_{44} = 0. \quad (3)$$

Для численного решения уравнения (2) применим метод нелинейных граничных ИУ, позволяющий одновременно определить область контакта и контактные давления [2, 3]. Проведена отладка метода при отсутствии трения путем сравнения с точным решением для эллиптического штампа [2], когда

$$f(y, z) = y^2 / (2R_1) + z^2 / (2R_2). \quad (4)$$

Предположим, что область контакта содержится в прямоугольнике $S = \{ |y| \leq b, |z| \leq a \}$, который покроем равномерной сеткой (брали 13×13 узлов). При расчете значений ядра (2) в узлах сетки его особенности сглаживались путем регуляризации [2], которая применялась также при вычислении сингулярных интегралов по φ , входящих в формулы (2). Используем безразмерные обозначения (штрихи далее опускаем):

$$y' = \frac{y}{a}, \quad z' = \frac{z}{a}, \quad \delta' = \frac{\delta}{a}, \quad \varepsilon = \frac{b}{a}, \quad A = \frac{a}{2R_1}, \quad (5)$$

$$B = \frac{a}{2R_2}, \quad q'(y', z') = \frac{q(y, z)}{A_{66}}, \quad P' = \frac{P}{A_{66} a^2}.$$

В таблице даны значения давления $q(y, 0)$ при разных μ и β ($\delta = A = B = 0,5$, $\varepsilon = 1$; значения параметров $\gamma_1^2, \gamma_2^2, \gamma_3^2, m_1, m_2$ взяты из [2, таблица]. Как показывают расчеты, трение практически не влияет на вдавливающую силу P и давление в центре области контакта. При движении вдоль оси z ($\beta = 0$) функция давления становится несимметричной по переменной z , а при движении вдоль оси y ($\beta = \pi/2$) – несимметричной по переменной y . Несмотря на возникновение асимметрии, интегральная характеристика давления P сохраняет свое значение.

Контактные давления $q(y, 0)$

Материал	μ	β	y								
			-2/3	-1/2	-1/3	-1/6	0	1/6	1/3	1/2	2/3
Титан	0	—	0,573	1,15	1,41	1,54	1,58	1,54	1,41	1,15	0,573
	0,2	$\pi/4$	0,605	1,18	1,42	1,54	1,58	1,53	1,39	1,13	0,539
	0,2	$\pi/2$	0,621	1,19	1,43	1,55	1,58	1,53	1,38	1,12	0,527
Углеродное волокно	0	—	1,20	1,76	2,05	2,20	2,25	2,20	2,05	1,76	1,20
	0,2	$\pi/4$	1,23	1,78	2,06	2,20	2,25	2,19	2,03	1,74	1,17
	0,2	$\pi/2$	1,25	1,79	2,07	2,21	2,25	2,19	2,03	1,73	1,15
Керамика PZT-4	0	—	0,330	0,947	1,19	1,32	1,36	1,32	1,32	0,947	0,330
	0,2	$\pi/4$	0,376	0,977	1,21	1,33	1,36	1,31	1,31	0,915	0,286
	0,2	$\pi/2$	0,396	0,991	1,22	1,33	1,36	1,31	1,31	0,902	0,268

Литература

References

1. Fabrikant V.I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space // Quarterly J. of Mechanics and Applied Mathematics. 2011. Vol. 64, № 2. P. 151–170.
2. Бедоидзе М.В., Пожарский Д.А. Взаимодействие штампов на трансверсально изотропном полупространстве // Прикладная математика и механика. 2014. Т. 78, вып. 4. С. 576–582.
3. Галанов Б.А. Нелинейные граничные уравнения контактных задач теории упругости // Докл. АН СССР. 1987. Т. 296, № 4. С. 812–815.
1. Fabrikant V.I. Non-traditional contact problem for transversely isotropic half-space. *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 2011, vol. 64, no 2, pp. 151-170.
2. Bedoidze M.V., Pozharskii D.A. Vzaimodeistvie shtampov na transversal'no izotropnom poluprostranstve [Interaction of the stamps on transversely isotropic half-space]. *Prikladnaya matematika i mekhanika*, 2014, vol. 78, no. 4, pp. 576-582.
3. Galanov B.A. Nelineinnye granichnye uravneniya kontakt-nykh zadach teorii uprugosti [Nonlinear boundary equation of contact problems of elasticity theory]. *Dokl. AN SSSR*, 1987, vol. 296, no 4, pp. 812-815.

Поступила в редакцию

14 января 2015 г.

УДК 53.043, 519.633, 51-73, 532.546

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБОБЩЕННОЙ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ рН-ГРАДИЕНТА ПРИ ИЗОЭЛЕКТРОФОКУСИРОВАНИИ*

© 2015 г. Н.М. Полякова

Полякова Наталья Михайловна – ассистент, кафедра вычислительной математики и математической физики, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: zhuk_nata@mail.ru

Poliakova Natalia Mikhailovna – Assistant, Department of Computational Mathematics and Mathematical Physics, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Miltchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: zhuk_nata@mail.ru

Численно исследована модель изоэлектрофокусирования, более общая по сравнению с классической. Приведены результаты вычислительного эксперимента, выполненного на основе метода конечных элементов. Показано, что для более адекватного описания процесса необходимо, в частности, взамен классического уравнения электронейтральности использовать уравнение Пуассона – Больцмана.

Ключевые слова: изоэлектрофокусирование, рН-градиент, изоэлектрическая точка, изоионная точка, условие электронейтральности.

The more general compared to the classic model of isoelectrofocusing is investigated numerically. The results of the computational experiment performed on the basis of the finite element method are presented. It is shown that for a more adequate description of the process the Poisson – Boltzmann equation should be used, in particular, instead of the classical equation of electroneutrality.

Keywords: isoelectrofocusing, pH-gradient, isoelectric point, isoionic point, electroneutrality condition.

Для многокомпонентной смеси амфолитов – веществ, имеющих как основные, так и кислотные свойства, численными методами исследована задача о формировании с течением времени рН-градиента под действием внешнего электрического поля (подробнее см. в [1–5]). В классическом варианте задача сводится к решению уравнений диффузии-переноса совместно с алгебраическим уравнением электронейтральности. Для более реальных моделей процесса изоэлектрофокусирования (ИЭФ) следует учитывать дополнительные эффекты: различие между изоэлектрическими точками, в которых подвижность компонент равна нулю, и изоионными точками, в которых заряд компоненты равен нулю; вклад в проводимость ионов воды и т.д. Более того, как показали результаты исследования, следует отказаться от локального условия электронейтральности.

Оказывается, что на заключительной стадии процесса фокусирования, близкой к стационарному состоянию, формирование рН-градиента сопровождается сильной пространственной стратификацией концентраций компонент. Каждая компонента сосредотачивается в своей пространственной области (зоне), в которой имеет концентрацию, близкую к постоянной. На границах зон происходят близкие к скачкообразному изменения напряженности электрического поля, что приводит к возникновению

условий электронейтральности и неразрывности плотности электрического тока, которые следует заменять уравнением Пуассона – Больцмана и более общим уравнением сохранения заряда.

Основные уравнения ИЭФ

Для исследования процесса ИЭФ использованы уравнения, которые учитывают различие между изоэлектрическими и изоионными точками, и вклад в проводимость ионов воды [6]

$$\partial_t a_k + \operatorname{div} \mathbf{i}_k = 0, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

$$\mathbf{i}_k = -\mu_k \nabla(\varepsilon(\psi) a_k) + \mu_k \Theta_k(\psi) a_k \mathbf{E},$$

$$\sum_{k=1}^n \Theta_k(\psi) a_k + 2k_w \sinh \psi = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{E} = -\nabla \varphi, \quad (3)$$

$$\mathbf{j}_k = \left(\varepsilon \mu_k \nabla(\Theta_k(\psi) a_k) + \mu_k \bar{\sigma}_k(\psi) a_k \mathbf{E} \right),$$

$$\mathbf{j} = \sum_{k=1}^n \mathbf{j}_k + 2k_w \mu_0 \times \\ \times \left(\varepsilon \nabla(\sinh(\psi - \psi_0)) + \cosh(\psi - \psi_0) \mathbf{E} \right),$$

*Работа выполнена при финансовой поддержке базовой части технического задания 213.01-11/2014-1 Минобрнауки РФ, Южный федеральный университет.

$$\theta_k(\psi) = \frac{\sinh(\psi - \psi_k)}{\cosh(\psi - \psi_k) + \delta_k},$$

$$\Theta_k(\psi) = \frac{\sinh(\psi - \Psi_k)}{\cosh(\psi - \Psi_k) + \delta_k},$$

$$\bar{\sigma}_k(\psi) = \frac{\cosh(\psi - \Psi_k)}{\cosh(\psi - \psi_k) + \delta_k},$$

$$\mu_k \bar{\varepsilon}(\psi) = \varepsilon \mu_k \Theta_k(\psi) - \varepsilon \mu_k^0 \theta_k(\psi) + \varepsilon \mu_k^0.$$

Здесь a_k , i_k – концентрация и плотность потока компонент; φ , E – потенциал и напряженность электрического поля; ψ – функция кислотности; j_k , j – плотность электрического тока для компоненты и смеси; ψ_k , Ψ_k – изоэлектрическая и изоионная точки; $\mu_k \Theta_k(\psi)$, $\theta_k(\psi)$, $\bar{\sigma}_k(\psi)$, $\mu_k \bar{\varepsilon}(\psi)$, $\varepsilon \mu_k^0$ – электрофоретическая подвижность, заряд, проводимость, коэффициент диффузии, коэффициент диффузии цвиттерионов; δ_k – коэффициент, связанный с константами диссоциации; k_w , μ_0 , ψ_0 – константа диссоциации, эффективная подвижность и параметр, характеризующий различие подвижностей ионов воды.

Ограничимся рассмотрением пространственно одномерного случая и режимом с постоянной плотностью тока $j = j_0 = \text{const}$, который наиболее часто рассматривается при решении задач ИЭФ. В этом случае напряженность электрического поля E определяется из уравнений явным образом и нет необходимости решать краевую задачу для нахождения электрического потенциала φ [7, 8]. Система дополняется краевыми и начальными условиями:

$$i_k|_{x=0} = i_k|_{x=1} = 0, \quad (4)$$

$$a_k|_{t=0} = a_k^0(x), \quad k = 1, \dots, n,$$

где a_k^0 – начальное распределение концентраций.

В более простых моделях в уравнениях (1) пренебрегают вкладом ионов воды, считая $k_w = 0$, и полагают отсутствующей разницу между изоэлектрической ψ_k и изоионной Ψ_k точками, т.е. требуют $\Psi_k = \psi_k$.

Одна из целей работы – демонстрация различия результатов для простейших моделей и модели (1).

Вычислительный эксперимент

Для решения задачи (1)–(4) в пространственно одномерном случае использован метод конечных элементов и алгоритм, подробно изложенный в [7] (см. также [8]). Для расчетов на отрезке $[0,1]$ выбиралось 200 кусочно-

квадратичных конечных элементов и шаг по времени $\tau = 0,005$. Результаты представлены для некоторых гипотетических параметров пятикомпонентной смеси

$$\mu_k = \mu_k^0 = 1,0, \quad \delta_k = 15,$$

$$\psi_k = 6 - k, \quad k = 1, \dots, 5,$$

$$\mu_0 = 27,28, \quad \psi_0 = -0,29,$$

$$a_1^0 = a_5^0 = 0,125, \quad a_2^0 = a_3^0 = a_4^0 = 0,25,$$

$$\varepsilon = \lambda^{-1}, \quad \lambda = 500, \quad k_w = 10^{-6}.$$

Различие между изоэлектрическими и изоионными точками. Зададим разности между ψ_k и Ψ_k

$$\Delta_k = \Psi_k - \psi_k, \quad \Delta_1 = -0,02, \quad \Delta_2 = 0,01,$$

$$\Delta_3 = 0,02, \quad \Delta_4 = 0,01, \quad \Delta_5 = -0,01.$$

Результаты расчетов представлены на рис. 1. Различия между изоэлектрическими и изоионными точками компонент вызваны разной подвижностью положительных и отрицательных ионов. Несмотря на то что разности Δ_k малы, различие между распределениями концентраций для модели при $\Delta_k \neq 0$ и $\Delta_k = 0$ достаточно значительны; pH -градиент (функция ψ) для обеих моделей является в стационарной стадии процесса почти кусочно-постоянным, но сдвинутым относительно друг друга и различается размерами пологих участков. Изменения особенно заметны по прошествии достаточно большого интервала времени, когда практически достигнуто стационарное состояние.

Дадим простое объяснение наблюдаемому эффекту. Для достаточно больших моментов времени t каждая концентрация стремится локализоваться в области, в которой подвижность обращается в нуль, т.е. $\mu_k \Theta(\psi_k) = 0$. Однако в случае $\Delta_k \neq 0$ молярный заряд $\theta_k(\psi_k) \neq 0$. Это означает, что распределение концентраций будет в основном определяться уравнением электронейтральности, например, для a_i имеем

$$0 = \theta_k(\psi) a_k + 2k_w \sinh \psi \approx \theta_i(\psi_i) a_i + 2k_w \sinh \psi_i.$$

Заметим, что при $\Delta_k \neq 0$ стационарное состояние процесса не реализуется.

Влияние вклада ионов воды. Обычная модель ИЭФ, в отличие от (1)–(4), не учитывает влияния ионов воды. Однако вклад ионов H^+ и OH^- в формирование заряда и проводимости смеси может значительно повысить точность вычислений. На рис. 2 приведены результаты расчетов при $\psi_k = \Psi_k$ для случаев $k_w \neq 0$ и $k_w = 0$, в почти стационарной

стадии процесса. Видно, что учет влияния ионов воды практически не сказывается на распределении

концентраций, однако существенно влияет на среднюю проводимость смеси.

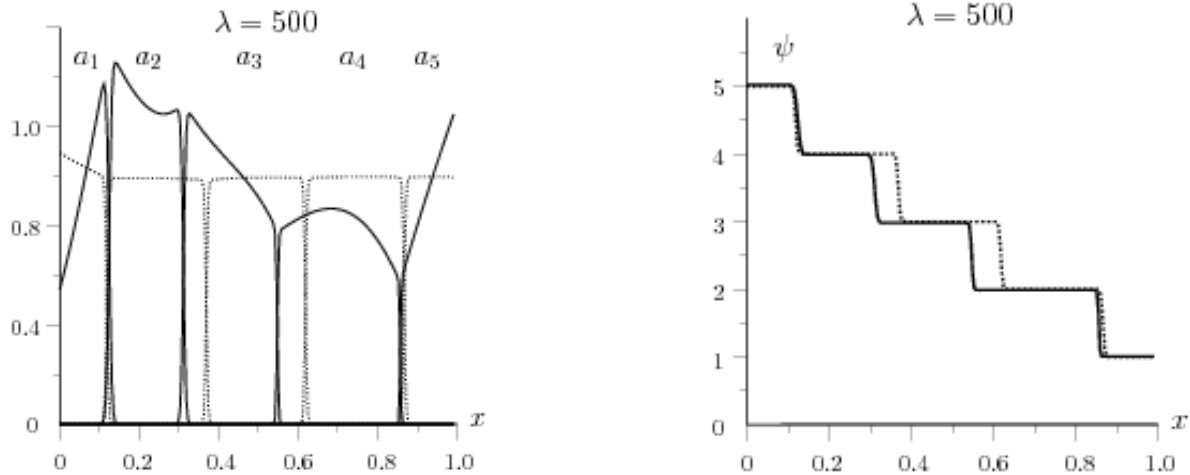


Рис. 1. Распределение концентраций $a_k(x)$ и функции $\psi(x)$ при $\Delta_k = 0$ (пунктир) и $\Delta_k \neq 0$ (непрерывная линия), $k_w \neq 0$, $\lambda = 500$, $t = 500\tau$, $\tau = 0,005$

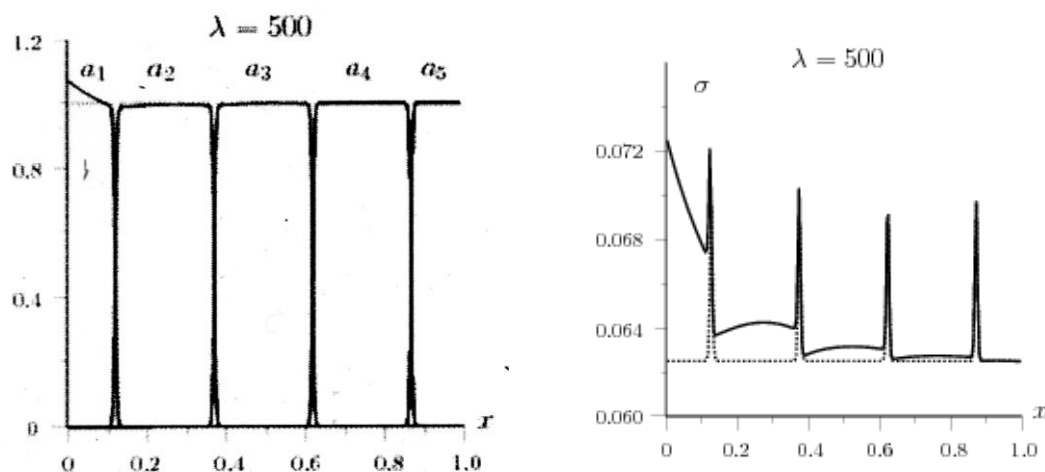


Рис. 2. Распределение концентраций и средней проводимости смеси σ , $k_w = 0$ (пунктир), $k_w \neq 0$ (непрерывная линия), $\psi_k = \Psi_k$, $t = 500\tau$, $\tau = 0,005$

Функция Кольрауша

При проведении расчетов для проверки правильности работы алгоритма удобно использовать аналог функции Кольрауша $R(x, t)$, которую нетрудно получить из исходных уравнений. В пространственно одномерном случае при $k_w = 0$, $\psi_k = \Psi_k$ выводим

$$R_t - \varepsilon S_{xx} = 0,$$

$$R = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{\mu_k}, \quad S = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Например, в случае, когда $\mu_k = \mu$, $k = 0, \dots, n$, имеем $S = \mu R$ и, с учетом начальных условий (4), функция $R(x, t) = \mu^{-1} \sum M_k = \text{const}$ является интегралом системы (1) (подробнее см. [7, 8]). Наличие интеграла позволяет проверить эффективность итерационного алгоритма, используемого для определения функции $\psi(x)$ из уравнения электронейтральности $\sum \Theta_k(\psi) a_k = 0$ при фиксированных $a_k(x)$. Заметим, что при приближении к стационарному состоянию, когда концентрация каждой компоненты практически сосредоточилась в

своей зоне, например, $[x_l, x_r]$, можно получить следующую аппроксимацию:

$$\partial_t a_k - \varepsilon \mu_k \partial_{xx} a_k = 0, \quad x \in [x_l, x_r],$$

что позволит вычислить характерное время достижения стационарного состояния

$$t_k \approx \frac{(x_r - x_l)^2}{\varepsilon \mu_k \pi^2} = \frac{(x_r - x_l)^2 \lambda}{\mu_k \pi^2}.$$

Например, при $\lambda = 500$, $(x_r - x_l) = 0,25$, $\mu_k = 1$ получим $t_k \approx 3$. На рис. 3 показана функция Кольрауша в зависимости от количества итераций алгоритма.

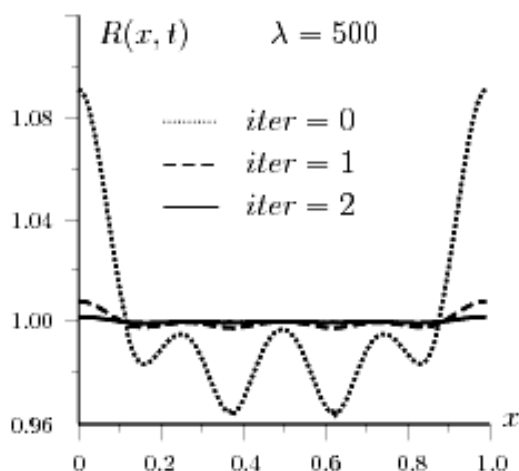
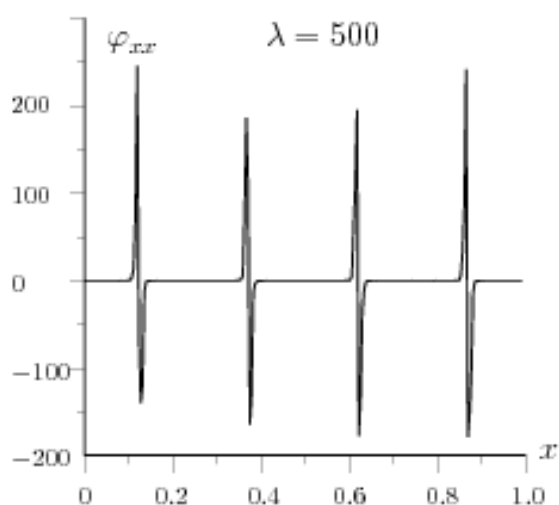


Рис. 3. Функция $R(x)$. Количество итераций $iter = 0, 1, 2$, $\lambda = 500$, $t = 300\tau$, $\tau = 0,005$. Теоретическое значение $R(x, t) = 1$



Об использовании уравнения Пуассона – Больцмана

Практически во всех моделях ИЭФ используется условие электронейтральности для заряда q и уравнение неразрывности для плотности электрического тока j (2), (3)

$$q \equiv \sum \theta_k a_k + 2k_w \sinh \psi = 0, \quad \text{div} j = 0. \quad (5)$$

Оценим возможность использования уравнения Пуассона – Больцмана и закона сохранения заряда взамен (5):

$$\partial_t q + \text{div} j = 0, \quad (6)$$

$$\varepsilon_0 \text{div} E = q.$$

Здесь ε_0 – диэлектрическая проницаемость воды ($\varepsilon_0^* \approx 80 \cdot 8,854 \cdot 10^{-12}$).

Если $\varepsilon_0 \text{div} E$ достаточно мало по сравнению с q , то, очевидно, из (6) следует (5). При достижении процессом ИЭФ почти стационарных стадий распределение концентраций сильно стратифицировано и функция ψ близка к кусочно-постоянной (рис. 1). Это означает, что на границах между веществами имеются скачки напряженности электрического поля и производная $E_x = -\phi_{xx}$ может быть достаточно большой. Проведенные расчеты, показанные на рис. 4, подтверждают сказанное.

Оценка плотности заряда воды ($[H^+] - [OH^-]$) и заряда $\varepsilon_0 \text{div} E$ в одномерном случае дает следующие соотношения, например, при $\lambda = 500$ и $\psi = 1$, $\phi_{xx} \approx 200$ (рис. 4)

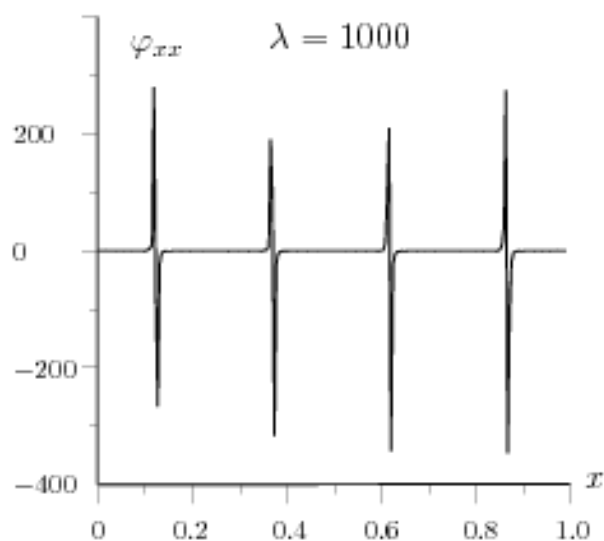


Рис. 4. Распределение $\phi_{xx}(x)$, $k_w \neq 0$, $\psi_k = \Psi_k$, $t = 2,5$

$$(\epsilon_0 \phi_{xx})_* \approx 0,0028 \text{ Кл/м}^3,$$

$$([H^+] - [OH^-])_* \approx 0,023 \text{ Кл/м}^3,$$

и при $\lambda = 1000$, $\psi = 1$, $\phi_{xx} \approx 200$

$$(\epsilon_0 \phi_{xx})_* \approx 0,0056 \text{ Кл/м}^3,$$

$$([H^+] - [OH^-])_* \approx 0,023 \text{ Кл/м}^3.$$

Получаем, что при $\lambda = 1000$ вклад ионов воды лишь в 4 раза превосходит вклад $(\epsilon_0 \phi_{xx})$ в формирование заряда смеси.

В частности, это означает, что использование уравнений (5) вместо более общих уравнений (6) может привести к значительным расхождениям решений модели с данными экспериментов.

Заключение

Результаты вычислительных экспериментов показали, что обобщенная модель формирования pH-градиента при процессе ИЭФ, учитывающая такие эффекты, как вклад в проводимость ионов воды, различие между изоэлектрическими и изоионными точками, обладает большей точностью вычислений по сравнению с классической моделью ИЭФ. Показана эффективность применения аналога функции Кольрауша, позволяющего вычислить характерное время достижения стационарного состояния процесса разделения смеси на отдельные компоненты. Приведены результаты расчетов, указывающие на необходимость использования при моделировании процесса уравнения Пуассона – Больцмана и закона сохранения заряда, что позволяет учесть локальные нарушения условия электронейтральности.

Литература

1. Бабский В.Г., Жуков М.Ю., Юдович В.И. Математическая теория электрофореза. Киев, 1983. 202 с.
2. Бабский В.Г., Жуков М.Ю. Биофизические методы: Теоретические основы электрофореза. М., 1990. 87 с.
3. Mosher R.A., Saville D.A., Thorman W. The Dynamics of Electrophoresis. New York, 1992. 236 p.
4. Жуков М.Ю. Массоперенос электрическим полем. Ростов н/Д, 2005. 216 с.

5. Righetti P.G. Isoelectric focusing: Theory, Methodology and Application. New York; Oxford, 1983. 386 p.
6. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu., Zhukova N.M. Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part III: Numerical Solution of the Non-stationary Problem // arXiv:1311.5363. 2013. 23 p.
7. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu., Zhukova N. M. Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part IV. Theory // arXiv:1311.5907. 2013. 15 p.
8. Жуков М.Ю., Ширяева Е.В. Использование пакета конечных элементов FreeFem++ для задач гидродинамики, электрофореза и биологии. Ростов н/Д, 2008. 256 с.

References

1. Babskii V.G., Zhukov M.Yu., Yudovich V.I. *Matematicheskaya teoriya elektroforeza* [Mathematical theory of electrophoresis]. Kiev, 1983, 202 p.
2. Babskii V.G., Zhukov M.Yu. *Biofizicheskie metody: Teoreticheskie osnovy elektroforeza* [Biophysical methods: theoretical foundations of electrophoresis]. Moscow, 1990, 87 p.
3. Mosher R.A., Saville D.A., Thormann W. *The Dynamics of Electrophoresis*. New York, 1992, 236 p.
4. Zhukov M.Yu. *Massoperenos elektricheskim polem* [Mass transport by an electric field]. Rostov-on-Don, 2005, 216 p.
5. Righetti P.G. *Isoelectric Focusing: Theory, Methodology, and Application*. New York – Oxford, 1983, 386 p.
6. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu., Zhukova N.M. Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part III: Numerical Solution of the Non-stationary Problem. *arXiv preprint arXiv:1311.5363*, 2013, 23 p.
7. Shiryayeva E.V., Zhukov M.Yu., Zhukova N.M. Mathematical Model of a pH-gradient Creation at Isoelectrofocusing. Part IV. Theory. *arXiv preprint arXiv:1311.5907*, 2013, 15 p.
8. Zhukov M.Yu., Shiryayeva E.V. *Ispol'zovanie paketa konechnykh elementov FreeFem ++ dlya zadach gidrodinamiki, elektroforeza i biologii* [Application of the FreeFem ++ package to solving hydrodynamics, electrophoresis, and biological problems]. Rostov-on-Don, 2008, 256 p.

УДК 51.76 : 504.4.054

ИГРЫ ГЕРМЕЙЕРА ПРИ ПРИНУЖДЕНИИ В ТРЕХУРОВНЕВОЙ СИСТЕМЕ КОНТРОЛЯ ВОДЯНОГО БАЛЛАСТА СУДОВ

© 2015 г. А.И. Рыжкин, А.Б. Усов

Рыжкин Артур Игоревич – аспирант, кафедра прикладной математики и программирования, факультет математики, механики и компьютерных наук, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: veronik@aanet.ru

Усов Анатолий Борисович – доктор технических наук, профессор, кафедра прикладной математики и программирования, факультет математики, механики и компьютерных наук, Институт математики, механики и компьютерных наук им. И.И. Воровича Южного федерального университета, Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: usov@math.sfedu.ru

Ryzhkin Artur Igorevich – Post-Graduate Student, Department of the Applied Mathematics and Programming, Faculty of the Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: veronik@aanet.ru

Usov Anatolii Borisovich – Doctor of Technical Science, Professor, Department of the Applied Mathematics and Programming, Faculty of the Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Vorovich Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: usov@math.sfedu.ru

Построена статическая трехуровневая теоретико-игровая модель системы контроля водяного балласта судов. При исследовании модели используется метод принуждения при одновременном учёте условий поддержания системы в заданном состоянии. Проводится сравнение результатов исследования модели с точки зрения игр Гермейера Γ_1 и Γ_2 . Приведены примеры численных расчетов в ряде характерных случаев.

Ключевые слова: иерархическая система управления, водяной балласт, принуждение, игры Гермейера, имитация, оптимизация.

The static three-level game-theoretic model of three-level control system of the ship's water ballast is built. In the study of the model the method of compulsion in view of requirements of keeping the system in the given state is used. A comparison of the results of study of the model in terms of Γ_1 and Γ_2 Germeyer's games is conducted. Numerical calculations for some typical cases are given.

Keywords: hierarchical control system, water ballast, compulsion, Germeyer's games, imitation, optimization.

Качество балластных вод оказывает существенное влияние на состояние речных и морских вод в акватории порта. Сброс большого количества загрязненных балластных вод может привести к существенному ухудшению состояния акватории порта. В России до сих пор не установлены стандарты, позволяющие реализовать эффективный экологический контроль качества сбрасываемых балластных вод. Проводимых в этом направлении математических исследований явно недостаточно. Ниже исследование проблемы проводится на основе иерархии и теоретико-игрового подхода.

Исследуется статическая трехуровневая теоретико-игровая модель системы контроля водяного балласта судов. В системе предполагается применение ме-

тодов иерархического управления при одновременном учёте условий поддержания системы в заданном состоянии.

Система управления водяным балластом судов включает в себя источник воздействия [1]:

- верхнего уровня (федеральный центр, ФЦ);
- среднего уровня (начальник порта, НП);
- нижнего уровня (капитан судна, КС);
- управляемую систему (акватория порта, УС).

Взаимоотношения внутри моделируемой системы устроены следующим образом: ФЦ воздействует на НП; НП – на КС; КС – на УС; ФЦ, НП и КС вместе можно рассматривать как совокупный источник воздействия на УС, имеющий иерархическую структуру. Воздействуя на УС, КС преследует свои эгоистиче-

ские цели, которые, вообще говоря, не совпадают с объективно существующими целями поддержания УС в заданном состоянии. Нужен ФЦ, который, применяя различные методы управления иерархической системой, способен обеспечить поддержание УС в заданном состоянии.

Математическая постановка задачи

В порт прибывают речные и морские суда, перевозящие различные грузы. При загрузке судна в порту в акваторию сбрасываются балластные воды, содержащие загрязняющие вещества (ЗВ). Целью КС является максимизация прибыли, полученной от фрахта, за вычетом переменных издержек. Как следствие, КС экономически не заинтересован в очистке водяного балласта своего судна. НП воздействует на область допустимых управлений КС, т.е. ограничивает максимально допустимую массу перевозимого судном груза и стремится к максимизации поступающих к нему от КС средств. ФЦ должен поддерживать УС в заданном состоянии, он ограничивает область допустимых управлений НП. Считается, что система находится в заданном состоянии, если выполнены стандарты качества морской воды, т.е. наблюдается не превышение предельно допустимых концентраций (ПДК) ЗВ в акватории порта.

Интересы ФЦ и НП, вообще говоря, различны. ФЦ должен создать условия, при которых поддержание речной системы в заданном состоянии будет экономически выгодно для НП. Добиться этого ФЦ может не единственным способом, поэтому, кроме того, он стремится к максимизации своего дохода.

Его целевая функция имеет вид

$$J_{\text{ФЦ}}(M_{\text{ФЦ}}) = \alpha V(m) p - T_{\text{ц.о.}} \rightarrow \max_{M_{\text{ФЦ}}} . \quad (1)$$

Здесь m – масса перевозимого КС груза; $V(m)$ – объем балластных вод, сбрасываемых в акваторию порта, зависящий от массы перевозимого судном груза m ; $p = \text{const}$ – размер платы порту за единицу сброшенного балласта; $V(m)p$ – плата за сброс водяного балласта объема $V(m)$; $\alpha = \text{const}$ – доля отчислений от платы за сброс водяного балласта в федеральный бюджет; $T_{\text{ц.о.}} = \text{const}$ – затраты ФЦ на очистку акватории порта; $M_{\text{ФЦ}}$ – управление ФЦ, которое ограничивает область допустимых управлений НП.

Целевая функция НП имеет вид

$$J_{\text{НП}}(M_{\text{НП}}) = C_{\text{порт.расх.}} + (1 - \alpha)V(m) p - F_{\text{надзор}} - F_{\text{очистка}}(V(m)) \rightarrow \max_{M_{\text{НП}}} . \quad (2)$$

Здесь $C_{\text{порт.расх.}} = \text{const}$ – портовые сборы с судна, направленные на покрытие расходов на содержание порта и его акватории; они включают в себя корабельный, лоцманский, маячный, навигационный и экологический сборы; $F_{\text{надзор}}$ – расходы на оплату надзорных за судами органов, зависящие от размера платы порту за единицу сброшенного балласта; $F_{\text{очистка}}(V(m))$ – расходы на очистку акватории порта от загрязняющих веществ, зависящие от объема водя-

ного балласта; $F_{\text{очистка}}(V(m))$ – возрастающая функция своих аргументов; $M_{\text{НП}}$ – управление НП, которое ограничивает область допустимых управлений КС.

Целевая функция КС имеет вид

$$J_{\text{КС}}(m) = F_{\text{фрахт}}(m) - C_{\text{порт.расх.}} - V(m) p - T_{\text{IFO}}(m) - T_{\text{MGO}}(m) - T_{\text{опер.расх.}}(m) - T_{\text{тех.обсл.}}(m) - C_{\text{страх.}} \rightarrow \max_m . \quad (3)$$

Здесь $F_{\text{фрахт}}(m)$ – функция платы владельцу судна за перевозку груза массы m ; $T_{\text{ц.о.}}(m)$, $T_{\text{MGO}}(m)$ – затраты судна на топливо марок IFO180 и MGO соответственно; $T_{\text{опер.расх.}}(m)$ – операционные расходы капитана судна, зависящие от массы груза, т.е. расходы, связанные с проведением производственно-хозяйственных и финансовых операций на судне; $T_{\text{ремонт}}(m)$ – отчисления на ремонт и техобслуживание, зависящие от массы груза; $C_{\text{страх.}} = \text{const}$ – расходы на страхование судна и груза; $F_{\text{фрахт}}(m)$, $T_{\text{ц.о.}}(m)$, $T_{\text{MGO}}(m)$, $T_{\text{опер.расх.}}(m)$, $T_{\text{тех.обсл.}}(m)$ – возрастающие функции своих аргументов.

Задача решается при следующих ограничениях на управления:

– КС

$$M_{\min} \leq m \leq M_{\text{НП}} ; \quad (4)$$

– НП

$$M_{\text{ФЦ}} \leq M_{\text{НП}} \leq M_{\max} ; \quad (5)$$

– ФЦ

$$M_{\min} \leq M_{\text{ФЦ}} \leq M_{\max} , \quad (6)$$

$$M_{\min}, M_{\max} = \text{const},$$

где $M_{\min}$, $M_{\max}$ – минимально и максимально допустимые грузоподъемности судна.

Пусть для поддержания УС в заданном состоянии достаточно, чтобы в акватории порта не были превышены ПДК ЗВ, определяемые государственными нормативными актами, например, [2], т.е.

$$B \leq B_{\text{пвх}} ; B_{\text{пвх}} = \text{const} , \quad (7)$$

где B – концентрация ЗВ в акватории порта; $B_{\text{пвх}}$ – максимально допустимая концентрация ЗВ в акватории порта.

Пусть

$$B = B_0 + V(m) W / A ; \quad (8)$$

$$A, B_0, W = \text{const}.$$

В (8) W – количество ЗВ, содержащихся в единице сбрасываемого балласта; A – объем внутренних портовых вод; B_0 – некоторая постоянная.

Таким образом, решается трехуровневая модель (1)–(8), представляющая собой нелинейную задачу условной оптимизации, решаемую с учетом иерархии в отношениях между субъектами управления [3]. В качестве метода иерархического управления в модели (1)–(8) используется метод принуждения [1], при котором в каждой паре субъектов управления (ФЦ и НП, НП и КС) субъект более высокого уровня (ведущий) заставляет субъекта более низкого уровня (ведомого) способствовать достижению своих целей, не принимая во внимание его цели и интересы.

Предполагается, что в системе реализуются информационные регламенты игр Гермейера Γ_1 и Γ_2 с учетом требований поддержания системы в заданном состоянии [4].

Возможны следующие комбинации равновесий в играх Гермейера Γ_1 и Γ_2 между субъектами управления различных уровней [4] в модели (1)–(8):

1. Для ФЦ и НП строится равновесие в игре Гермейера Γ_1 , а для НП и КС – в игре Γ_2 .

2. Для ФЦ и НП – равновесие в игре Гермейера Γ_2 , для НП и КС – в игре Γ_1 .

3. Для обеих пар субъектов управления строится равновесие в игре Гермейера Γ_2 .

4. Для обеих пар субъектов – равновесие в игре Гермейера Γ_1 .

Алгоритмы построения равновесий в играх Гермейера Γ_1 и Γ_2 приведены в [4].

Применим эти алгоритмы для модели (1)–(8).

Алгоритм нахождения равновесия в игре Гермейера Γ_1 (для ФЦ и НП) и Γ_2 (для НП и КС) в модели (1) – (8) состоит в следующем:

1. Решается игра Гермейера Γ_2 для НП и КС. Находится величина L_2 – значение выигрыша КС с учетом (4), (5), если он отказывается сотрудничать с НП:

$$L_2 = \sup_m \inf_{M_{\text{НП}}} J_{\text{КС}}(m).$$

Стратегии НП и КС, реализующие величину L_2 , обозначим $M_{\text{НП}}^K, m^K$.

2. Решается задача условной оптимизации (2), (4), (5) с дополнительным условием $L_2 < J_{\text{КС}}(m)$. Максимум (2) ищется сразу по двум параметрам: $M_{\text{НП}}, m$. Стратегии, доставляющие максимум, параметрически зависят от $M_{\text{ФЦ}}$; обозначим их $M_{\text{НП}}^S(M_{\text{ФЦ}}), m^S(M_{\text{ФЦ}})$.

Для НП оптимальные с точки зрения игры Γ_2 стратегии определяются формулой

$$M_{\text{НП}}^*(M_{\text{ФЦ}}), m^*(M_{\text{НП}}^*(M_{\text{ФЦ}})) = \begin{cases} M_{\text{НП}}^K, m^K, & \text{если } m \neq m^S \\ M_{\text{НП}}^S(M_{\text{ФЦ}}), m^S(M_{\text{ФЦ}}), & \text{если } m = m^S(M_{\text{ФЦ}}). \end{cases}$$

При экономически разумном КС получим, что $M_{\text{НП}}^*(M_{\text{ФЦ}}), m^*(M_{\text{ФЦ}}) =$

$$= M_{\text{НП}}^S(M_{\text{ФЦ}}), m^S(M_{\text{ФЦ}}).$$

3. Определенные на шаге 2 оптимальные стратегии НП и КС – величины $M_{\text{НП}}^S(M_{\text{ФЦ}}), m^S(M_{\text{ФЦ}})$ подставляются в (1), (8). Проводится максимизация целевой функции (1) с учетом (6), (8) по $M_{\text{ФЦ}}$. Величину, являющуюся решением этой задачи, обозначим $M_{\text{ФЦ}}^*$.

4. Равновесие в игре Γ_1 (для ФЦ и НП) и Γ_2 (для НП и КС) имеет вид

$$(M_{\text{ФЦ}}^*, M_{\text{НП}}^*, m^*) = M_{\text{ФЦ}}^*, M_{\text{НП}}^S(M_{\text{ФЦ}}^*), m^S(M_{\text{НП}}^S(M_{\text{ФЦ}}^*)) .$$

Алгоритм нахождения равновесия в игре Гермейера Γ_2 (для ФЦ и НП) и Γ_1 (для НП и КС) состоит в следующем:

1. Решается параметрическая задача условной оптимизации (3), (4). Определяются оптимальные стратегии КС в зависимости от стратегий НП, т.е. величины $m^*(M_{\text{НП}})$.

2. Величины $m^*(M_{\text{НП}})$, найденные на первом шаге алгоритма, подставляются в (2), (8).

3. Решается игра Γ_2 для ФЦ и НП. Находится величина L_2 – значение выигрыша НП с учетом (5), (6), если он отказывается сотрудничать с ФЦ:

$$L_2 = \sup_{M_{\text{НП}}} \inf_{M_{\text{ФЦ}}} J_{\text{НП}}(m^*(M_{\text{НП}})).$$

Стратегии ФЦ и НП, реализующие величину L_2 , обозначим $M_{\text{ФЦ}}^K, M_{\text{НП}}^K$.

4. Решается задача условной оптимизации (1), (6)–(8) с дополнительным условием $L_2 < J_{\text{НП}}(m^*(M_{\text{НП}}))$. Максимум (1) ищется сразу по двум параметрам – $M_{\text{НП}}$ и $M_{\text{ФЦ}}$, оптимальные стратегии обозначим $M_{\text{ФЦ}}^S, M_{\text{НП}}^S$.

5. Равновесие в игре Гермейера Γ_2 (для ФЦ и НП) и Γ_1 (для НП и КС) имеет вид

$$(M_{\text{ФЦ}}^*, M_{\text{НП}}^*(M_{\text{ФЦ}}^*), m^*(M_{\text{НП}}^*(M_{\text{ФЦ}}^*))) = M_{\text{ФЦ}}^K, M_{\text{НП}}^K, m^*(M_{\text{НП}}^K), \text{ если } M_{\text{НП}} \neq M_{\text{НП}}^S \\ M_{\text{ФЦ}}^S, M_{\text{НП}}^S, m^*(M_{\text{НП}}^S), \text{ если } M_{\text{НП}} = M_{\text{НП}}^S.$$

При экономически разумном НП получим, что $(M_{\text{ФЦ}}^*, M_{\text{НП}}^*, m^*) = M_{\text{ФЦ}}^S, M_{\text{НП}}^S, m^*(M_{\text{НП}}^S)$.

Алгоритм нахождения равновесия в игре Гермейера Γ_2 как для ФЦ и НП, так и НП и КС:

1. Решается игра Гермейера Γ_2 для ФЦ и НП. Находится величина $(L_2)_S$ – значение выигрыша НП с учетом (4)–(6), если он отказывается сотрудничать с ФЦ:

$$(L_2)_S = \sup_{m, M_{\text{НП}}} \inf_{M_{\text{ФЦ}}} J_{\text{НП}}(M_{\text{НП}}, m).$$

Стратегии, реализующие величину $(L_2)_S$, обозначим $M_{\text{ФЦ}}^K, M_{\text{НП}}^K, m^K$.

2. Решается задача условной оптимизации (1), (6), (8) с дополнительным условием $(L_2)_S < J_{\text{НП}}(M_{\text{НП}}, m)$.

Максимум (1) ищется по трем параметрам: $M_{\text{ФЦ}}, M_{\text{НП}}, m$. Оптимальные стратегии обозначим $M_{\text{ФЦ}}^S, M_{\text{НП}}^S, m^S$.

3. При экономически разумных КС и НП равновесие в игре Гермейера Γ_2 как для ФЦ и НП, так и НП и

$$\text{КС: } M_{\text{ФЦ}}^*, M_{\text{НП}}^*, m^* = M_{\text{ФЦ}}^S, M_{\text{НП}}^S, m^S.$$

Алгоритм нахождения равновесия в игре Гермейера Γ_1 как для ФЦ и НП, так и НП и КС:

1. Решается параметрическая задача условной оптимизации (3), (4). Определяются оптимальные стратегии КС в зависимости от стратегий НП, т.е. величины $m^*(M_{НП})$.

2. Величины $m^*(M_{НП})$, найденные на первом шаге алгоритма, подставляются в (2), (8).

3. Решается задача условной оптимизации (2), (5). Определяются оптимальные управления НП в зависимости от стратегий ФЦ, т.е. величины $M_{НП}^*(M_{ФЦ})$.

4. Найденные на предыдущем шаге величины $M_{НП}^*(M_{ФЦ})$ подставляются в (1).

5. Решается задача условной оптимизации (1), (6)–(8). Находятся оптимальные управления ФЦ, позволяющие поддерживать систему в заданном состоянии (7), (8).

6. Равновесие с учетом требования поддержания системы (1)–(8) в заданном состоянии при побуждении имеет вид $(M_{ФЦ}^*, M_{НП}^*(M_{ФЦ}^*), m^*(M_{НП}^*(M_{ФЦ}^*)))$.

В случае входных функций частного вида сформулированные в алгоритмах оптимизационные задачи решаются методом множителей Лагранжа. В общем случае модель (1)–(8) исследуется путем имитации и прямого упорядоченного перебора областей допустимых управлений субъектов управления [3].

Примеры расчетов

Приведем результаты нескольких модельных расчетов по предложенной модели (1)–(8). Входные данные для примеров были взяты из [5–7].

Пример 1. Пусть входные функции модели (1)–(8) имеют следующий вид: $V(m) = C_1 m$;

$T_{Ц.О.} = C_{Ц.О.} AM_{\max}$; $F_{назор} = C_{назор} p^{\xi}$; $F_{очистка}(V(m)) = C_{очистка} V(m)$; $F_{фрахт}(m) = C_2 m^{\eta}$; $T_{IFO}(m) = C_{IFO} m$; $T_{MGO}(m) = C_{MGO} m$; $T_{опер.расх.}(m) = C_{о.р.} m$; $T_{тех.обсл.}(m) = C_{тех.обсл.} m$, где C_1 , $C_{Ц.О.}$, $C_{назор}$, ξ , $C_{очистка}$, $C_{фрахт}$, C_{IFO} , C_{MGO} , $C_{о.р.}$, $C_{тех.обсл.} = const$; $C_{очистка}$ – стоимость очистки единицы объема сбрасываемых балластных вод; $C_{фрахт}$ – плата владельцу судна за перевозку единицы груза (ставка фрахта); C_{IFO} , C_{MGO} – стоимость топлива марок IFO180 и MGO, необходимого для перевозки единицы груза; $C_{о.р.}$ – операционные расходы (зарплата команде и т.п.); $C_{тех.обсл.}$ – отчисления на ремонт и техобслуживание в расчете на единицу груза.

Численные расчеты проводились методом прямого упорядоченного перебора на основе методологии имитационного моделирования в случае $\alpha = 0,5$; $p = 3,5$ у.е./м³; $C_{норт.расх.} = 140000$ у.е.; $C_1 = 1$ м³/т; $C_{Ц.О.} = 5 \cdot 10^{-10}$; $C_{назор} = 9000$ м³; $\xi = 2$; $C_{очистка} = 2$ у.е./м³; $C_2 = 170$ у.е./т; $\eta = 0,85$; $C_{IFO} = 8,4$ у.е./т; $C_{MGO} = 2,13$ у.е./т; $\tilde{N}_{i.д.} = 4,17$ у.е./т; $C_{тех.обсл.} = 1,3$ у.е./т; $C_{пòðää} = 100000$ у.е.; $M_{\min} = 10000$ т; $M_{\max} = 90000$ т; $B_{\max} = 50$ мг/м³; $B_0 = 20$ мг/м³; $W = 50$ мг/м³; $A = 10^7$ м³; у.е. – стоимость в условных единицах (табл. 1).

Пример 2. В случае входных данных примера 1 и $\alpha = 0,5$; $p = 1,5$ у.е./м³; $C_2 = 100$ у.е./т; $C_{IFO} = 3,6$ у.е./т; $C_{MGO} = 0,84$ у.е./т получим (табл. 2).

Таблица 1

Комбинация равновесия	$M_{ФЦ}^*$, т	$M_{НП}^*$, т	m^* , т	$J_{КС}^*$, у.е.	$J_{НП}^*$, у.е.	$J_{ФЦ}^*$, у.е.
$\Gamma_1 - \Gamma_1$	27000	27000	27000	6863	243000	38250
$\Gamma_1 - \Gamma_2$	11000	11000	11000	-211445	247000	10250
$\Gamma_2 - \Gamma_1$	10000	10000	10000	-227979	247250	8500
$\Gamma_2 - \Gamma_2$	10000	10000	10000	-227979	247250	8500

Таблица 2

Комбинация равновесия	$M_{ФЦ}^*$, т	$M_{НП}^*$, т	m^* , т	$J_{КС}^*$, у.е.	$J_{НП}^*$, у.е.	$J_{ФЦ}^*$, у.е.
$\Gamma_1 - \Gamma_1$	59000	59000	59000	2407	266000	35250
$\Gamma_1 - \Gamma_2$	10000	10000	10000	-322911	32725	-1500
$\Gamma_2 - \Gamma_1$	10000	10000	10000	-322911	32725	-1500
$\Gamma_2 - \Gamma_2$	10000	10000	10000	-322911	32725	-1500

Пример 3. В случае входных данных примера 1 и $\alpha = 1$; $p = 3$ у.е./м³; $C_{назор} = 22000$ м³; $\xi = 1,5$; $C_2 = 2800$ у.е./т $\eta = 0,6$ получим (табл. 3).

Таблица 3

Комбинация равновесия	$M^*_{ФЦ}, \text{т}$	$M^*_{НП}, \text{т}$	$m^*, \text{т}$	$J^*_{КС}, \text{у.е.}$	$J^*_{НП}, \text{у.е.}$	$J^*_{ФЦ}, \text{у.е.}$
$\Gamma_1 - \Gamma_1$	10000	10000	10000	53328	225685	21000
$\Gamma_1 - \Gamma_2$	11000	11000	11000	75721	223685	24000
$\Gamma_2 - \Gamma_1$	10000	10000	10000	53328	225685	21000
$\Gamma_2 - \Gamma_2$	10000	10000	10000	53328	225685	21000

Пример 4. В случае входных данных примера 3 и $\alpha = 0,1$; $p = 6$ у.е./м³; $C_{очистка} = 4$ у.е./м³; $C_2 = 1600$ у.е./т; $C_{IFO} = 3,6$ у.е./т; $C_{MGO} = 0,84$ у.е./т получим (табл. 4).

Таблица 4

Комбинация равновесия	$M^*_{ФЦ}, \text{т}$	$M^*_{НП}, \text{т}$	$m^*, \text{т}$	$J^*_{КС}, \text{у.е.}$	$J^*_{НП}, \text{у.е.}$	$J^*_{ФЦ}, \text{у.е.}$
$\Gamma_1 - \Gamma_1$	90000	90000	10000	-460000	36667	-9000
$\Gamma_1 - \Gamma_2$	54000	54000	54000	-213646	112267	23400
$\Gamma_2 - \Gamma_1$	10000	10000	10000	-389915	162667	45000
$\Gamma_2 - \Gamma_2$	90000	90000	90000	-217198	50667	-3000

В примерах 1–4 концентрация ЗВ в акватории порта не превышает ПДК, стандарты качества (7) выполняются.

Заключение

Предложенный механизм исследования статической трехуровневой теоретико-игровой модели системы контроля водяного балласта судов, основанный на комбинации равновесий в играх Гермейера Γ_1 и Γ_2 , позволяет сделать выводы.

1. По сравнению с другими комбинациями равновесий в играх Гермейера в случае игры $\Gamma_2 - \Gamma_2$ ФЦ и КС получают максимальный доход, а НП – минимальный (примеры 1–4).

2. Ведение своей деятельности для НП может быть экономически невыгодно даже в случае сотрудничества с ФЦ (примеры 3, 4: регламент и $\Gamma_2 - \Gamma_2$).

3. ФЦ получает прибыль, близкую к нулю, как в случае низкой платы за сброс единицы балластных вод КС (пример 2: регламенты $\Gamma_1 - \Gamma_1$, $\Gamma_1 - \Gamma_2$, $\Gamma_2 - \Gamma_1$), так и в случае недостаточных отчислений от платы за сброс водяного балласта в федеральный бюджет (пример 4: регламенты $\Gamma_1 - \Gamma_1$, $\Gamma_1 - \Gamma_2$, $\Gamma_2 - \Gamma_1$).

4. В примере 1 (регламент $\Gamma_2 - \Gamma_1$) ФЦ не имеет достаточных экономических рычагов воздействия на НП для выполнения условий сотрудничества, поэто-

му НП принимает решение не сотрудничать с ФЦ, деятельность КС становится убыточной.

5. Деятельность НП приносит положительную прибыль как при низком размере платы за сброс балластных вод (пример 2), так и при максимальном размере отчислений в федеральный бюджет (пример 3).

Авторы благодарят сотрудников Южного УГМРН Ространснадзора за обсуждение предложенных математических моделей.

Литература

1. Угольников Г.А. Иерархическое управление устойчивым развитием. М., 2010. 336 с.
2. Об утверждении нормативов качества воды водных объектов рыбохозяйственного значения, в том числе нормативов предельно допустимых концентраций вредных веществ в водах водных объектов рыбохозяйственного значения: приказ Росрыболовства № 20 от 18.01.2010. М., 2010.
3. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. М., 1998. 344 с.
4. Угольников Г.А., Усов А.Б. Равновесия в моделях иерархически организованных динамических систем управления с учетом требования устойчивого развития // Автоматика и телемеханика. 2014. № 6. С. 86–103.
5. Винников В.В. Экономика предприятия морского транспорта (экономика морских перевозок): учебник для вузов водного транспорта: 2-е изд., перераб. и доп. Одесса, 2001. 416 с.

6. Винников В.В., Крушкин Е.Д., Быкова Е.Д. Системы технологий на морском транспорте (перевозка и перегрузка): учеб. пособие / под общ. ред. В.В. Винникова: 2-е изд., перераб. и доп. М., 2010. 576 с.
7. Иванов С.Е. Морская индустрия и глобальный кризис – наблюдения судоброкера. URL: http://www.korabel.ru/news/comments/morskaya_industriya_i_globalniy_krizis_-_nablyudeniya_sudobrokera.html (дата обращения: 11.12.2013).
3. Lesin V.V., Lisovets Yu.P. *Osnovy metodov optimizatsii* [Fundamentals of optimization methods]. Moscow, 1998, 344 p.
4. Ugol'nitskii G.A., Usov A.B. *Ravnovesiya v modelyakh ierarkhicheski organizovannykh dinamicheskikh sistem upravleniya s uchetom trebovaniy ustoichivogo razvitiya* [Balance of hierarchically organized dynamic control systems taking into account the requirements of sustainable development]. *Avtomatika i telemekhanika*, 2014, no 6, pp. 86-102.

References

1. Ugol'nitskii G.A. *Ierarkhicheskoe upravlenie ustoichivym razvitiem* [Hierarchical management of sustainable development]. Moscow, 2010, 336 p.
2. *Ob utverzhdenii normativov kachestva vody vodnykh obektov rybokhozyaistvennogo znacheniya, v tom chisle normativov predel'no dopustimykh kontsentratsii vrednykh veshchestv v vodakh vodnykh ob'ektov rybokhozyaistvennogo znacheniya* [On approval of the water quality standards fishery water bodies, including the maximum permissible concentrations of harmful substances in the waters of fishery water bodies]: приказ Росрыболовства № 20 от 18.01.2010. Moscow, 2010.
5. Vinnikov V.V. *Ekonomika predpriyatiya morskogo transporta (ekonomika morskikh perevozok): uchebnik dlya vuzov vodnogo transporta* [Business economics of maritime transport (economy shipping): textbook for universities of water transport]. 2nd ed., rev. and add. Odessa, 2001, 416 p.
6. Vinnikov V.V., Krushkin E.D., Bykova E.D. *Sistemy tekhnologii na morskoy transporte (perevozka i peregruzka gruzov) : ucheb. posobie / pod obshch. red. V.V. Vinnikova* [System technologies for maritime transport (shipping and handling): proc. manual]. 2nd ed., rev. and add. Moscow, 2010, 576 p.
7. Ivanov S.E. *Morskaya industriya i global'nyi krizis - nablyudeniya sudobrokera* [Marine industry and the global crisis - monitoring of codebroker]. Available at: http://www.korabel.ru/news/comments/morskaya_industriya_i_globalniy_krizis_-_nablyudeniya_sudobrokera.html (accessed 11.12.2013).

Поступила в редакцию

29 декабря 2014 г.

УДК 517.983.2

ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДНЫЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В КЛАССАХ ГЕЛЬДЕРА НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ

© 2015 г. А.П. Чеголин

Чеголин Андрей Петрович – кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра дифференциальных и интегральных уравнений, Институт математики, механики и компьютерных наук Южного федерального университета, ул. Мильчакова, 8а, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: apchegolin@mail.ru

Chegolin Andrei Petrovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Science of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: apchegolin@mail.ru

Изучаются интегралы и производные дробного порядка в классах Гельдера в двумерном случае на прямоугольнике. Эти операторы вводятся по аналогии с одномерным случаем. Доказано полугрупповое свойство для дробных интегралов и представления в форме Маршо для дробных производных. Исследовано действие указанных операторов в классах Гельдера, а также в специально вводимых модифицированных гильдеровских классах. Основные результаты получены на основании соответствующих утверждений о действии операторов с одной нулевой составляющей порядка. Эти утверждения приведены в классах гильдеровских функций, вырождающихся на отрезках лучей, исходящих из вершины прямоугольника, и параллельных координатной оси.

Ключевые слова: дробный интеграл, дробная производная, мультииндекс, класс Гельдера, полугрупповое свойство, представление в форме Маршо.

This paper is devoted to the study of integrals and derivatives of fractional order in Holder classes on rectangle in the two-dimensional case. These operators are introduced by analogy with the one-dimensional case. The semigroup property of the fractional integrals and representations in the Marco form for the fractional derivatives are proved. The action of these operators in Holder spaces and in specially inserted modified Holder classes is investigated. The main results are obtained on the basis of appropriate statements about the action of the operators with one zero component of the order. These statements are given in classes of Holder functions degenerated on a segments of the beams outgoing from a vertex of the rectangle and parallel to a coordinate axis.

Keywords: fractional integral, fractional derivative, multiindex, Holder class, semigroup property, representation in Marco form.

Постановка задачи

Данная работа посвящена изучению дробных интегралов и производных в классах Гельдера в двумерном случае на прямоугольнике. В основу этих исследований положены результаты для одномерного случая, наиболее подробно изложенные в книгах [1, 2] (статьи [3–7]). Многомерный случай в этом направлении, по сути, до сих пор не исследован. Основная цель работы – описать действие исследуемых операторов в классах Гельдера, а также в некоторых модифицированных гильдеровских классах на прямоугольнике.

Введем обозначения. Пусть $\Omega = [1, b_1] \times [2, b_2]$ – основной прямоугольник; $x = (x_1, x_2) \in \Omega$. Для мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$, определим $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}$, а гамма-функцию будем понимать следующим образом: $\Gamma(\alpha) = \Gamma(\alpha_1) \Gamma(\alpha_2)$.

Напомним, что класс Гельдера порядка λ_1 , $0 < \lambda_1 \leq 1$, в одномерном случае на отрезке $[1, b_1]$

определяется как множество всех функций ψ , удовлетворяющих условию $|\psi(\xi_1) - \psi(\xi_2)| \leq A|x_1 - x_2|^{\lambda_1}$ для любых $x_1, x_2 \in [1, b_1]$, где A – некоторое число. Введем пространство Гельдера функций двух переменных по аналогии с одномерным случаем.

Будем говорить, что непрерывная на прямоугольнике Ω функция φ удовлетворяет условию Гельдера порядка $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_1 \leq 1$, $0 < \lambda_2 \leq 1$, если для любых $t = (t_1, t_2) \in \Omega$ и $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \Omega$ выполняется неравенство

$$|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| \leq A(|t_1 - \tau_1|^{\lambda_1} + |t_2 - \tau_2|^{\lambda_2}), \quad (1)$$

где A – некоторое число. Данное определение эквивалентно равномерной гильдеровости:

$$\begin{cases} |\varphi(\xi + h_1, t_2) - \varphi(\xi, t_2)| \leq c_1 h_1^{\lambda_1}, \\ |\varphi(\xi, t_2 + h_2) - \varphi(\xi, t_2)| \leq c_2 h_2^{\lambda_2}, \end{cases}$$

где числа c_1 и c_2 не зависят от t_1, t_2, h_1, h_2 . Множество всех функций φ , удовлетворяющих усло-

вию (1), обозначим $H^\lambda(\Omega^-)$ и будем называть классом Гельдера на прямоугольнике в двумерном случае.

Дробным интегралом порядка $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ функции $\varphi \in H^\lambda(\Omega^-)$ назовем конструкцию

$$(\mathcal{I}_a^\alpha \varphi)(x) = (\mathcal{I}_a^{\alpha_1, \alpha_2} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \times \\ \times \iint_{\substack{t_1, x_1 \in [a_1, x_1] \\ t_2, x_2 \in [a_2, x_2]}} \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{\alpha_1, 1-\alpha_2}} dt, \quad (2)$$

где $a = (a_1, a_2)$, $x \in \Omega$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$. Такое определение является естественным обобщением хорошо известного дробного интеграла в одномерном случае (см., например, книги [1] или [2]). Кроме того, введение указанным образом классов Гельдера позволяет говорить о сохранении основных свойств дробного интегрирования в этих пространствах по сравнению с одномерным случаем. Это касается как некоторых аналогий, связанных с действием операторов дробного интегрирования в этих классах, так и справедливости на функциях из $H^\lambda(\Omega^-)$ полугруппового свойства дробного интеграла:

$$I_a^\alpha I_a^\beta \varphi = I_a^{\alpha+\beta} \varphi.$$

Доказана теорема о действии операторов I_a^α (2) в классах Гельдера $H^\lambda(\Omega^-)$. Однако для более наглядного представления о действии этих операторов доказываются соответствующие утверждения в модифицированных классах Гельдера $H_n^\lambda(\Omega^-)$ – классах гильбертовских функций, обращающихся в нуль на частях лучей, выходящих из точки a параллельно координатным осям.

По аналогии с одномерным случаем введем дробные производные порядка α в общем случае $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$:

$$(\mathcal{D}_a^\alpha f)(x) = (\mathcal{D}_a^{\alpha_1, \alpha_2} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \times \\ \times \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \iint_{\substack{t_1, x_1 \in [a_1, x_1] \\ t_2, x_2 \in [a_2, x_2]}} \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha_1, \alpha_2}} dt, \quad (3)$$

$x \in \Omega$, а также в случае одной нулевой компоненты мультииндекса:

$$(\mathcal{D}_{a_1}^{\alpha_1, 0} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_1)} \frac{\partial}{\partial x_1} \int_{a_1}^{x_1} \frac{f(t_1, x_2)}{(x_1 - t_1)^{\alpha_1}} dt_1, \quad (4)$$

$$(\mathcal{D}_{a_2}^{0, \alpha_2} f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha_2)} \frac{\partial}{\partial x_2} \int_{a_2}^{x_2} \frac{f(t_1, t_2)}{(x_2 - t_2)^{\alpha_2}} dt_2, \quad (5)$$

$0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$, $x \in \Omega$. Дробные производные (4) и (5) представляют самостоятельный интерес. В частности, для них в введенном классе Гельдера справедливы представления, являющиеся аналогами хорошо известного в одномерном случае представления

в форме Маршо. Доказана теорема о действии дробных производных в классах Гельдера и модифицированных гильбертовских классах.

Основные результаты получены на основании соответствующих утверждений о действии операторов с одной нулевой составляющей порядка α в пространствах гильбертовских функций, вырождающихся на отрезках лучей, исходящих из вершины прямоугольника – точки a , и параллельных оси ординат или оси абсцисс.

Двумерные дробные интегралы в классах Гельдера на прямоугольнике

Рассмотрим оператор I_a^α (2) в классе $H^\lambda(\Omega^-)$. Для этого оператора имеет место полугрупповое свойство, а именно справедлива

Теорема 1. Пусть $\varphi \in H^\lambda(\Omega^-)$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Тогда

$$I_a^\alpha I_a^\beta \varphi = I_a^{\alpha+\beta} \varphi.$$

Для доказательства основной теоремы о действии оператора I_a^α в классе $H^\lambda(\Omega^-)$ в первую очередь получены соответствующие результаты для этих же операторов с одной нулевой компонентой в мультииндексе:

$$(\mathcal{I}_a^{\alpha_1, 0} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_1)} \int_{a_1}^{x_1} \frac{\varphi(t_1, x_2)}{(x_1 - t_1)^{1-\alpha_1}} dt_1, \\ (\mathcal{I}_a^{0, \alpha_2} \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha_2)} \int_{a_2}^{x_2} \frac{\varphi(t_1, t_2)}{(x_2 - t_2)^{1-\alpha_2}} dt_2,$$

$x \in \Omega$. Специально для рассмотрения таких операторов, а в дальнейшем и для соответствующих дробных производных введем в рассмотрение модифицированные классы Гельдера $H_{\bullet, 0}^\lambda$ и $H_{0, \bullet}^\lambda$ – классы гильбертовских функций, вырождающихся на отрезках лучей, исходящих из точки $a = (a_1, a_2)$, и параллельных оси ординат или оси абсцисс соответственно:

$$H_{\bullet, 0}^\lambda(\Omega^-) = \{ \varphi \in H^\lambda(\Omega^-) : \varphi(t_1, x_2) \equiv 0, \\ \forall x_2 \in [a_2, b_2], 0 < \lambda_1 \leq 1, 0 < \lambda_2 \leq 1, \\ H_{0, \bullet}^\lambda(\Omega^-) = \{ \varphi \in H^\lambda(\Omega^-) : \varphi(t_1, a_2) \equiv 0, \\ \forall x_1 \in [a_1, b_1], 0 < \lambda_1 \leq 1, 0 < \lambda_2 \leq 1. \}$$

Лемма 1. Пусть $0 < \lambda_i \leq 1$, $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1, 2$. Тогда:

1) если $\varphi \in H_{\bullet, 0}^{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega^-)$, то

$$(\mathcal{I}_a^{\alpha_1, 0} \varphi)(x) \in H_{\bullet, 0}^{\lambda_1 + \alpha_1, \lambda_2}(\Omega^-);$$

2) если $\varphi \in H_{0, \bullet}^{\lambda_1, \lambda_2}(\Omega^-)$, то

$$(\mathcal{I}_a^{0, \alpha_2} \varphi)(x) \in H_{0, \bullet}^{\lambda_1, \lambda_2 + \alpha_2}(\Omega^-).$$

На основании леммы 1 доказывается теорема о действии дробных интегралов в пространствах $H^\lambda(\Omega^-)$.

Теорема 2. Пусть $\varphi \in H^\lambda \mathcal{Q}^-$, $\Omega = [1, b_1] \times [2, b_2]$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_1 \leq 1$, $0 < \lambda_2 \leq 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$. Тогда справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^{\alpha} \varphi &= \frac{\varphi}{\Gamma(\alpha)} \mathcal{I}_{-a}^{\alpha} + \\ &+ \frac{\psi_1}{\Gamma(\alpha_2)} \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2} + \\ &+ \frac{\psi_2}{\Gamma(\alpha_1)} \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} + \psi_{1,2}, \end{aligned}$$

где $\psi_1, \psi_2, \psi_{1,2}$ – некоторые функции из пространств $H^{\lambda_1+\alpha_1} [1, b_1]$, $H^{\lambda_2+\alpha_2} [2, b_2]$ и $H^{\lambda+\alpha} \mathcal{Q}^-$ соответственно, причем

$$\begin{aligned} \psi_1 &\geq d_1 \mathcal{I}_{-a_1}^{\lambda_1+\alpha_1}, \\ \psi_2 &\geq d_2 \mathcal{I}_{-a_2}^{\lambda_2+\alpha_2}, \\ \psi_{1,2} &\geq d_3 \min \{ \mathcal{I}_{-a_1}^{\lambda_1+\alpha_1}, \mathcal{I}_{-a_2}^{\lambda_2+\alpha_2} \}, \end{aligned}$$

а d_1, d_2, d_3 – некоторые числа.

Доказательство этой теоремы основывается на следующих представлениях для функций $\psi_1, \psi_2, \psi_{1,2}$:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= I_a^{\alpha_1, 0} \varphi \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2} \varphi \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1}, \\ \psi_2 &= I_a^{0, \alpha_2} \varphi \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} \varphi \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2}, \\ \psi_{1,2} &= \mathcal{I}_a^{\alpha} \tilde{\varphi}, \end{aligned}$$

где $\tilde{\varphi} = \varphi \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} \varphi \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2} \varphi \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} \varphi \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2}$.

Пусть $\tilde{\Omega} = [1, \tilde{b}_1] \times [2, \tilde{b}_2]$. Введем модифицированный класс Гельдера $H_{\tilde{n}}^{\lambda} \mathcal{Q}^-$, состоящий из функций $\varphi \in H^{\lambda} \mathcal{Q}^-$, удовлетворяющих условию $\varphi \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2} \varphi \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} \varphi \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2} = 0$ для любого $t \in [1, c_1] \times [2, c_2]$, т.е. обращающихся в нуль на частях лучей, выходящих из точки a параллельно координатным осям. В частности, класс $H_a^{\lambda} \mathcal{Q}^-$ представляет подкласс гильдеровских функций с условием $\varphi \mathcal{I}_{-a}^{\alpha} = 0$, когда лучи вырождаются в точку. Другой крайний случай представляет класс $H_b^{\lambda} \mathcal{Q}^-$, когда требуется обращение в нуль на сторонах основного прямоугольника Ω , выходящих из точки a . Действие дробных интегралов в пространствах $H_{\tilde{n}}^{\lambda} \mathcal{Q}^-$ более наглядно, а именно справедлива

Теорема 3. Пусть $\varphi \in H_{\tilde{n}}^{\lambda} \mathcal{Q}^-$, $\Omega = [1, b_1] \times [2, b_2]$, $c \in \Omega$, $0 < \lambda_1 < 1$, $0 < \lambda_2 < 1$, $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$, $\lambda_1 + \alpha_1 < 1$, $\lambda_2 + \alpha_2 < 1$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Тогда $I_a^{\alpha} \varphi \in H_{\tilde{n}}^{\lambda+\alpha} \mathcal{Q}^-$.

Двумерные дробные производные в классах Гельдера на прямоугольнике

Рассмотрим сначала дробные производные (4), (5) с одной нулевой составляющей мультииндекса в показателе степени на функциях $f \in H^{\lambda} \mathcal{Q}^-$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \lambda_1 \leq 1$, $0 < \lambda_2 \leq 1$; для них справедливы представления, являющиеся аналогами хорошо известного в одномерном случае представления в форме Маршо:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_a^{\alpha_1, 0} f &= \frac{f}{\Gamma(-\alpha_1)} \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} + \\ &+ \frac{\alpha_1}{\Gamma(-\alpha_1)} \int_{a_1}^{x_1} \frac{f \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} f \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2}}{(x_1 - t_1)^{1+\alpha_1}} dt_1, \\ \mathcal{I}_a^{0, \alpha_2} f &= \frac{f}{\Gamma(-\alpha_2)} \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2} + \\ &+ \frac{\alpha_2}{\Gamma(-\alpha_2)} \int_{a_2}^{x_2} \frac{f \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} f \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2}}{(x_2 - t_2)^{1+\alpha_2}} dt_2, \\ 0 < \alpha_1 < \lambda_1, \quad 0 < \alpha_2 < \lambda_2. \end{aligned}$$

Для получения основного результата о действии дробных производных в пространствах Гельдера сначала доказываются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 2. Пусть $f \in H^{\lambda} \mathcal{Q}^-$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \alpha_1 < \lambda_1 \leq 1$, $0 < \alpha_2 < \lambda_2 \leq 1$.

Тогда $\frac{f \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} f \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2}}{(x_1 - a_1)^{\alpha_1}} \in H^{\lambda_1 - \alpha_1, \lambda_2^* - \alpha_1} \mathcal{Q}^-$, $\frac{f \mathcal{I}_{-a_1}^{\alpha_1} f \mathcal{I}_{-a_2}^{\alpha_2}}{(x_2 - a_2)^{\alpha_2}} \in H^{\lambda_1^* - \alpha_2, \lambda_2 - \alpha_2} \mathcal{Q}^-$, где

$$\lambda^* = \min \{ \lambda_1, \lambda_2 \}.$$

На основании этой леммы выводится следующее утверждение для дробных производных (4), (5) в модифицированных гильдеровских классах функций, вырождающихся на отрезках лучей, параллельных оси ординат или оси абсцисс соответственно.

Лемма 3. Пусть $0 < \alpha_i < \lambda_i \leq 1$, $i = 1, 2$. Тогда

- 1) если $f \in H_{\bullet, 0}^{\lambda_1, \lambda_2} \mathcal{Q}^-$, то $\mathcal{I}_a^{\alpha_1, 0} f \in H_{\bullet, 0}^{\lambda_1 - \alpha_1, \lambda_2^* - \alpha_1} \mathcal{Q}^-$;
- 2) если $f \in H_{0, \bullet}^{\lambda_1, \lambda_2} \mathcal{Q}^-$, то $\mathcal{I}_a^{0, \alpha_2} f \in H_{0, \bullet}^{\lambda_1^* - \alpha_2, \lambda_2 - \alpha_2} \mathcal{Q}^-$.

Действие дробных производных (4), (5) в пространствах $H^{\lambda} \mathcal{Q}^-$ описывает

Теорема 4. Пусть $f \in H^{\lambda} \mathcal{Q}^-$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \alpha_1 < \lambda_1 \leq 1$, $0 < \alpha_2 < \lambda_2 \leq 1$.

Тогда справедливы представления

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_a^{\alpha_1, 0} f(x) &= \frac{f(x_1, x_2)}{\Gamma(-\alpha_1)(x_1 - a_1)^{-\alpha_1}} + \gamma_1(x), \\ \mathbb{I}_a^{0, \alpha_2} f(x) &= \frac{f(x_1, a_2)}{\Gamma(-\alpha_2)(x_2 - a_2)^{-\alpha_2}} + \gamma_2(x), \end{aligned}$$

где $x \in \Omega$; $\gamma_1(x)$, $\gamma_2(x)$ – некоторые функции из классов $H^{\lambda_1 - \alpha_1, \lambda^* - \alpha_1}(\Omega)$ и $H^{\lambda^* - \alpha_1, \lambda_2 - \alpha_2}(\Omega)$ соответственно.

Рассмотрим теперь вопрос о действии дробных производных (3) в классах $H_c^\lambda(\Omega)$. Для описания образа этих операторов введем в рассмотрение весовые модифицированные классы Гельдера на прямоугольнике. Будем рассматривать вес $\rho(x_i)$, $i = 1, 2$, который имеет степенной характер, и говорить, что функция $\varphi(x)$ принадлежит классу $H_{\bullet, 0}^\lambda(\Omega, \rho)$, если функция $\rho(x_i)\varphi(x)$ принадлежит классу $H_{\bullet, 0}^\lambda(\Omega)$. Аналогично определяется класс $H_{0, \bullet}^\lambda(\Omega, \rho)$.

Теорема 5. Пусть $f \in H_c^\lambda(\Omega)$, $\Omega = [1, b_1] \times [2, b_2]$, $\tilde{\Omega} = [1, \tilde{b}_1] \times [2, \tilde{b}_2] \subset \Omega$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, $0 < \alpha_1 < \lambda_1 \leq 1$, $0 < \alpha_2 < \lambda_2 \leq 1$. Тогда справедливо представление

$$\mathbb{I}_a^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \left(\frac{f(x)}{(x - a)^\alpha} + \eta_1(x) + \eta_2(x) + \eta_3(x) \right),$$

где $\eta_1(x) \in H_{\bullet, 0}^{\lambda_1 - \alpha_1, \lambda^* - \alpha_1}(\Omega, \rho_1)$, $\rho_1(x_2) = x_2 - a_2$, $x_2 \in [2, b_2]$, $\eta_2(x) \in H_{0, \bullet}^{\lambda^* - \alpha_2, \lambda_2 - \alpha_2}(\Omega, \rho_2)$, $x_1 \in [1, b_1]$, $\rho_2(x_1) = x_1 - a_1$, $\eta_3(x) \in H_c^{\lambda^* - \tilde{\alpha}, \lambda^* - \tilde{\alpha}}(\Omega)$, $\tilde{\alpha} = \alpha_1 + \alpha_2$.

Утверждение теоремы получено на основании следующих представлений для функций $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$, $\eta_3(x)$:

$$\eta_1(x) = \frac{D_a^{\alpha_1, 0} \mathbb{I}_a^{\alpha_1, 0} f(x_1, a_2)}{(x_2 - a_2)^{-\alpha_2}},$$

$$\eta_2(x) = \frac{D_a^{0, \alpha_2} \mathbb{I}_a^{0, \alpha_2} f(x_1, t_2)}{(x_1 - a_1)^{-\alpha_1}},$$

$$\eta_3(x) = \mathbb{I}_a^{\alpha_1, 0} D_a^{0, \alpha_2} \tilde{f}(x),$$

где $\tilde{f}(x) = f(x) - \mathbb{I}_a^{\alpha_1, 0} f(x) - \mathbb{I}_a^{0, \alpha_2} f(x)$.

Литература

1. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. 688 с.
2. Самко С.Г. Гиперсингулярные интегралы и их приложения. Ростов н/Д, 1984. 280 с.

3. Карапетянц Н.К., Рубин Б.С. Радиальные потенциалы Рисса и операторы дробного интегрирования // Докл. АН СССР. 1982. Т. 263, № 6. С. 1299–1302.
4. Краснов В.А. О дробных производных функций многих переменных // Краевые задачи электродинамики производящих сред. Киев, 1976. С. 240–243.
5. Гинзбург А.И., Карапетянц Н.К. Дробное интегрирование в гильдеровских классах переменного порядка // Докл. АН. 1994. Т. 339, № 4. С. 439–444.
6. Ross B., Samko S.G. Fractional integration operator of variable order in the Holder spaces H^λ // Intern. J. Math. and Math. Sci. 1995. Vol. 18, № 4. P. 777–788.
7. Вакулов Б.Г., Самко Н.Г., Самко С.Г. Операторы типа потенциала и гиперсингулярные интегралы в пространствах Гельдера переменного порядка на однородных пространствах // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. Спецвыпуск. Актуальные проблемы мат. гидродинамики. 2009. С. 40–45.

References

1. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. *Integraly i proizvodnye drobnogo poriyadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and derivatives of fractional order, and some applications]. Minsk, 1987, 688 p.
2. Samko S.G. *Gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya* [Hypersingular integrals and their applications]. Rostov-on-Don, 1984, 280 p.
3. Karapetyants N.K., Rubin B.S. Radial'nye potentsialy Rissa i operatory drobnogo integrirvaniya [Radial Riesz potentials and operators of fractional integration]. *Dokl. AN SSSR*, 1982, vol. 263, no 6, pp. 1299–1302.
4. Krasnov V.A. O drobnnykh proizvodnykh funktsii mnogikh peremennykh [Fractional derivatives of functions of several variables]. *Kraevye zadachi elektrodinamiki proizvodnyashchikh sred*. Kiev, 1976, pp. 240–243.
5. Ginzburg A.I., Karapetyants N.K. Drobnoe integro-differentsirovanie v gel'derovskikh klassakh peremennogo poriyadka [Fractional integro differentiation in Holder classes of variable order]. *Dokl. RAN*, 1994, vol. 339, no 4, pp. 439–441.
6. Ross B., Samko S. Fractional integration operator of variable order in the Holder spaces $H^{\lambda(x)}$. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 1995, vol. 18, no. 4, pp. 777–788.
7. Vakulov B.G., Samko N.G., Samko S.G. Operatory tipa potentsiala i gipersingulyarnye integraly v prostranstvakh Gel'dera peremennogo poriyadka na odnorodnykh prostranstvakh [Operators of potential type and hypersingular integrals in Hölder spaces of variable order on homogeneous spaces]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki. Spetsvypusk: Aktual'nye problemy mat. gidrodinamiki*, 2009, pp. 40–45.

БИОЛОГИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 504.064.36:579+597-12:579.852.13(262.5+262.54)

РОЛЬ СУЛЬФИТРЕДУЦИРУЮЩИХ КЛОСТРИДИЙ В ПАТОЛОГИИ У РЫБ

© 2015 г. М.А. Морозова, Ю.А. Федоров

Морозова Марина Александровна – научный сотрудник, сектор болезней рыб отдела аквакультуры, Азовский научно-исследовательский институт рыбного хозяйства, ул. Береговая, 21в, г. Ростов-на-Дону, 344002, e-mail: morozova.q@mail.ru

Федоров Юрий Александрович – доктор географических наук, профессор, заведующий кафедрой физической географии, экологии и охраны природы, Институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: fedorov@sfsedu.ru

Morozova Marina Aleksandrovna – Researcher, Sector of Fish Diseases of Department of Aquaculture, Azov Scientific Research Institute of Fisheries, Beregovaya St., 21v, Rostov-on-Don, 344002, Russia, e-mail: morozova.q@mail.ru

Fedorov Yuri Aleksandrovich – Doctor of Geographical Science, Professor, Head of the Department of Physical Geography, Ecology and Environment, Institute of Earth Sciences of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: fedorov@sfsedu.ru

На основании анализа литературных данных и материалов собственных исследований показано значение сульфитредуцирующих клостридий (*Clostridium perfringens*, *C. sporogenes*) в патологии гидробионтов. При заболеваниях у рыб наблюдаются клинические проявления различной степени выраженности – от кровоизлияний и язв на поверхности тела до острой септицемии. При этом *C. perfringens* вовлекается именно в раневые процессы и представляет проблему как возбудитель вторичной инфекции. Контаминация спорами сульфитредуцирующих клостридий жабр и кишечника здоровых рыб не имела клинических последствий. С теоретической и прикладной точек зрения важно также доказательство возможности образования сероводорода с участием сульфитредуцирующих клостридий, что позволяет по-новому осмыслить метаболический цикл сероводорода в сульфидных лечебных глинах и донных отложениях морских и пресноводных экосистем, находящихся в зоне антропогенного влияния.

Ключевые слова: сульфитредуцирующие клостридии, санитарно-показательные микроорганизмы, патология, рыба, споры, штамм, сероводород, метан.

According to the analysis of books contains literary and materials of our own research shows the importance of sulphite-reducing clostridia (*Clostridium perfringens*, *C. sporogenes*) in the pathology of hydrobionts. Diseases of fish can have various clinical manifestations from bleeding and ulcers on the surface of the body to acute septicemia. *C. perfringens* involved in the wound process and it represents the problem as a secondary pathogen infection. Healthy fish were contaminated with gills and intestines spores of sulphite-reducing clostridia and manifestations had no clinical. From the theoretical and applied points of view it is also important proof of the possibility of formation of hydrogen sulfide with sulfite-reducing clostridia, which allows to rethink the metabolic cycle of hydrogen sulfide in the sulfide therapeutic mud and sediments of marine and freshwater ecosystems in the zone of human influence.

Keywords: sulphite-reducing clostridia, sanitary-indicator microorganisms, pathology, fish, spores, strain, hydrogen sulfide, methane.

Медико-биологическим термином «патология» обозначается динамически развивающееся нарушение функций организма при повреждении его структур патогенным фактором любой природы как реакция организма на взаимодействие с этим фактором. Патология, генерализуясь, может привести к дисфункции организма – болезни [1].

В литературе, в основном зарубежной, имеются сведения о случаях инфицирования гидробионтов сульфитредуцирующими клостридиями. Показано, что *Clostridium perfringens* является возбудителем раневых инфекций, вызывая заболевание в тех случаях, когда проникает в раны. Эмфизематозный миозит (газовая гангрена) был диагностирован у дельфинов и

других китообразных [2]. Инфекция может проникать в местах инъекций [3]. В [4] описан случай гибели самки атлантического бутылконосого дельфина вследствие клостридиального миозита, развившегося после укусов самца. У человека *C. perfringens* вызывает три типа поражений – пищевые токсикоинфекции (энтеротоксемия), некротический энтерит и газовую гангрену (анаэробный сепсис).

Наличие этого микроорганизма обнаруживают и в некоторых пищевых продуктах, но уже как возможного возбудителя отравлений. Заболевания человека чаще связаны с *C. perfringens* типа А, который продуцирует α -токсин (газовая гангрена, пищевое отравление), и изредка – с типом С (некротизи-

рующий энтероколит). В целом понятие «токсин» у *C. perfringens* довольно расплывчато. Оно объединяет не менее 14 факторов с летальной и гистолитической активностью.

В РФ количественный учет сульфитредуцирующих клостридий предусмотрен при исследованиях почвы, лечебных грязей, питьевой воды, источников централизованного хозяйственно-питьевого водоснабжения и открытых водоемов. Их обнаружение свидетельствует о некогда имевшем место фекальном загрязнении, так как споры позволяют им длительно сохраняться в окружающей среде, в частности, они вегетируют в почве, богатой гумусом [5]. Поскольку сульфитредуцирующие клостридии при благоприятных условиях способны размножаться в окружающей среде (особенно в почве), их ценность как показателя фекального загрязнения не всегда очевидна. Однако высокая устойчивость спор к агрессивным воздействиям внешней среды, в том числе к дезинфицирующим и стерилизующим процедурам, делает споры важным технологическим показателем, позволяющим оценить качество обеззараживания воды [6].

Цель исследования – определение роли сульфитредуцирующих клостридий в патогенезе заболеваний у рыб с бактериальной и невыясненной этиологией; выявление спорных и вегетативных форм клостридий в воде и микрофлоре здоровых рыб; идентификация выделенных штаммов.

Объектами настоящего исследования выбраны промысловые рыбы 3 видов (тарань, бычок-сирман,

черноморская камбала-калкан), у которых зарегистрированы заболевания.

Материал и методы

За период 2009–2014 гг. выявлены случаи заболевания рыб в Таганрогском заливе у бычка-сирмана и тарани, в Черном море – у камбалы-калкан. Для диагностики возбудителей бактериальных инфекций использовали методы, принятые в микробиологии [5].

Для микробиологических посевов взяты 615 экз. рыб (клинически здоровых и с язвенным поражением кожи) и 43 пробы воды. У рыб исследовали печень, участок отдела кишечника с содержимым, жабры, мышечную ткань и кровь; у больных особей дополнительно выполняли посев из кожных язв. Образцы отбирали с соблюдением правил асептики, исключающих микробное загрязнение из окружающей среды.

Метод определения сульфитредуцирующих клостридий основан на выращивании посевов в железосульфитном агаре и среде Вильсон – Блер. При росте в селективных средах образуются типичные, окрашенные в черный цвет колонии (трансформация сульфита до сульфида) [7]. Этот признак используется для выявления данной группы микроорганизмов. Считается, что способностью редуцировать сульфиты обладают только спорные анаэробы кишечного происхождения. Данное обстоятельство позволило выделить эту группу микроорганизмов как санитарно-показательную (таблица) [6].

Санитарный показатель как группа санитарно-показательных микроорганизмов

Санитарно-показательный микроорганизм	Группа (показатель)	Другие микроорганизмы, потенциально входящие в группу
<i>Clostridium perfringens</i>	Споры сульфитредуцирующих клостридий	<i>C. sporogenes</i> , <i>C. barati</i> , <i>C. bifermentans</i> и др.

Выделение и дифференциация *C. perfringens* от других клостридий проведены на модифицированной среде Дункана – Стронга. Принадлежность выделенных клостридий определяли по их морфологии, культуральным, биохимическим (энтеритный тест, изучение подвижности, ферментации лактозы, разжижение желатина, редукции нитратов, определение каталазы и липолитической активности) и другим признакам, присущим каждому виду [7]. У всех выделенных штаммов анализировали факторы патогенности: протеазу, лецитиназу и гемолизин [5]. Гемолитическую активность определяли по наличию зон просветления на 5%-м кровяном агаре, лецитиназу – по зоне опалесценции вокруг колоний на желточном агаре, протеолитическую – по разжижению желатина, а также по образованию продуктов разложения белка: индола, сероводорода, аммиака. При образовании индола бумага, пропитанная насыщенным раствором щавелевой кислоты, приобретала розовый цвет; в присутствии сероводорода бумага, пропитанная ацетатом свинца, чернела; при образовании аммиака красная лакмусовая бумага синела.

Споры сульфитредуцирующих клостридий определяли методом прямого посева нормированного объема воды (по 20 мл). Для количественного учета спор в органах и тканях рыб применяли посев 1 г исследуемого образца (или его разведения). Пробы прогревали на водяной бане при $(75 \pm 5)^\circ\text{C}$ в течение 15 мин и заливали средой [5, 8]. Для определения клостридий посевы заливали расплавленной и охлажденной средой до $45 (\pm 1)^\circ\text{C}$. Пробирки опускали в емкости с холодной водой для создания анаэробных условий в толще агара. Посевы инкубировали при температуре 37 и 44°C в течение 18–24 ч с последующим учетом колоний. Результаты анализа выражали числом КОЕ (колониеобразующие единицы) в 1 г или 20 мл.

Результаты исследования

В восточной части Таганрогского залива регистрировали заболевания, вызванные условно-патогенными бактериями, – вибриоз (2011 г.) у бычка-сирмана *Gobius syrman* (рис. 1а) и бактериальную ге-

моррагическую септицемию (2014 г.) у тарани *Rutilus heckelii* (рис. 1б). Для заболеваний была характерна весенне-летняя сезонность.

Клиническая картина характеризовалась покраснением у основания плавников, жаберных крышек и кровоизлияниями на них. У рыб отмечали язвы и припухлости красного цвета на различных участках кожи, иногда с некротическим распадом. При вскрытии наблюдали патологические изменения печени, геморрагическое воспаление почек и кишечника. В каждом случае из содержимого кожных язв кроме возбудителей заболевания выделяли *C. perfringens* и *C. sporogenes*. В печени инфицированных бычков клостридии регистрировали незначительным числом изолятов, у клинически здоровых рыб они отсутствовали. Важно отметить, что выделенные штаммы *C. perfringens* продуцировали лецитиназу, которая вызывает коагуляционный и колликвационный некрозы здоровой ткани. На кровяном агаре колонии были окружены зоной гемолиза. Изоляты *C. sporogenes* обладали ярко выраженными протеолитическими свойствами, вызывая протеолиз молока и разжижение желатина.

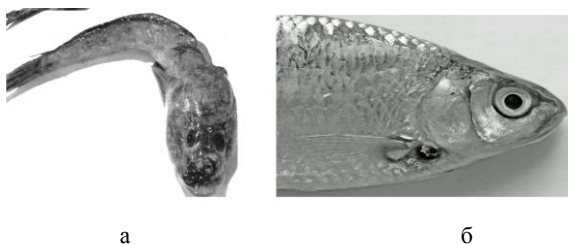


Рис. 1. Язвенные поражения кожи у рыб:
а – бычка-сирмана; б – у тарани

Особое значение имеет выделение спор из жаберной ткани (до 10^3 КОЕ/г) и кишечника (10^2 – 10^4 КОЕ/г) клинически здоровых рыб. В контаминации жабр азовских рыб отмечено два максимума – весенний и летне-осенний. Весенний подъем численности спор совпадал с паводком. Летне-осенний максимум (ав-

густ–сентябрь) обусловлен повышением температуры воды и обогащением водоема органическим веществом. Такая тенденция выявлена для жабр донских рыб с наиболее высокими значениями их численности (10^3 – 10^4 КОЕ/г) и выделением вегетативных форм при интенсивном антропогенном воздействии, в частности, фекальном загрязнении Нижнего Дона [9]. Учитывая тот факт, что тарань и бычок-сирман отловлены на разных участках Таганрогского залива и в разное время, а контаминация клостридиями не имела клинических последствий, можно судить только о характере бактериального загрязнения воды. Ведь для поддержания жизнедеятельности рыбам необходимо пропускать через жаберный аппарат и кишечный тракт большое количество воды, и микрофлора этих органов и всего организма в целом формируется под воздействием микрофлоры воды [1].

По вопросу обнаружения клостридий в желудочно-кишечном тракте рыб имеются сведения о видах *C. sporogenes*, *C. bifermentas*, *C. botulinum*. В то же время представители индигенной флоры кишечника – это фактор риска для рыб с ослабленным иммунно-физиологическим статусом, и данные микроорганизмы могут стать источником эндогенной инфекции. Способность бактерий интенсивно размножаться в кишечнике ослабленных особей нередко приводит к бактериальной транслокации с развитием системной бактериемии [10]. Исследования показали, что в кишечниках азовских бычков с признаками вздутия и кровянистыми выделениями отмечался высокий уровень вегетативных клеток клостридий с факторами патогенности (10^6 – 10^8 КОЕ/г). Это не исключает на фоне вибриоза клостридиальную патологию кишечника, вызванную повреждением *C. perfringens* слизистой оболочки.

Особое значение для экологической безопасности прибрежной зоны имеют споры сульфитредуцирующих клостридий, которые независимо от сезонов года (весна–осень) являлись постоянным компонентом микрофлоры в пробах воды, отобранных на всех станциях в различных районах Таганрогского залива (рис. 2).

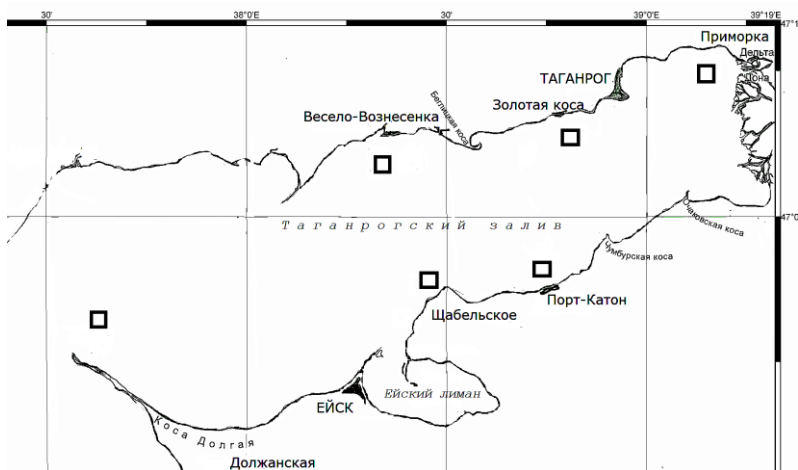


Рис. 2. Схема станций отбора проб воды и рыбы в Таганрогском заливе

Споры имеют высокую устойчивость в окружающей среде, поэтому их обнаружение в воде (рис. 3а) может свидетельствовать о давнем фекальном загрязнении. Биохимическими тестами показана способность выделенных штаммов *C. perfringens*, *C. sporo-*

genes к продукции сероводорода и аммиака. Клостридии, обладая мощной ферментативной активностью и благодаря энергичному газообразованию, разрывают питательные среды (рис. 3б).

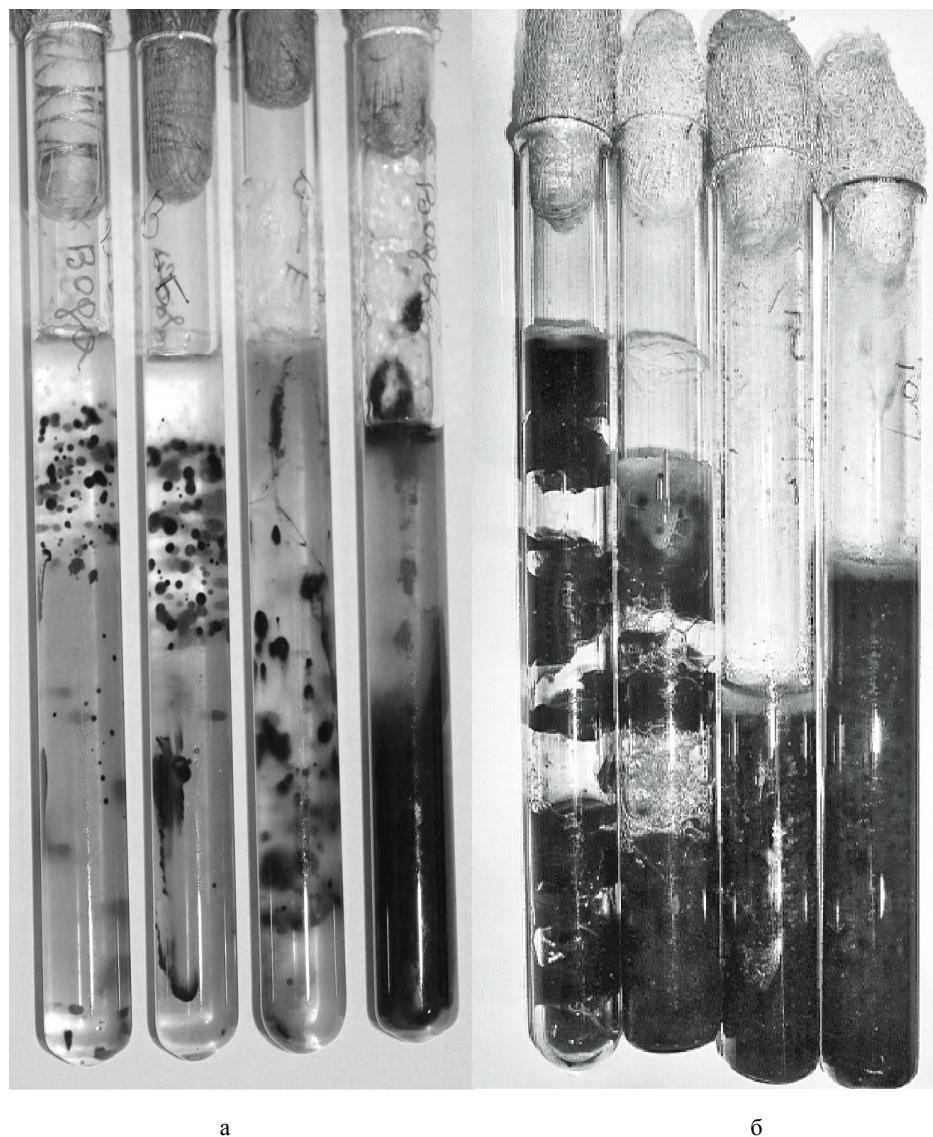


Рис. 3. Культуры сульфитредуцирующих клостридий на среде Вильсон – Блер: а – колонии клостридий из пробы воды; б – слева – 2 пробирки *C. perfringens*, справа – *C. sporogenes*

Исследования черноморской камбалы-калкан *Scophthalmus maeoticus maeoticus* из шельфовой зоны северо-восточной части Черного моря выявили случаи регулярного заболевания неизвестной этиологии на данной акватории. Болезнь характеризовалась кожными патологиями – язвами (рис. 4а) и новообразованиями (рис. 4б).

Обнаружение язвенных и опухолевых поражений кожи у нерестящегося черноморского калкана неоднократно отмечается промысловой статистикой при использовании как активных (тралы), так и пассивных (ставные сети) орудий лова [11].

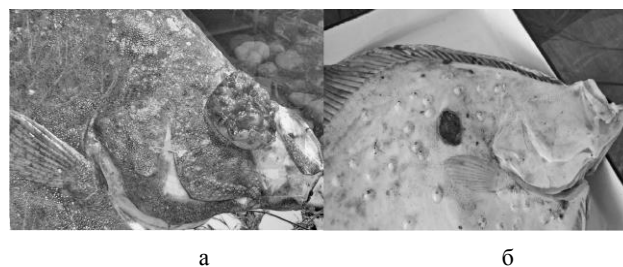


Рис. 4. Патологические изменения кожи калкана: а – изъязвление на слепой стороне тела; б – папиллома в области головы

Изменение условий среды существенно влияет на биологические показатели у представителей этого вида и подверженность его заболеваниям [12]. Язвы и опухолевые кожные новообразования часто отмечают у рыб в зоне сброса токсических отходов предприятий, а также при отклонении от нормативов в условиях индустриального выращивания. Вопросы же этиологии и диагностики заболевания у черноморского калкана требуют дальнейшего изучения. Оценке микробного фактора в развитии патологии всегда уделяется большое внимание. Несомненно, вид, количество микроорганизмов, их патогенные свойства играют существенную роль в возникновении осложнений болезни и во многом определяют характер ее течения. У калкана с

язвами и новообразованиями (изъязвленными и неизъязвленными) из разных станций отбора (рис. 5) были выделены микробные ассоциации условно-патогенных бактерий – *Pseudomonas fluorescens*, *Vibrio parahaemolyticus*, *Vibrio sp.*, которые инфицировали кровь и печень [11]. Показано, что через раневую поверхность в организм могут проникать *C. perfringens*, приводя к септицемии. У рыб с язвами и изъязвленными новообразованиями инфицированными *C. perfringens* оказались кровь и печень, в то время как у особей с патологическими изменениями кожи, но с неповрежденными покровами клостридии отсутствовали. Следует отметить, что в случаях присоединения анаэробной инфекции излечение организма невозможно.

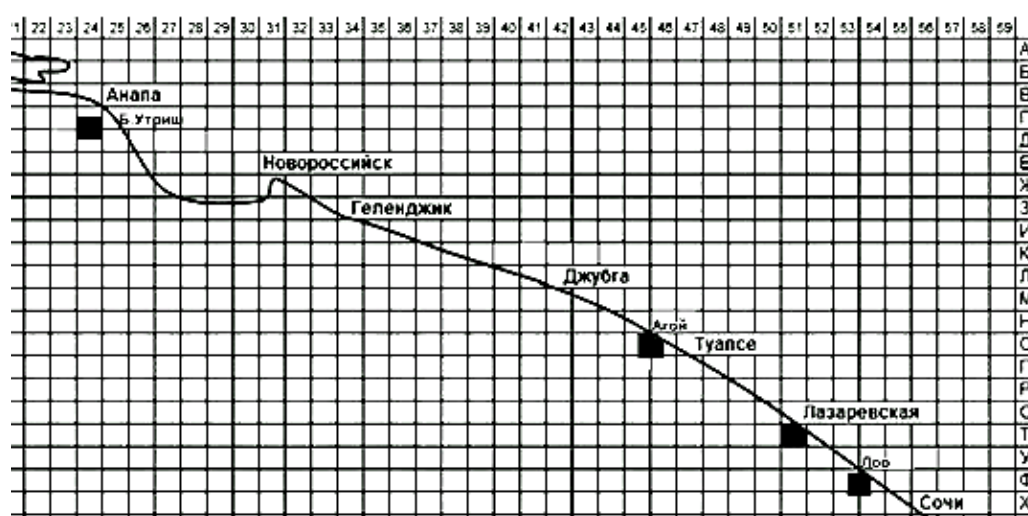


Рис. 5. Схема отбора проб воды и черноморского калкана в районах Большой Утриш – Лоо

Именно донные рыбы наиболее сильно подвержены загрязнению бактериями, которые могут аккумулироваться в тканях. Постоянно присутствуя в сточных водах и различных отложениях почвы, споры смываются дождевыми потоками и тальными водами в водоемы и сохраняются в придонных осадках. Они сохраняются не только в виде спор, но и активно вегетируют при повышении температуры. Усиление органического загрязнения будет способствовать протеолизу и аммонификации клостридий, что в конечном итоге приведет к образованию большого количества сероводорода и аммиака. Вымывание бактерий из грунтов в воду приводит к обсеменению ими жабр. Показано, что численность спор на жабрах калкана была в пределах от 10 до 100 КОЕ/г, но при этом споры часто отсутствовали в воде в районах его промысла.

В работах [13, 14] обнаружено и описано симбатное возрастание концентрации сероводорода и метана в донных отложениях зон антропогенного воздействия морских и пресноводных водоемов и водотоков. Этот феномен впервые [13, 14] был объяснен наличием на участках загрязнения сточными водами большого количества лабильного органического вещества и субстратов для бактерий – метаногенов и сульфат-

редукторов, а также тем, что здесь имеет место развитие альтернативных процессов генерации восстановленных газов, которые контролируются не ингибирующими друг друга бактериальными консорциумами. Это прежде всего процесс образования сероводорода с участием гнилостных бактерий и гидролиз древесины, затопленной на некоторых участках исследованных акваторий [15]. При анализе роли сульфатной редукции и других альтернативных процессов генерации сероводорода в работе [16, 17] высказано предположение, что в водоемах и водотоках с сульфидным заражением донных отложений определенный вклад может вносить генерация сероводорода и (не только его) сульфитредуцирующими клостридиями. Это реально, поскольку большинство водных объектов, в том числе и бальнеологического назначения, находится в зоне прямого или косвенного антропогенного влияния. В настоящем исследовании экспериментальным путем *in vitro* показана возможность образования этих газов (рис. 3б).

Заключение

Таким образом, на основании проведенных исследований можно заключить, что сульфитредуцирующие клостридии (*Clostridium perfringens*, *C. sporogenes*) вовлекаются в раневые процессы и представляют проблему как возбудитель вторичной инфекции у рыб. Наиболее сильно этому подвержены черноморский калкан и бычок-сирман, что обусловлено экологией самих рыб, приуроченных к донному биотопу. Показано, что анаэробная бактериемия нередко развивалась на фоне вибриоза у бычка-сирмана (восточная часть Таганрогского залива) и язвенных поражений кожи у калкана (Черное море). Встречаемость *C. perfringens*, *C. sporogenes* в микробных ассоциациях кожных язв регистрировали у тарани из восточной части Таганрогского залива. Причем споры сульфитредуцирующих клостридий, независимо от сезонов года (весна–осень), являлись постоянным компонентом водной микрофлоры. Хотя споры и обнаруживали на жабрах, в кишечнике клинически здоровых рыб, но эпизоотического значения они не имели. С теоретической и прикладной точки зрения важно также доказательство возможности образования сероводорода с участием сульфитредуцирующих клостридий, что позволяет по-новому осмыслить метаболический цикл сероводорода в сульфидных лечебных грязях и донных отложениях морских и пресноводных экосистем, находящихся в зоне антропогенного влияния.

Литература

1. Ларцева Л.В., Пивоваров Ю.П. Экологическая эпидемиология. Астрахань, 2007. 187 с.
2. Dunn J.L. Bacterial and mycotic diseases of cetaceans and pinnipeds // Handbook of marine mammals medicine: health, disease and rehabilitation. Boca Raton, 1990. P. 73–96.
3. Greenwood A.G., Taylor D.C. Clostridial myositis in marine mammals // Vet. Rec. 1978. Vol. 103, № 3. P. 54–55.
4. Buck J.D., Shepard L.L., Spott S. Clostridium perfringens as a cause of death of a captive Atlantic bottlenose dolphin (*Tursiops truncatus*) // J. Wildl. Dis. 1987. № 23. P. 488.
5. Руководство по медицинской микробиологии. Общая и санитарная микробиология / под ред. А.С. Лабинской, Е. Г. Волиной. М., 2008. 1080 с.
6. Тымчук С.Н., Ларин В.Е., Соколов Д.М. Наиболее значимые санитарно-микробиологические показатели оценки качества питьевой воды // Водоснабжение и санитарная техника. 2013. № 11. С. 8–14.
7. ГОСТ 10444.9-88. Продукты пищевые. Метод определения *Clostridium perfringens*. М., 2010.
8. ГОСТ 29185-91. Продукты пищевые. Методы выявления и определения количества сульфитредуцирующих клостридий. М., 2010.
9. Морозова М.А., Ларцева Л.В. Микробные сообщества гидрозкосистемы Нижнего Дона и Таганрогского залива // Фундаментальные и прикладные исследования. Естеств. науки. 2012. № 2. С. 50–56.
10. Симчук Г.В., Зубаченко В.Л., Омельченко С.О. Оценка микробного загрязнения морской воды и массовых видов рыб прибрежной части Черного и Азовского морей // Вісн. Одес. нац. ун-та. 2005. Т. 10, вып. 7. С. 201–207.
11. Бойко Н.Е., Стрижакова Т.В., Рудницкая О.А., Ружинская Л.П., Морозова М.А. Материалы к характеристике функционального состояния черноморского калкана *Scophthalmus maeoticus maeoticus* в нерестовый период 2009–2010 гг. // Вопросы рыболовства. 2013. Т. 14, № 2 (54). С. 272–282.
12. Гиригосов В.Е., Ханайченко А.Н., Ельников Д.Е. Характер и причины изменчивости основных показателей состояния нерестовой популяции черноморской камбалы-калкан на юго-западном шельфе Крыма // Современные проблемы Азово-Черноморского региона: материалы III Междунар. конф. Керчь, 2007. С. 3–9.
13. Федоров Ю.А., Тамбиева Н.С., Гарькуша Д.Н., Хорошевская В.О., Кизицкий Р.М. Теоретические аспекты связи метаногенеза с загрязнением воды и донных отложений веществами неорганической и органической природы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2000. № 4. С. 68–73.
14. Гарькуша Д.Н., Федоров Ю.А. Метан в устьевой области реки Дон. Ростов н/Д.; М., 2010. 181 с.
15. Федоров Ю.А. Стабильные изотопы и эволюция гидросферы. М., 1999. 370 с.
16. Gar'kusha D.N., Fedorov Y.A. Methane in the water and bottom sediments of the mouth area of the Severnaya Dvina River during the winter time // Oceanology. 2014. Vol. 54, № 2. P. 160–169.
17. Федоров Ю.А., Гарькуша Д.Н., Доценко И.В., Афанасьев К.А. Метан и сероводород в лечебных сульфидных грязях (на примере озера Большой Тамбукан) // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2014. № 3. С. 102–109.

References

1. Lartseva L.V., Pivovarov Yu.P. *Ekologicheskaya epidemiologiya* [Environmental epidemiology]. Astrakhan, 2007, 187 p.
2. Dunn J.L. Bacterial and mycotic diseases of cetaceans and pinnipeds. *Handbook of marine mammals medicine: health, disease and rehabilitation*. Boca Raton, 1990, pp. 73–96.
3. Greenwood A.G., Taylor D.C. Clostridial myositis in marine mammals. *Veterinary Record*, 1978, vol. 103, no 3, pp. 54–55.
4. Buck J.D., Shepard L.L., Spotte S. Clostridium perfringens as the cause of death of a captive Atlantic bottlenosed dolphin (*Tursiops truncatus*). *J. Wildl. Dis.*, 1987, vol. 23, no 3, pp. 488–491.
5. *Rukovodstvo po meditsinskoi mikrobiologii. Obshchaya sanitarnaya mikrobiologiya* [Manual of medical microbiology. General sanitary microbiology]. Eds. A.S. Labinskaya, E.G. Volina. Moscow, 2008, 1108 p.
6. Tymchuk S.N., Larin V.E., Sokolov D.M. Naibolee znachimye sanitarno-mikrobiologicheskie pokazateli otsenki kachestva pit'voi vody [The most important sanitary-microbiological indicators of drinking water quality]. *Vodosnabzhenie i sanitarnaya tekhnika*, 2013, no 11, pp. 8–15.

7. GOST 10444.9-88. *Produkty pishchevye. Metod opredeleniya Clostridium perfringens* [GOST 10444.9-88. Food products. Method for determination of Clostridium perfringens]. Moscow, 2010.
8. GOST 29185-91. *Produkty pishchevye. Metody vyyavleniya i opredeleniya kolichestva sul'fitredutsiruyushchikh klostridii* [GOST 29185-91. Food products. Methods for detection and quantification of sulfite-reducing clostridia]. Moscow, 2010.
9. Morozova M.A., Lartseva L.V. Mikrobyne soobshchestva gidroekosistemy Nizhnego Dona i Taganrogskogo zaliva [Hydroecosystems microbial communities of the Lower Don and Taganrog Bay]. *Fundamental'nye i prikladnye issledovaniya. Estestvennye nauki*. 2012, no 2, pp. 50-56.
10. Simchuk G.V., Zubachenko V.L., Omel'chenko S.O. Otsenka mikrobnogo zagryazneniya morskoi vody i massovykh vidov ryb pribrezhnoi chasti Chernogo i Azovskogo morei [Evaluation of microbial contamination of sea water and mass fish species of the coastal part of the Black and Azov Seas]. *Vestnik Odesskogo natsional'nogo universiteta*, 2005, vol. 10, no 7, pp. 201-207.
11. Boiko N.E., Strizhakova T.V., Rudnitskaya O.A., Ruzhinskaya L.P., Morozova M.A. Materialy k kharakteristike funktsional'nogo sostoyaniya chernomorskogo kalkana *Scophthalmus maeoticus maeoticus* v nerestovyi period 2009-2010 gg. [Materials for the characterization of the functional state of the Black Sea turbot *Scophthalmus maeoticus maeoticus* during the spawning period of 2009-2010]. *Voprosy rybolovstva*, 2013, vol. 14, no 2 (54), pp. 272-282.
12. Giragosov V.E., Khanaichenko A.N., El'nikov D.V. Kharakter i prichiny izmenchivosti osnovnykh pokazatelei so-
toyaniya nerestovoi populyatsii chernomorskoj kambaly kalkan na yugo-zapadnom shel'fe Kryma [Nature and causes of variability in the main indicators of the spawning population of the Black Sea turbot flatfish in the South-Western shelf of Crimea]. *Sovremennye problemy ekologii Azovo-Chernomorskogo regiona: materialy III Mezhdunar. konf. Kerch*, 2008, pp. 3-9.
13. Fedorov Yu.A., Tambieva N.S., Gar'kusha D.N., Khoro-shevskaya V.O., Kizitskii P.M. Teoreticheskie aspekty svyazi metanogeneza s zagryazneniem vody i donnykh otlozhenii veshchestvami neorganicheskoi i organicheskoi prirody [Theoretical aspects of communication methanogenesis water pollution and sediment inorganic and organic nature]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2000, no 4, pp. 68-73.
14. Gar'kusha D.N., Fedorov Yu.A. *Metan v ust'evoi oblasti reki Don* [Methane in the mouth area of the river Don]. Rostov-on-Don; Moscow, 2010, 181 p.
15. Fedorov Yu.A. *Stabil'nye izotopy i evolyutsiya gidrosfery* [Stable isotopes and the evolution of the hydrosphere]. Moscow, 1999, 370 p.
16. Garkusha D.N., Fedorov Y.A. Methane in the water and bottom sediments of the mouth area of the Severnaya Dvina River during the winter time. *Oceanology*, 2014, vol. 54, no 2, pp. 160-169.
17. Fedorov Yu.A., Gar'kusha D.N., Dotsenko I.V., Afanas'ev K.A. Metan i serovodorod v lechebnykh sul'fidnykh gryazyakh (na primere ozera Bol'shoi Tambukan) [Methane and hydrogen sulfide in the sulfide mud treatment (for example, Great Lakes Tambukan)]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2014, no 3, pp. 102-109.

УДК 581.91 (471.61)

О НОВЫХ НАХОДКАХ *GALIUM VOLHYNICUM* POBED. И *CYMBOCHASMA BORYSTHENICA* (PALL. EX SCHLECHT.) KLOK. & ZOZ В РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ

© 2015 г. А.Н. Шмараева, Ж.Н. Шишлова, В.В. Федяева

Шмараева Антонина Николаевна – научный сотрудник, Ботанический сад Южного федерального университета, пер. Ботанический спуск, 7, г. Ростов-на-Дону, 344041, e-mail: anshmaraeva@sfedu.ru

Шишлова Жанна Николаевна – старший научный сотрудник, Ботанический сад Южного федерального университета, пер. Ботанический спуск, 7, г. Ростов-на-Дону, 344041, e-mail: shishlova@sfedu.ru

Федяева Валентина Васильевна – кандидат биологических наук, доцент, заведующая кафедрой ботаники, Академия биологии и биотехнологии им. Д.И. Иванковского Южного федерального университета, ул. Большая Садовая, 105/42, г. Ростов-на-Дону, 344006, e-mail: vfedyeva@gmail.com

Shmaraeva Antonina Nikolaevna – Researcher, Botanical Garden of the Southern Federal University, Botanical Descent, 7, Rostov-on-Don, 344041, Russia, e-mail: anshmaraeva@sfedu.ru

Shishlova Zhanna Nikolaevna – Senior Researcher, Botanical Garden of the Southern Federal University, Botanical Descent, 7, Rostov-on-Don, 344041, Russia, e-mail: shishlova@sfedu.ru

Fedyeva Valentina Vasilievna – Candidate of Biological Science, Associate Professor, Head of Department of Botany, Ivanovsky Academy of Biology and Biotechnology of the Southern Federal University, Bolshaya Sadovaya St., 105/42, Rostov-on-Don, 344006, Russia, e-mail: vfedyeva@gmail.com

Приводятся новые сведения о распространении в Ростовской области двух эндемичных видов растений – *Galium volhynicum* Pobed. и *Cymbachasma borysthenica* (Pall. ex Schlecht.) Klok. & Zoz. Указываются новые местонахождения ценопопуляций этих видов, условия их обитания, численность, площадь, возрастной состав и др. *Galium volhynicum* – новый вид для РФ, ранее приводился только для Украины и Молдавии. Впервые зарегистрирован в 2012 г. на территории памятника природы «Разнотравно-типчаково-ковыльная степь» в Зерноградском районе. *Cymbachasma borysthenica* – охраняемый вид Ростовской области и РФ, новое местонахождение которого выявлено на северном побережье Миусского лимана.

Ключевые слова: флора, Ростовская область, Красная книга, новое местонахождение, эндемик, *Galium volhynicum* Pobed., *Cymbachasma borysthenica* (Pall. ex Schlecht.) Klok. & Zoz, ценопопуляция, памятник природы, Миусский лиман.

New data on distribution in the Rostov Region of two endemic plant species – *Galium volhynicum* Pobed. and *Cymbachasma borysthenica* (Pall. ex Schlecht.) Klok. & Zoz. are presented. New locations of cenopopulations of these species, conditions of their dwelling, number, area, age structure and etc. are specified. *Galium volhynicum* – new species for the Russian Federation, referred earlier only for Ukraine and Moldova. It was registered for the first time in 2012 on the territory of a nature sanctuary «Steppe Forb Fescue Feather Glass» in Zernograd District. *Cymbachasma borysthenica* is a protected species of the Rostov Region and the Russian Federation, which new location revealed on the northern coast of Mius estuary.

Keywords: flora, Rostov Region, Red Book, new location, endemic, *Galium volhynicum* Pobed., *Cymbachasma borysthenica* (Pall. ex Schlecht.) Klok. & Zoz, cenopopulation, nature sanctuary, Mius estuary.

Эта статья продолжает ряд публикаций [1–5], дополняющих «Флору Нижнего Дона» [6] – основную флористическую сводку по территории нижнедонского региона, охватывающего степную часть донского бассейна в пределах Ростовской и Волгоградской областей. По последним опубликованным данным флора Нижнего Дона насчитывает 1982 вида сосудистых растений. В статье содержатся новые сведения о распространении в Ростовской области двух редких причерноморских эндемиков – *Galium volhynicum* Pobed. и *Cymbachasma borysthenica* (Pall. ex Schlecht.) Klok.

& Zoz, полученные в результате полевых ботанических исследований за последние годы. Приведенные в статье новые местонахождения видов документированы сборами, которые хранятся в научных фондах гербариев Ботанического сада (RWBG) и кафедры ботаники ЮФУ (RV).

Galium volhynicum Pobed. (*Asperula tyraica* Bess.) – подмаренник волынский, вероятно, новый для России вид, так как «Флорой европейской части СССР» [7] приводится только для Украины (Львовская, Закарпатская, Ивано-Франковская, Терно-

польская, Черновицкая, Донецкая, Одесская области) и Молдавии. Он растёт также на Черноморском побережье в Болгарии [8]. Этот редкий причерноморский дизъюнктивный степной эндемичный вид внесен в Красные книги Донецкой [9] и Тернопольской областей [10], а также Красную книгу Приазовского региона [11].

В Ростовской области *Galium volhynicum* (рис. 1) впервые отмечен 22.05.2012 г. при инвентаризации флоры памятника природы «Разнотравно-типчакково-ковыльная степь», который расположен в вер-

ховьях балки Василевской в 4 км юго-восточнее хут. Заполосного в зерноградском р-не на территории так называемой Заполосной степи. Он создан в 1992 г. и занимает площадь 259 га. Балка Василевская является правым отрогом верховий балки Казачий Хомутец, принадлежащей левобережной системе долины Западного Маныча, на протяжении плейстоцена неоднократно служившей морским проливом, соединявшим бассейны Чёрного и Каспийского морей.



Рис. 1. Цветение подмаренника волынского в балке Василевской. 22.05.2012 г.

Растительность балки Василевской относится к обеднённому варианту приазовской разнотравно-типчакково-ковыльной степи. По сравнению с другими степями приазовского типа Заполосная степь, описанная ранее А.П. Балашом [12], отличается более ксерофильным характером растительности, обеднённым видовым составом и пониженной видовой насыщенностью. По результатам первичной инвентаризации (2012, 2013 гг.) флора памятника природы насчитывает 291 вид сосудистых растений, в том числе 13 охраняемых видов Ростовской обл. [13]: *Astragalus ponticus* Pall., **Bellevia sarmatica* (Pall. ex Georgi) Woronow, **Calophaca wolgarica* (L. f.) DC., *Caragana scythica* (Kom.) Pojark., *Centaurea talievii* Kleop., *Crambe pinnatifida* R. Br., *C. tataria* Sebeok, *Crocus reticulatus* Stev. ex Adam, **Eriosynaphe longifolia* (Fisch. ex Spreng.) DC., **Iris pumila* L., **Stipa pulcherrima* K. Koch, **S. ucrainica* P. Smirn, **Tulipa schrenkii* Regel, 7 из которых (отмечены *) включены в Красную книгу РФ [14]. Особую соэкологическую ценность памятнику природы придают находящиеся на его территории крупные ценопопуляции *Calophaca wolgarica*, *Astragalus ponticus*, *Crambe pinnatifida*, причем два последних вида из-

вестны в Ростовской области из немногих местонахождений.

Ценопопуляция *Galium volhynicum* обитает в приводораздельной части пологого склона правого борта балки Василевской в составе ассоциации: *Stipa ucrainica* + *S. lessingiana* + *S. pulcherrima* + *Galatella villosa* + разнотравье на слабосмытом южном черноземе. Вертикальная структура сообщества трёхъярусная. Первый ярус (до 120 см) образован *Astragalus ponticus*, *Jurinea arachnoidea* Bunge, *Otites densiflora* (D'Urv.) Grossh., *Stachys atherocalyx* C. Koch, *Thalictrum minus* L. и др.; второй (до 60 см) – *Linum austriacum* L., *Stipa ucrainica*, *S. pulcherrima*, *Galium volhynicum*, *G. octonarium* (Klok.) Soó, *Phlomis pungens* Willd., *Verbascum phoeniceum* L. и др.; третий (до 40 см) – *Festuca valesiaca* Gaudin, *Euphorbia seguieriana* Neck., *Dianthus lanceolatus* Stev. ex Reichenb., *Iris pumila*, *Koeleria cristata* (L.) Pers., *Medicago romanica* Prod., *Achillea setacea* Waldst. & Kit. и др. Общее проективное покрытие растительного покрова – 85 %. Ценопопуляция подмаренника волынского имеет площадь около 0,1 га. В пределах ассоциации его особи распределены неравномерно, образуя местами скопления. На большей части территории обилие вида по-

шкале Друде составляет *sr* (в небольшом количестве, рассеянно), хотя местами оно достигает *cor2* (особей много). По визуальной оценке в возрастном составе ценопопуляции преобладают виргинильные и генеративные растения. Жизненность особей удовлетворительная. Высота растений в среднем составляет 48,3 (26÷67) см. Они имеют многочисленные прямостоячие или восходящие побеги, густо опушённые в нижних междоузлиях и узлах белыми волосками (рис. 2). Общее количество побегов на особь варьирует от 10

до 100 (в среднем 36,7) шт., из них 49,4 % приходится на долю генеративных побегов. Средние стеблевые листья генеративных побегов собраны в мутовки по 8÷9 (в среднем 8,8) шт.; их длина составляет 33,0÷38,0 (в среднем 35,3) мм, ширина – 1,3÷1,8 (в среднем 1,5) мм (рис. 2). Цветёт *Galium volhynicum* в мае – июне, семена созревают в июле, размножается преимущественно семенами.



Рис. 2. Часть генеративного побега подмаренника волынского. Балка Василевская, 22.05.2012 г.

Cymbophasma borysthena (Pall. ex Schlecht.) Klok. & Zoz – цимбохазма днепро́вская – охраняемый вид Ростовской обл., плиоценовый реликт, находящийся на территории области под угрозой исчезновения в силу крайне ограниченного числа местонахождений. Цимбохазма днепро́вская – восточнопричерноморский дизъюнктивный эндемик, ареал которого состоит из разобщённых участков в Северном Причерноморье; включен в Красную книгу РФ [14] и Украины [15].

В Ростовской области были известны три местонахождения этого вида, которые находятся в долине

р. Западный Маныч в Весёловском (окрестности хут. Казачего), Сальском (окрестности хут. Степной Курган) и Пролетарском (окрестности хут. Солёного) р-нах [13, 14] (рис. 3).

В 2014 г. была выявлена новая популяция *Cymbophasma borysthena*, расположенная на значительном удалении от известных. Новое местонахождение находится на северном побережье Миусского лимана вблизи хут. Калиновка Неклиновского р-на (рис. 3).

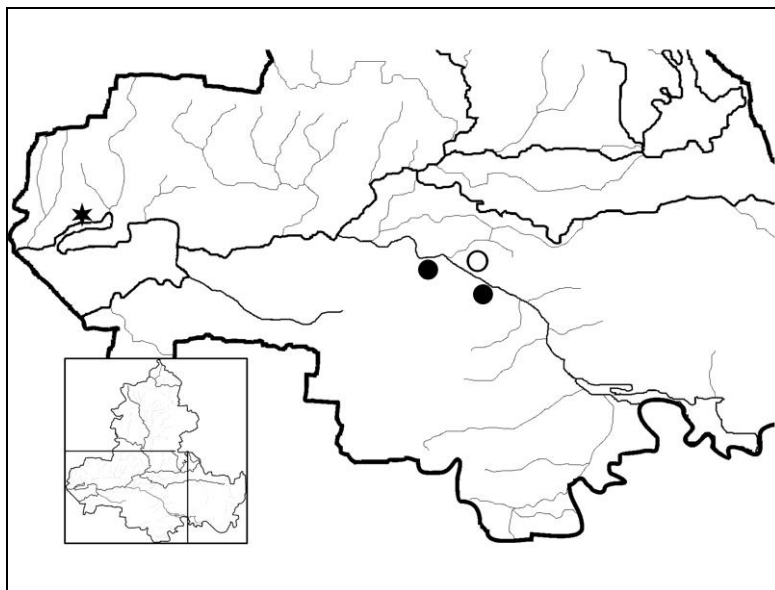


Рис. 3. Распространение цимбохазмы днепровской в Ростовской области: ★ – новое местонахождение;

● – известные местонахождения; ○ – возможно исчезнувшее местонахождение

Популяция цимбохазмы обитает на береговом крутом склоне южной экспозиции, известном засушливыми условиями, в составе каменистой степи и сообщества переходного типа от тимьянника к каменистой степи на маломощных щебневатых почвах, формирующихся на известняке-ракушечнике. Площадь

популяции составляет около 200 м². Она состоит из нескольких небольших скоплений особей. Общая численность популяции – более 1000 разновозрастных особей, в том числе 29 % генеративных, 56 – взрослых вегетативных и 15 – ювенильных (рис. 4).



Рис. 4. Цимбохазма днепровская на побережье Миусского лимана. 16.06.2014 г.

Жизненность особей удовлетворительная. У генеративных растений развиваются 11÷24 (в среднем 15,5) побегов, высота которых составляет 7,5÷15,5 (в среднем 10,8) см; диаметр парциальных кустов составляет 8,0÷20,0 (в среднем 12,1) см, при этом наибольшими размерами отличаются особи, обитающие вблизи зарослей кустарников, где более благоприятные условия увлажнения. Цветёт *Cymbochasma borysthena* в апреле – мае, плодоносит в июне, размножа-

ется семенами. Семенное размножение ослаблено. Данная популяция, несмотря на незначительную площадь, может быть оценена как достаточно стабильная, так как характеризуется полночленной возрастной структурой и способна к самоподдержанию, о чём свидетельствует наличие ювенильных растений.

Новое местонахождение *Cymbochasma borysthena* заполняет разрыв между украинской и маньчжурской частями ареала вида. Ближайшее местонахождение вида на Украине (окрестности с. Бабах-Гарама в Донецкой

области близ границы с Запорожской обл. [11]) также находится на территории, прилегающей к побережью Азовского моря, по прямой – на расстоянии около 120 км к юго-западу. В целом же, все известные местонахождения *Cymbachasma borysthenica* в Ростовской области чётко приурочены к береговым линиям плейстоценовых морских бассейнов.

Литература

1. Федяева В.В., Буркина Т.М., Шмараева А.Н., Шишлова Ж.Н., Сидорова О.М. Новые материалы к флоре Нижнего Дона // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 1998. № 4. С. 78–81.
2. Шмараева А.Н., Шишлова Ж.Н., Дорофеев В.И., Буркина Т.М. Новые материалы к флоре Нижнего Дона // Бот. журн. 2002. Т. 87, № 7. С. 118–123.
3. Шмараева А.Н., Федяева В.В., Дорофеев В.И., Шишлова Ж.Н. Флористические находки в Ростовской области // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2009. № 2. С. 101–105.
4. Федяева В.В., Шишлова Ж.Н., Шмараева А.Н. О распространении некоторых редких и исчезающих видов растений Ростовской области // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2010. № 1. С. 74–78.
5. Федяева В.В., Дзигунова Ю.В. Орхидные Ростовской области: распространение и проблемы охраны // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2013. № 1. С. 55–59.
6. Флора Нижнего Дона / под ред. Г.М. Зозулина, В.В. Федяевой. Ростов н/Д, 1984. Ч. I; 1985. Ч. II.
7. Флора европейской части СССР. Л., 1978. Т. III. С. 111.
8. Ančev M., Krendl F. *Galium* sect. *Leiogalium* (Rubiaceae) in the Bulgarian flora // Phytologia Balcanica. 2011. № 17 (3). P. 291–314.
9. Червона книга Донецкої області: Рослинний світ / під загальною ред. В.М. Остапко. Донецьк, 2010. 432 с.
10. URL: www.ecoternopil.gov.ua (дата обращения: 11.10.2014).
11. Красная книга Приазовского региона. Сосудистые растения / под ред. В.М. Остапко, В.П. Коломийчука. Киев, 2012. 276 с.
12. Балаш А.П. Заполосная степь (в Ростовской области) // Растительность и фауна Дона и Северного Кавказа в системе зональных биологических и научно-производственных разработок. Ростов н/Д, 1971. С. 5–17.
13. Красная книга Ростовской области. Растения и грибы. Изд. 2-е. Т. 2 / науч. ред. В.В. Федяева. Ростов н/Д, 2014. 344 с.
14. Красная книга Российской Федерации (растения и грибы). М., 2008. 855 с.
15. Червона книга України. Рослинний світ / за ред. Я.П. Дідуха. Київ, 2009. 912 с.

References

1. Fedyaeva V.V., Burkina T.M., Shmaraeva A.N., Shishlova Zh.N., Sidorova O.M. Novye materialy k flore Nizhnego Dona [New materials to the flora of the Lower Don]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 1998, no 4, pp. 78–81.
2. Shmaraeva A.N., Shishlova Zh.N., Dorofeev V.I., Burkina T.M. Novye materialy k flore Nizhnego Dona [New materials to the flora of the Lower Don]. *Bot. zhurn.*, 2002, vol. 87, no 7, pp. 118–123.
3. Shmaraeva A.N., Fedyaeva V.V., Dorofeev V.I., Shishlova Zh.N. Floristicheskie nakhodki v Rostovskoi oblasti [Floristic findings in the Rostov Region]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2009, no 2, pp. 101–105.
4. Fedyaeva V.V., Shishlova Zh.N., Shmaraeva A.N. O rasprostranenii nekotorykh redkikh i ischezayushchikh vidov rastenii Rostovskoi oblasti [On the propagation of some rare and endangered species of plants of the Rostov Region]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2010, no 1, pp. 74–78.
5. Fedyaeva V.V., Dzigunova Yu.V. Orkhidnye Rostovskoi oblasti: rasprostranenie i problemy okhrany [Orchids of the Rostov Region: distribution and conservation problems]. *Izv. vuzov. Sev.-Kavk. region. Estestv. nauki*, 2013, no 1, pp. 55–59.
6. *Flora Nizhnego Dona* [Flora of the Lower Don]. Eds. G.M. Zozulin, V.V. Fedyaeva. Rostov-on-Don, 1984, Ch. 1; 1985, Ch. 2.
7. *Flora Evropeiskoi chasti SSSR* [Flora of the European part of the USSR]. Leningrad, 1978, vol. 3, p. 111.
8. Ančev M., Krendl F. *Galium* sect. *Leiogalium* (Rubiaceae) in the Bulgarian flora. *Phytologia Balcanica*, 2011, no 17(3), pp. 291–314.
9. *Krasnaya kniga Donetskoi oblasti: rastitel'nyi mir* [The Red Book of the Donetsk region: flora]. Ed. V.M. Ostapko. Donetsk, 2009, 432 p.
10. Available at: www.ecoternopil.gov.ua (accessed 11.10.2014).
11. *Krasnaya kniga Priazovskogo regiona. Sosudistye rasteniya* [The Red Book of Azov Region. Vascular plants]. Eds. V.M. Ostapko, V.P. Kolomiichuk. Kiev, 2012, 276 p.
12. Balash A.P. Zapolosnaya step' (v Rostovskoi oblasti) [Zapolosnaya steppe (Rostov Region)]. *Rastitel'nost' i fauna Dona i Severnogo Kavkaza v sisteme zonal'nykh biologicheskikh i nauchno-proizvodstvennykh razrabotok*. Rostov-on-Don, 1971, pp 5–17.
13. *Krasnaya kniga Rostovskoi oblasti. Rasteniya i griby* [The Red Book of the Rostov region. Plants and fungi]. Edition 2. Vol. 2. Eds. V.V. Fedyaeva. Rostov-on-Don, 2014, 344 p.
14. *Krasnaya kniga Rossiiskoi Federatsii (rasteniya i griby)* [Red Data Book of the Russian Federation (plants and fungi)]. Moscow, 2008, 855 p.
15. *Krasnaya kniga Ukrainy. Rastitel'nyi mir* [The Red Book of Ukraine. Flora]. Eds. Ya.P. Didukh. Kiev, 2009, 912 p.

ЭКОЛОГИЯ

УДК 574.5.64

БИОЛОГИЧЕСКИЕ ПОДХОДЫ К ОЦЕНКЕ ЭКОТОКСИКОЛОГИЧЕСКОГО СОСТОЯНИЯ ВОДНЫХ ЭКОСИСТЕМ*

© 2015 г. Е.Н. Бакаева, А.М. Никаноров

Бакаева Елена Николаевна – доктор биологических наук, ведущий научный сотрудник, гидрохимический отдел, Институт водных проблем РАН, пр. Стачки, 198, г. Ростов-на-Дону, 344090; заведующая, филиал кафедры геоэкологии и прикладной геохимии, Институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090; ведущий научный сотрудник, Гидрохимический институт, пр. Стачки, 198, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: rotaria@mail.ru

Никаноров Анатолий Максимович – доктор геолого-минералогических наук, профессор, член-корреспондент РАН, заведующий, гидрохимический отдел, Институт водных проблем РАН, пр. Стачки, 198, г. Ростов-на-Дону, 344090; главный научный сотрудник, Гидрохимический институт, пр. Стачки, 198, г. Ростов-на-Дону, 344090; профессор, филиал кафедры геоэкологии и прикладной геохимии, Институт наук о Земле Южного федерального университета, ул. Зорге, 40, г. Ростов-на-Дону, 344090.

Bakaeva Elena Nikolaevna – Doctor of Biological Science, Leading Researcher, Hydrochemical Department, Institute of Water Problems RAS, Stachki Ave., 198, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Head, Branch of the Department of Environmental Geoscience and Applied Geochemistry, Institute of Earth Sciences of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Leading Researcher, Hydrochemical Institute, Stachki Ave., 198, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: rotaria@mail.ru

Nikanorov Anatolii Maksimovich – Doctor of Geological and Mineralogical Science, Professor, Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Head, Department of Hydrochemical Department, Institute of Water Problems RAS, Stachki Ave., 198, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Main Researcher, Hydrochemical Institute, Stachki Ave., 198, Rostov-on-Don, 344090, Russia; Professor, Branch of the Department of Environmental Geoscience and Applied Geochemistry, Institute of Earth Sciences of the Southern Federal University, Zorge St., 40, Rostov-on-Don, Russia, 344090.

Проведён обзор современного состояния методологической базы биологических методов (биоиндикация, биотестирование) для оценки токсичности вод, донных отложений и подходов к оценке экотоксикологического состояния водных экосистем. Обсуждён прикладной аспект применения методик биотестирования, закреплённых в нормативно-методических документах.

Ключевые слова: биотестирование, биоиндикация, токсичность, водные экосистемы, поверхностные воды, донные отложения, методики, нормативно-методические документы

The review of the current state of the methodological basis of biological methods (bioindication, bioassay) to assess the toxicity of water, sediment and ecotoxicological approaches to assessing the status of aquatic ecosystems. Applied discussed aspect of the application of the bioassay, enshrined in the regulatory and procedural documents.

Keywords: bioassay, bioindication, toxicity, aquatic ecosystems, surface water, sediment, techniques, regulatory and procedural documents.

Согласно Водному кодексу РФ 2006 г. [1], «воды являются важнейшим компонентом окружающей природной среды, возобновляемым, ограниченным и уязвимым природным ресурсом, они используются и охраняются в Российской Федерации как основа жизни и деятельности народов, проживающих на ее территории, обеспечивают экономическое, социальное, экологическое благополучие населения, существование животного и растительного мира». Однако в последние годы в биосфере сформировался комплекс проблем, в первую очередь трудно решаемых – эко-

логических. Особенно актуальна проблема чистой пресной воды, поскольку экологическое неблагополучие в значительной степени проявляется именно в гидросфере. В частности, проблемы питьевого водоснабжения, снижение органолептических свойств воды и рыбопродуктивности водоёмов связаны с процессами эвтрофикации и токсификации. Прогрессирующее ухудшение качества водной среды представляет угрозу жизненно важным национальным интересам страны в областях экологической, продовольственной и национальной безопасности.

*Исследования выполнены за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 14-17-00376).

Свойства поверхностных вод

Поверхностные воды обладают отличительным положительным свойством – это относительно быстрое самообновление их качества. Основопологающими характеристиками, определяющими специфику площади водосбора, поверхностного зеркала, водности, скорости течений, извилистости и др., являются географические, физико-морфологические особенности формирования водоемов и водотоков. Однако огромной «очистительной фабрикой», имеющей особое значение в формировании и обновлении качества вод, является биологический слой [2].

Существует целый ряд программ разного уровня по охране, очистке природных поверхностных водоемов и рациональному водопользованию. Европейская экологическая система пресной воды курируется панъевропейской программой «Пресная вода». Всемирный фонд живой природы (WWF) старается объединить мероприятия, проводимые в России и Европе, в партнерскую организацию по пяти основным направлениям: политика, охрана, управление, восстановление и уменьшение загрязнения окружающей среды. Основная сформулированная WWF цель – «сохранить и восстановить функции и целостность пресноводных экосистем ради всего живого» – едина для всех мировых программ. В последние годы определилась концепция необходимости перехода от усложненных и перегруженных информацией исследований к более продуктивным разработкам, направленным на выявление приоритетных принципов и механизмов, контролирующих функционирование экосистем, и поиску интегральных зависимостей [3].

При оценке качества поверхностных водоемов важно знать потенциал возможностей их самовосстановления. Только структурно-видовой состав ценозов водных экосистем может дать максимально достоверную информацию о качестве водной среды. И задача исследователя состоит в разработке соответствующих методических подходов.

Кажущаяся очевидной прямая зависимость «концентрация загрязняющих веществ – комфортность состояния гидробиоты» не подтверждается. Об этом свидетельствуют многочисленные попытки классифицировать качество среды по химическому составу, оказавшиеся несостоятельными. Этот «парадокс» объясняет утверждение В.И. Вернадского [4] о том, что «вся химия водоема больше всего меняется жизнью». Расширение сферы анализируемых ингредиентов не проясняет картину, а наоборот, усугубляет загруженность информацией. Попытки выявления корреляционных зависимостей и каких-либо репрезентативных взаимодействий пока не эффективны, особенно в тех случаях, когда анализируется объединенная информация по гидрохимическим, гидробиологическим и санитарно-гигиеническим параметрам.

Каждая экосистема находится в динамическом равновесии и, согласно принципу Ле Шателье – Брауна, старается сохранить гомеостаз, выдвигая одно из необходимых в данный момент звеньев на борьбу с

поступающим извне воздействием, в том числе загрязняющих веществ. Тем не менее очевидна потеря биологической полноценности воды под антропогенным прессингом. Об этом свидетельствуют неспособность воды быть средой обитания, продуктом питания и наличие негативных процессов в водных экосистемах. Обратимость или необратимость возникающих нарушений в состоянии экосистемы можно определить только по отклику гидробиоты.

Основные термины и понятия в экотоксикологии

Экологическая токсикология (экотоксикология) – раздел токсикологии, изучающий эффекты воздействия токсичных веществ на экосистемы и их круговорот в биосфере, в особенности в пищевых цепях. Экотоксикология является самой молодой из токсикологических дисциплин. Она изучает источники поступления токсикантов в природные биосистемы, токсические эффекты действия химических веществ на живые организмы, устойчивость и функционирование биосистем надорганизменного уровня в условиях их токсического загрязнения.

Согласно ГОСТу 17.1.1.01-77 [5], состояние водного объекта – характеристика водного объекта по совокупности его количественных и качественных показателей применительно к видам водопользования. Экологическое благополучие водного объекта – нормальное воспроизведение основных звеньев экологической системы водного объекта [5]. Звенья экологической системы водного объекта входят в основные компоненты водных экосистем. В толще воды звенья экосистемы представлены рядом ценозов – это бактериопланктон, фитопланктон, зоопланктон, ихтиопланктон, нектон, в донных отложениях – это зообентос, фитобентос, макрофиты, а также перифитон, представленный организмами-обрастателями из числа растительных и животных организмов.

Под понятием «качество воды» подразумевают характеристику состава и свойств воды, определяющую ее пригодность для конкретных видов водопользования [5], а также для жизни водных организмов. Токсичность окружающей среды – это токсичность, которой характеризуется проба, полученная из принимающей водной системы [6]. Таким образом, токсичность следует считать одной из характеристик качества воды [7], которая имеет первостепенное значение с точки зрения опасности для существования водных экосистем. Токсичностью воды в водной токсикологии принято считать свойство воды оказывать вредное, патологическое, вплоть до гибели, действие на организм [8]. Однако под токсичностью воды до недавнего времени понимали только концентрации загрязняющих веществ, выраженные в ПДК [9]. Мы склонны понятие *токсичность* расценивать как интегральную характеристику качества воды, обусловленную проявлением негативных для водной биоты свойств химических веществ, присутствующих в испытываемой среде и проявляющих синергетическое, антагонистическое и аддитивное действие [7].

Методические подходы к экотоксикологической оценке состояния экосистем

Оценить токсическое состояние водных экосистем каким-либо одним из известных методических подходов (физико-химический, биологический) не представляется возможным, поскольку для получения адекватной картины необходимо изучить не только состояние гидробиоты, но и определить качество среды её обитания, т.е. загрязнение токсичными веществами и общий уровень загрязнения вод и донных отложений водного объекта.

В настоящее время оценка качества поверхностных вод, донных отложений и антропогенных изменений в состоянии водных экосистем базируется на триаде методических подходов: аналитическом и двух биологических, включающих биоиндикацию и биотестирование. Первоначальным и остающимся основным в природоохранных мероприятиях в настоящее время является аналитический метод, поскольку в России действует система нормирования по ПДК загрязняющих веществ, регламентирующая содержание этих веществ в природных и сточных водах.

Химические и физические показатели удобны тем, что имеют чёткое количественное выражение и согласно разработанным нормативам позволяют получить информацию о негативных изменениях в водном объекте. Однако оценить состояние экосистемы только по физико-химическим показателям невозможно. Во-первых, получаемая информация односторонняя, поскольку неучтённой остаётся основная характеристика – состояние гидробиоты. Во-вторых, практически невозможен контроль прогрессирующего возрастания количества новых химических веществ, а самое главное – аналитический контроль осложнен аддитивностью и синергетическим действием большинства соединений [7, 10]. В-третьих, реакция гидробиоты зависит не столько от отдельных физико-химических факторов, сколько от их взаимодействия. В результате может образоваться большая токсичность, чем при воздействии исходных загрязняющих веществ.

Из изложенного ясно, что оценка токсичности вод, донных отложений и состояния экосистем, основанная только на гидрохимических показателях, не может считаться достаточной. Кроме того, количественный анализ какого-либо вещества в воде сам по себе не даёт ответа на главный вопрос о её опасности для гидробиоты. В связи с этим возрастает роль холистического подхода для определения интегральной оценки токсичности на основе биологических методов.

Вследствие сказанного в современных условиях эвтрофикации и токсификации поверхностных вод особо важным представляется изучение экотоксичности компонентов экосистем.

Область применения экотоксикологического подхода

Экотоксикологический подход к анализу антропогенного воздействия занимает важнейшее место в стра-

тегии мониторинга окружающей природной среды и, в частности, водных объектов. На принципах экотоксикологии базируются как национальные системы и программы мониторинга окружающей среды, так и международные исследовательские программы, реализуемые в рамках деятельности крупных международных организаций и проектов (программы Европейской экономической комиссии ООН (ЕЭК ООН), Международной академии безопасности окружающей среды (IAES), Научного комитета НАТО и др.) [11].

Предмет исследований экотоксикологии – экосистема, а экотоксикологические показатели являются индикаторами общего состояния экосистемы, ее «экологического благополучия». Она отличается от классической токсикологии, которая изучает эффекты отдельных химических веществ [11]. Разработаны принципиальные схемы использования биологических методов для оценки качества вод и донных отложений (рис. 1, 2). Каждый из биологических методов имеет свои особенности, плюсы и минусы, которые подробно изложены в [7]. Там же обсуждены особенности методов биотестирования поверхностных вод (в отличие от сточных вод) и донных отложений.

В связи с тем, что в настоящее время оценка токсичности пресноводных экосистем включена в число обязательных характеристик экологического состояния водных объектов многих европейских государств и США, актуальной становится задача получения объективной информации о токсичности вод водных объектов, подверженных разнообразному по характеру антропогенному воздействию [12].

Известно, что количество показателей, определяемое современными аналитическими методами в водных экосистемах, составляет более сотни. Поэтому одной из актуальных задач, стоящих при исследовании водных экосистем, является: 1) выбор биологических методов, поскольку токсичность проявляется в отношении только живых объектов; 2) поиск интегральных показателей, характеризующих состояние водной экосистемы.

Получить адекватную оценку изменений состояния поверхностных водных объектов в части их качественных показателей можно с помощью биотестирования [13].

Биологическая индикация воды (биоиндикация) – оценка качества воды по наличию водных организмов, являющихся индикаторами ее загрязненности [9]. Следует отметить, что такой подход требует объективного разделения и точного описания двух одновременно действующих процессов, вызывающих отклонение индикационного признака от нормы. Во-первых, результат действия антропогенных факторов, во-вторых, следствие случайного отклонения от нормы в результате действия принципиально неформализуемых факторов. Кроме того, такой важный показатель любого биоценоза, как видовой состав, не дает ее оценки на момент исследования, поскольку является итоговой характеристикой всей суммы воздействия на сообщество за некоторый промежуток времени.

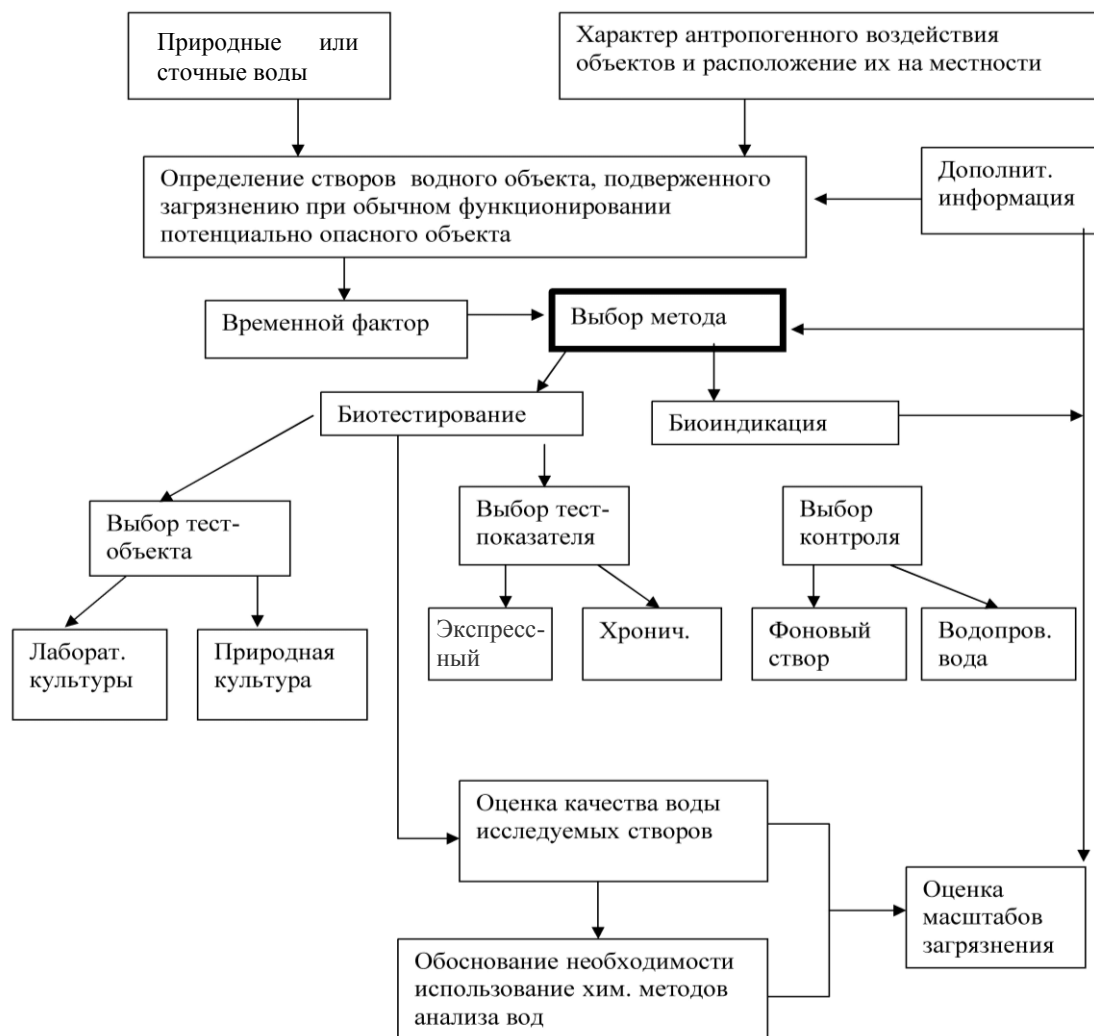


Рис. 1. Принципиальная схема использования биологических методов оценки токсичности вод поверхностных водных объектов

Биотестирование. Согласно ГОСТу 27065-85 СТ СЭВ 5184-85 [9], биотестирование воды – это оценка качества воды по ответным реакциям водных организмов, являющихся тест-объектами. Согласно действующим нормативам [14], вода контрольного створа (природная вода) не должна оказывать токсического (хронического и тем более острого) действия на тест-объекты. Прием биотестирования первоначально и в настоящее время использовали в качестве основного методологического подхода при разработке регламентов (ПДК) на химические вещества. Далее он стал активно применяться для оценки токсичности сточных вод. С неуклонным ростом антропогенной нагрузки на водные объекты с середины XX в. увеличивалась угроза токсического загрязнения. В 70-х гг. XX в. в нашей стране была поставлена задача использования методов биотестирования в мониторинге поверхностных вод суши при организации государственной службы наблюдений (ГСН) Росгидромета. Реализация этой задачи в тот период оказалась невозможной, поскольку не были обеспечены ни научно-методическая, ни

материальная база для выполнения биотестовых анализов. Кроме того, существовало мнение, что результаты биотестирования трудно связать с состоянием природных водных сообществ, т.е. они не могут характеризовать отклик водной экосистемы на воздействие. Сейчас стало очевидным, что биотестирование характеризует не отклик природных популяций, а воздействие на них опасных загрязняющих веществ [12].

Биотестирование позволяет решить ряд вопросов, связанных с оценкой токсического действия отдельных химических веществ, их смесей, сточных и природных вод. Оно стало активно применяться в оценке качества донных отложений [7].

Существуют серия международных стандартов по оценке качества вод – ISO Water quality: 6341:1996; 7346-1:1996; 7346-2:1996; 7346-3:1996; 8692:1989; 10229:1994; 10253:1995; 10706:2000; 10712:1995; 11348-1:1998; 11348-2:1998; 11348-3:1998; 12890:1999; 13829:2000; 14442:1999; 14669:1999, EPA-821-R-02-012, EPA-821-R-02-013, PA-821-R-02-014 и донных отложений EPA/600/R-94/024; EPA/600/R-94/025.

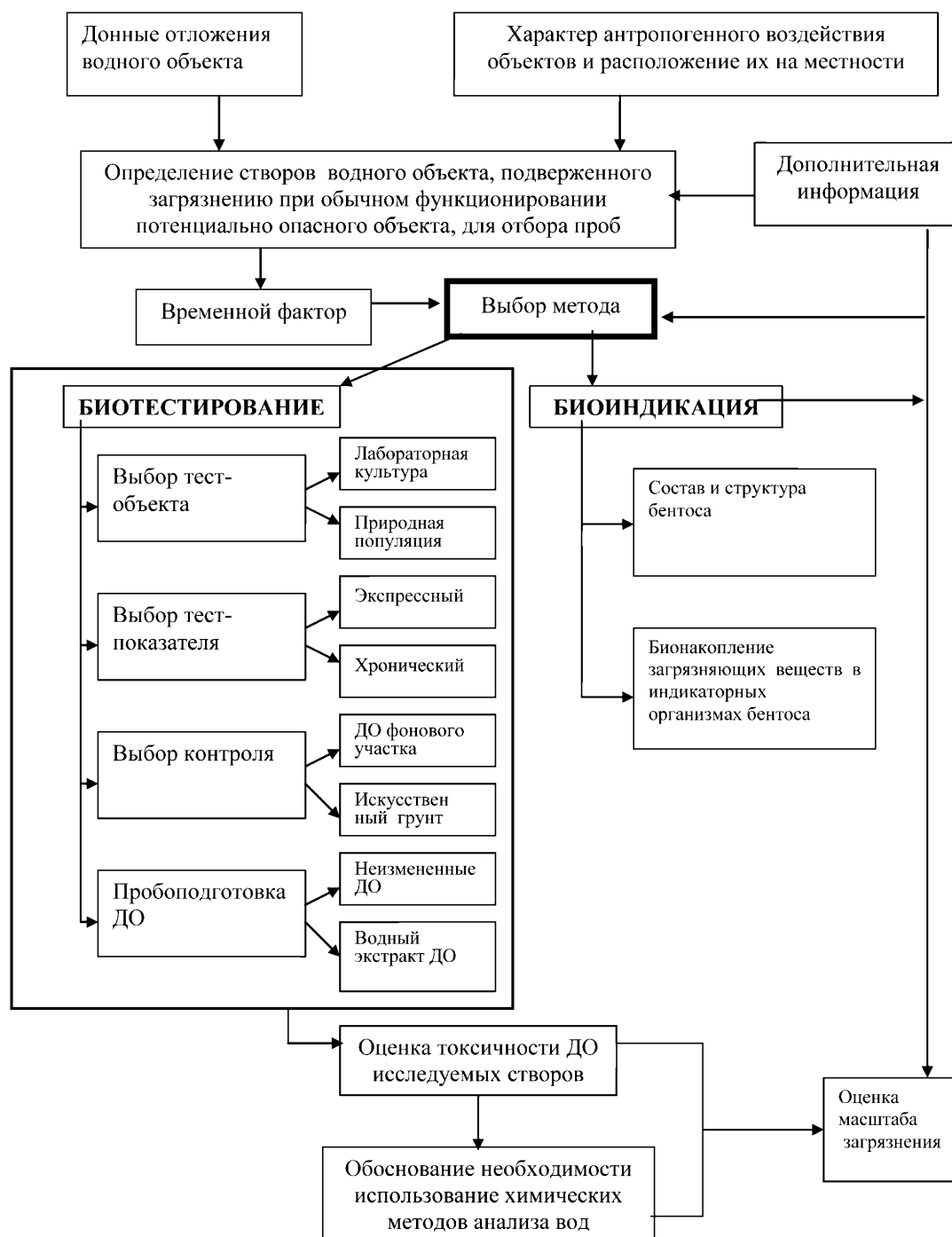


Рис. 2. Принципиальная схема использования биологических методов оценки токсичности донных отложений (ДО) поверхностных водных объектов

Также имеются национальные стандарты для тест-объектов: рыб (Австрия – М 6263, ч. 1, ч. 2, ч. 3; Великобритания – 6068, р.5-85; Венгрия – 260.24-56; 22902/3-77; Дания – 259-82; 6504-80; Норвегия – 4757-82; Польша – 0-04610 04-72; США – Д 3696-78; Франция – Т 90-303-85; Т 90-305-85; Т 90-307-85; ФРГ – 38412.15-82), дафний (Австрия – М 62-62-84; Великобритания – 6068, р.5-85; Венгрия – 260.24-56; 22902/6-81; Нидерланды – 6501-80; 6502-80; Польша – 0-04610 03-72; Финляндия – 50-60-84;

Франция – Т 90-301-83; ФРГ 38412.11-82), водорослей (Венгрия – 22902/2-76; Нидерланды – 6506-84; Польша – 0-04610 05-74), микробиологических объектов (Венгрия – 450/2-77), семян растений (Венгрия – 22902/4-76), общие по токсикологии (Венгрия – 22902/1-76, 2903/5-80; 22902/7-82; Польша – 0-04610 01-72; США – APH-AWWA-WPCF, Франция – Т 90-304-80; ФРГ – 384.12-82), для пресноводных рыбных водоемов (США – Д 1345-77; APH-AWWA-WPCF) [7].

С 1991 г. биотестирование в качестве обязательного элемента контроля качества поверхностных вод суши предусмотрено Правилами охраны поверхностных вод [14]. В России с 90-х гг. показатели биотестирования природных вод включены в перечень показателей для выявления зон чрезвычайной экологической ситуации и зон экологического бедствия [15]. К настоящему моменту разработано несколько десятков методик, а главное – наработана нормативно-методическая база, например в системе Росгидромета. Ведомственным документом Росгидромета РД 52.24.309-2011 выполнение работ по биотестированию предусмотрено в качестве рекомендуемого [16].

В последние годы в связи с увеличением числа чрезвычайных ситуаций на водных объектах возрос интерес к использованию и разработке экспресс-методик биотестирования, способных в кратчайшие сроки получить информацию о токсичности вод и донных отложений, которые являются аккумуляторами загрязняющих веществ [17, 18]. На основе полученных данных оконтуривают загрязненные участки, в которых затем проводят исследования аналитическими методами с целью выявления конкретных загрязняющих веществ и их концентраций. В случае необходимости принимаются управленческие решения.

Согласно современным представлениям и мировому опыту оценка экотоксикологического состояния водных объектов невозможна без данных оценки интегральной токсичности с помощью биотестирования [19]. В России биотестирование применяется для оценки токсичности вод сотрудниками водоохраных организаций различных ведомств. Материалы публикуются в докладах о состоянии окружающей среды как регионального, так и федерального уровней.

Перспективы биотестирования

Развитие науки, особенно методических возможностей смежных наук и генной инженерии, позволяет расширить методологию биотестирования приборным оснащением и возможностью проникновения на микроуровень живых систем. Перспективными в водной экотоксикологии являются два направления: биомаркирование [20] и люминесцирующие бактериальные биосенсоры [21]. Не выявляя, как правило, отдельных веществ, они дают возможность обнаружить способность исследуемого образца вызывать токсические эффекты, в том числе поражать определенные классы биомолекул и дезинтегрировать важные метаболические пути. Показано, что батарея биосенсоров, включающая культуры различных штаммов бактерий видов *Vibrio aquamarines* и *Escherichia coli*, позволяет даже дифференцировать в воде и донных отложениях отдельные группы загрязняющих веществ, например тяжёлые металлы [21]. Однако эти методики на настоящий момент не вошли в водоохранную практику, а остаются в области научных исследований.

В современных подходах контроля гидросферы выделяют биотестирование, биоиндикацию, экспертную оценку качества экосистем, анализ ранговых рас-

пределений, метод функциональной желательности, эталонное оценивание, показатели функционирования биоценозов, оценку состояния биоты, основанную на отклонениях от нормального функционирования отдельных организмов (пограничный между биотестированием и биоиндикацией), графический способ выражения результатов изучения биоценозов. Особенности приемов биоиндикационного и биотестового исследований подробно изложены в [7]. Методы оценки качества биоты в реальных водных объектах различаются составом организмов-индикаторов и типом применяемого анализа (структурный, продукционный, биохимический, клинический).

Оценку экотоксичности водных экосистем по биологическим показателям, как изложено выше, проводят двумя основными методами: биоиндикацией и биотестированием. На этих двух методических приемах базируется биодиагностика, вскрывающая причины и факторы изменения среды на основе применения различных видов-биоиндикаторов, как правило, характеризующихся узкоспецифическими реакциями.

Методы биоиндикации установлены в руководстве [22], методы биотестирования поверхностных вод закреплены в ГОСТах, ПНД Ф (природоохранные нормативные документы федеративные), ПНД ФТ (федеральный природоохранный нормативный документ, регламентирующий токсикологические методы контроля), нормативно-методических документах РД (руководящий документ) и Р (рекомендации), в частности в ведомственных документах Росгидромета.

Окончательная оценка экотоксикологического состояния водных экосистем по результатам биологических методов исследования складывается из трёх основных характеристик: сапробность, трофность, токсичность (таблица). Хотя существует и более детальная классификация, объединённая в шесть основных групп: ацидофикацию (А), эвтрофикацию (Е), нуклидизацию (R), сапробизацию (S), термофикацию (t), токсификацию (Т) [23]. Сравнительная оценка типов антропогенного воздействия и методов их исследования изложена в работе [7].

Оценка по биоиндикационным исследованиям

По результатам биоиндикации получают сведения о видовом разнообразии и структурном составе гидробионтов, что выражается в качественных и количественных характеристиках биоценозов. По этим характеристикам рассчитывают индекс сапробности, определяют уровни трофности и загрязнённости согласно принятым в системе Росгидромета классификациям [16].

Биоиндикационные исследования, как правило, охватывают планктонные и донные биоценозы, реже – перифитон (обрастатели). Из планктонных обязательно исследованию подлежат биоценозы двух трофических уровней: автотрофы – фитопланктон, гетеротрофы – зоопланктон. В донных отложениях исследуют в основном гетеротрофов – макрозообентос. Результаты биоиндикации характеризуют отклик «аборигенных» гидробионтов на внешнее воздействие.

Биологические характеристики для оценки экотоксичности водных экосистем

Характеристика	Показатель	Метод	Оценка
Сапробность	Виды-индикаторы органического загрязнения (от олигодо полисапробных)	Гидробиологический – все биоценозы водной толщи и донных отложений	Индекс сапробности, или процентный состав видов разных уровней сапробности
Трофность	Биомасса первого трофического звена (автотрофов)	Гидробиологический – структурно-видовые показатели фитопланктона	Уровень трофности по биомассе фитопланктона
	Концентрация хлорофилла <i>a</i>	Аналитический	Уровень трофности по концентрации хлорофилла <i>a</i>
Токсичность	Регистрируемые в соответствии с биотестом тест-показатели	Биотестирование по трём биотестам	ОТД, ПО/ТД, ХТД
	Регистрируемые в соответствии с биотестом тест-показатели	Биотестирование неизменённых ДО и их водных экстрактов (каждый по трём биотестам)	ОТД, ТД

Примечание. ОТД – острое токсическое действие; ПО/ТД – подострое токсическое действие; ХТД – хроническое токсическое действие.

Сапробность. Приёмы биоиндикации предполагают выявление видов-индикаторов сапробности в водных объектах во время натурных исследований. Далее ведут расчёт индекса сапробности Пантле и Букку [22].

По гидробиологическим показателям фитопланктона, зоопланктона и макрозообентоса разработано несколько классификаций качества вод, включающих индекс сапробности. В зарубежных странах принята шестиклассная оценка качества вод, которая положена в основу ГОСТа 17.12.04.77 [5], ГОСТа 17.13.07.82 и РД 52.24.309-2011 [24]. В обоих классификаторах указывается 6 классов качества вод, но словесное их определение и абсолютные значения показателей отличаются. Уточнённый и утверждённый спустя почти 20 лет нормативно-методический документ РД 52.24.309-2011 [16] ранжирует качество вод уже на 5 классов.

Ясно, что нумерация от 1 к 5 указывает на возрастание уровня (в другом случае – степени) загрязнённости воды. Изъятый оказался первый (1) класс – «очень чистые» воды, или «экологически полноценные, могут использоваться для питья, рекреации, рыбоводства и орошения». То есть за двадцать лет практически исчезли водные объекты, способные соответствовать такому высокому классу чистоты.

Разработана градация оценки состояния экосистем по методу экологических модификаций, включающая такие состояния экосистемы, как фоновое, антропогенное экологическое напряжение, антропогенный экологический регресс, антропогенный метаболический регресс [16, 22, 25, 26]. Следует подчеркнуть, что эта система основана на статистической обработке данных и применима исключительно для многолетних массивов наблюдений.

Предложена методика [27] мониторинга пресных водоемов по важнейшим характеристикам бентосных сообществ с использованием комбинированного индекса загрязнения, который объединяет значения 6 показателей бентосного сообщества (суммарной численности, суммарной биомассы, числа видов, индекса

Шеннона, олигохетного индекса Пареле и средней сапробности пробы), рассчитанной как средневзвешенная сапробность трех первых доминирующих по численности видов. Однако этот индекс в руководящие документы не включён.

Помимо индексов сапробности, чрезвычайно широкое применение получил индекс видового разнообразия Шеннона, заимствованный из теории информации. Существует, однако, точка зрения, что индекс Шеннона и другие индексы разнообразия невозможно интерпретировать в терминах качества среды [28]. Наблюдения свидетельствуют, что «здоровой» экосистеме могут соответствовать различные уровни видового разнообразия, в то же время одно и то же значение индекса может быть обнаружено у неодинаковых (порой прямо противоположных) состояний экосистемы.

Трофность. Сущность процесса эвтрофирования состоит в увеличении продуктивности экосистемы, в его основе лежит рост первичной продукции. В связи с этим используют биологические показатели, характеризующие процесс первичного продуцирования органического вещества и концентраций основного фотосинтетического пигмента – хлорофилла *a*. При определении трофического состояния водного объекта трудным представляется выделение градаций процесса эвтрофирования, поскольку процесс этот постепенный и непрерывный. Кроме того, эвтрофирование, формируемое многообразием и изменчивостью географических и экологических условий, обусловило появление большого количества различных классификаций и границ трофических уровней. В связи с этим попытки разработки шкал трофности по комплексу показателей не дали положительного результата. Сводные таблицы градаций трофического состояния водоёмов, разработанных на данный момент разными авторами по показателям фитопланктона (биомасса, концентрация хлорофилла *a*) и зоопланктона (биомасса), приведены в работе [29]. Абсолютные значения этих показателей в одном уровне трофности вод перекрываются и не совпадают.

Систематизированные материалы по расчёту и применению индексов сапробности и трофности представлены в работе [30].

Оценка по результатам биотестирования

Согласно нормативно-методическим документам [18, 31], при оценке токсичности исследуемой воды необходимо использовать минимум три биотеста. Использование набора биотестов с разными по чувствительности тест-объектами и тест-показателями увеличивает вероятность обнаружения токсичности исследуемой воды и донных отложений.

Итоговая оценка токсичности воды является экспертной. Окончательную оценку проводят по тест-объекту и тест-показателю, проявившему наибольшую чувствительность к воздействию исследуемой воды или донных отложений. Оценка по результатам биотестирования выражается словесно: «оказывает/не оказывает острого (ОТД), подострого (П/ОТД) или хронического (ХТД) токсического действия».

В зависимости от целей работ выбирают биотест (методику биотестирования) в соответствии с имеющейся предварительной информацией о геоморфологических особенностях водного объекта, расположением потенциально опасных производств, произошедших авариях, возможных видах загрязнения и т.д. Также перед исследованием необходимо выбрать, во-первых, тест-объект, экологически соответствующий гидрохимии водного объекта и объекту исследования (вода или донные отложения), во-вторых, вариант биотеста. Для быстрого получения информации о возможной токсичности за краткий промежуток времени выбирают экспрессный биотест и экспрессный тест-показатель; для определения хронического токсического действия – длительный биотест с обязательным включением показателя плодовитости. При оперативных работах и в случае чрезвычайных ситуаций (ЧС) проводят сканирование створов водного объекта для экспресс-оценки наличия или отсутствия токсичности вод и донных отложений. Сканирование проводят методом экспрессного биотестирования, позволяющего в зависимости от выбранного биотеста в кратчайшие сроки (до 1 ч – Р ...) определить наличие или отсутствие токсичности [17].

В случае обнаружения острого токсического действия (ОТД) проводят серию разбавлений чистой контрольной водой. На основе разбавлений разработана шкала оценки токсичности и экологического статуса водного объекта или его участка [17, 23].

Оценку уровня токсического загрязнения вод в режимных наблюдениях проводят в сравнении с контрольной серией, поставленной на воде из условно чистого створа или дехлорированной водой исследуемого региона. Как правило, рассчитывают отклонение полученных значений тест-показателя от контрольных или статистически достоверные отличия. Такого рода оценки проводят по отдельным тест-объектам.

Однако наиболее точной является оценка по комплексу тест-показателей в сочетании со временем биотестового эксперимента. В [17, 32] предложены шкалы оценки токсичности вод с использованием гетеротрофных тест-объектов по двум тест-показателям, один из которых – выживаемость – является основным, так как позволяет дать прогноз существования популяции в исследуемом водном объекте. Разработана также шкала оценки токсичности вод по комплексу двух тест-показателей автотрофных тест-объектов (коэффициент прироста численности, дающий прогноз развития популяции, и концентрация основного фотосинтетического пигмента – хлорофилла *a*) [33].

Оценка уровня токсического загрязнения донных отложений водоёмов и водотоков по данным биотестирования [16] учитывает тип и характер донных отложений и количество участков, на которых обнаружена токсичность.

Оценка токсикологического состояния водоёма и водотока (участка) методом биотестирования только донных отложений в [16] относится к длительному периоду наблюдений – один год. В [32, 34] представлена шкала оценки экологического состояния водного объекта по результатам биотестирования двух компонентов экосистем – вод и донных отложений – по данным однократной съёмки.

Оценка по комплексу биологических методов

Из существующих попыток разработки шкал для оценки экотоксикологического состояния водных экосистем по набору абиотических и биотических показателей наиболее применимой является система, предложенная Оксиком, Жукинским [35], однако используют её только в научно-исследовательских целях.

Практический аспект применения биологических методов оценки качества поверхностных вод

Наиболее очевидным, реальным направлением применения биологических методов служит государственная система мониторинга качества вод (ГСН) Росгидромета. По мнению А.М. Никанорова [36], в настоящее время формирование и развитие ГСН должно опираться на соответствующую нормативно-правовую базу, в которой должен быть закреплён юридический статус самой системы, ее частей и структурных элементов, определены юридический статус получаемой информации и ответственность юридических и физических лиц за ее сокрытие, непредставление и умышленное искажение [36].

Методик биотестирования разработано и используется в научно-исследовательских целях несколько десятков. Часть разработок нашла выход в природоохранной практике. Но проблема сопоставления результатов, полученных разными авторами, осложняется тем, что разные ведомства работают разными методиками, в то время как природоохранные меро-

приятия должны основываться на определённой нормативно-методической базе, утверждённой соответствующими ведомствами. К настоящему времени на ряд методик биотестирования существуют нормативные документы: ГОСТ, ПНД Ф, ПНД Ф Т, РД и Р.

В настоящее время наблюдения в системе ГСН Росгидромета проводят в соответствии с разработанными и утвержденными нормативно-методическими документами.

В связи с участвовавшими техногенными авариями, ЧС особое внимание уделяется разработке оперативных методик. Основное требование к оперативным работам по оценке токсичности вод методом биотестирования заключается в экспрессности получения достоверной биологической информации. Это возможно при использовании короткоциклических организмов из числа представителей фито- и зоопланктона и использовании легкорегистрируемых тест-показателей. С этих позиций наиболее удобным является применение методик, использующих в качестве тест-объектов представителей коловраток и инфузорий.

Рассмотрим нормативно-методические документы, отвечающие указанным требованиям. В РД 52.24662-2004 [32] изложен ряд методик с использованием различных тест-показателей коловраток, позволяющих получить результат о токсичности вод или донных отложений в зависимости от выбранного показателя и задачи исследования, например, определить острое, подострое или хроническое токсическое действие. В течение 30 мин тест-показатель даёт ответ – скорость осветления среды, в течение 24, 48, 72 ч – комплекс тест-показателей «выживаемость» и основного биологического тест-показателя – «плодовитость».

Экспресс-методика биотестирования с использованием в качестве тест-показателя особенностей поведенческой реакции инфузорий хемотаксиса закреплена в Р 52.24.741-2010 [17]. Этот биотест даёт ответ через 30 мин. В ФР.1.31.2005.01881 [37] и ПНД ФТ 14.1:2.3:4.2-98 [38] эта же методика позволяет регистрировать реакцию хемотаксиса инфузорий прибором «Биотестер» различных модификаций.

Биотест по оценке токсического загрязнения природных вод и донных отложений водных экосистем по коэффициенту регенерации популяции утверждён в Р 52.24.695-2007 [34]. Методика универсальна: позволяет определять возможности выживания популяции любого используемого тест-объекта по количеству отродившейся молоди и отмерших особей. Для оперативных работ – на короткоциклических тест-объектах (микроводоросли, инфузории, коловратки).

При использовании в качестве тест-объектов представителей фитопланктона экспрессным тест-показателем служит изменение концентрации хлорофилла *a*. Наиболее точный ответ получают по комплексу тест-показателей: концентрации хлорофилла *a* и коэффициента прироста микроводорослей, представленных в Р 52.24.808-2014 [33]. Методика определения хлорофилла *a* может быть осуществлена гидрохимиками в аналитической лаборатории.

Методика определения токсичности воды и водных вытяжек из почв, осадков сточных вод и отходов по изменению интенсивности бактериальной биолюминесценции тест-системой «Эколюм» на приборе «Биотокс-10» закреплена ПНД Ф Т 14.1:2.3:4.11-04 (ПНД Ф Т 16.1:2.3:3.8-04) [39].

Выйти на приборный уровень проведения методик биотестирования позволило использование для регистрации тест-показателей живых организмов химических и физических методик.

Заключение

На сегодняшний момент развития экотоксикологии наработано большое количество индексов, рассчитываемых по показателям гидробиоты, полученным в ходе биоиндикации, а также методик биотестирования и нормативно-методической документации по их применению. Однако проблема оценки экотоксикологического состояния экосистем остаётся открытой. Весьма трудной является разработка универсальной шкалы для всего многообразия водных объектов и типов загрязнений. Большой фактический материал, полученный авторами, по изучению водных объектов Нижнего Дона комплексом биологических методов изложен в ряде публикаций [40–43] и др. Эти исследования могут быть использованы для разработки шкал экотоксикологического состояния водных объектов бассейна Нижнего Дона в зависимости от конкретной антропогенной нагрузки.

Литература

1. Водный кодекс Российской Федерации от 03.06.2006 № 74-ФЗ (ред. от 14.10.2014). URL: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_170158 (дата обращения: 11.10.2014).
2. Винберг Г.Г. Пути количественного исследования роли водных организмов как агентов самоочищения загрязнённых вод // Радиоактивные изотопы в гидробиологии и методы санитарной гидробиологии. М., 1964. С. 21–36.
3. Hauhs M., Neal C., Hooper R., Christophersen N. Summary of a workshop on ecosystem modeling: The end of an era? // Sci. Total Environ. 1996. Vol. 183. P. 1–5.
4. Вернадский В.И. Живое вещество. М., 1978. 358 с.
5. ГОСТ 17.1.1.01-77. Охрана природы. Гидросфера. Использование и охрана вод. Основные термины и определения. М., 2000.
6. ИСО/ТК 147/С 6 1990. Качество воды. Общее руководство по биотестированию вод и сточных вод. Отбор проб, подготовка, проведение и оценка.
7. Бакаева Е.Н., Никаноров А.М. Гидробионты в оценке качества вод суши. М., 2006. 236 с.
8. Строганов Н.С. Краткий словарь терминов по водной токсикологии. Ярославль, 1982. 42 с.
9. ГОСТ 27065 СТ СЭВ 5184-85. Качество вод. Термины и определения. М., 2001.
10. Бакаева Е.Н. Адекватная оценка состояния водных экосистем биологическими методами // Материалы VI Всерос. гидролог. съезда. 28 сентября – 1 октября 2004 г. СПб., 2004. С. 156–158.
11. Никаноров А.М., Бакаева Е.Н., Хоружая Т.А. Результаты

- и перспективы использования экотоксикологических методов контроля в системах мониторинга поверхностных вод // Десять лет сотрудничества России и Беларуси в области гидрометеорологии и мониторинга загрязнения природной среды и перспективы его дальнейшего развития : материалы науч.-практ. конф. 12–14 декабря 2006. М., 2006. С. 33–35.
12. Бакаева Е.Н., Никаноров А.М., Игнатова Н.А. Динамика токсичности поверхностных вод бассейна реки Дон в пределах мегаполиса по многолетним данным биотестирования // Водные ресурсы. 2015. Т. 42, № 1. С. 70–77.
13. Положение об осуществлении государственного мониторинга водных объектов: Постановление Правительства РФ № 219 от 10.04.07. URL: http://www.consultant.ru/cons_doc_LAW_162057 (дата обращения: 11.10.2014).
14. Правила охраны поверхностных вод: типовые положения. М., 1991. 42 с.
15. Критерии оценки экологической обстановки территорий для выявления зон чрезвычайной экологической ситуации и зон экологического бедствия // Зелёный мир. 1994. № 12. С. 8.
16. РД 52.24.309-2011. Организация и проведение режимных наблюдений за состоянием и загрязнением поверхностных вод суши. Ростов н/Д, 2011. 24 с.
17. Р 52.24.741-2010. Оценка токсичности поверхностных вод суши в условиях чрезвычайных ситуаций методом экспрессного биотестирования // Обеспечение безопасности поверхностных вод суши РФ в условиях чрезвычайных ситуаций : сб. рекомендаций. Ростов н/Д, 2011. С. 67–90.
18. Р 52.24.756-2011. Критерии опасности токсического загрязнения поверхностных вод суши при чрезвычайных ситуациях (в случаях загрязнения) // Обеспечение безопасности поверхностных вод суши РФ в условиях чрезвычайных ситуаций: сб. рекомендаций. Ростов н/Д, 2011. С. 91–125.
19. Бакаева Е.Н., Игнатова Н.А. Исследование состояния поверхностных вод на основе комплекса биологических методов // Современные методы исследования состояния поверхностных вод в условиях антропогенной нагрузки: материалы V Всерос. конф. по водной токсикологии. 28 октября – 1 ноября 2014. Борок, 2014. Т. 2. С. 119–123.
20. Чуйко Г.М. Биомаркеры в гидроэкологии: принципы, методы, методология, практика использования // Современные методы исследования состояния поверхностных вод в условиях антропогенной нагрузки : материалы V Всерос. конф. по водной токсикологии, 28 октября – 1 ноября 2014. Борок, 2014. Т. 2. С. 185–197.
21. Сазыкина М.А. Экотоксикологическая оценка водных экосистем с использованием биосенсоров на основе люминесцентных бактерий: автореф. дис. ... д-ра биол. наук. Ростов н/Д, 2014.
22. Руководство по гидробиологическому мониторингу пресноводных экосистем / под ред. В.А. Абакумова. СПб., 1992. 318 с.
23. Брагинский Л.П. Некоторые принципы классификации пресноводных экосистем по уровням токсической загрязнённости // Гидробиол. журн. 1985. Т. 21, № 6. С. 65–74.
24. РД 52.24.309-92. Организация и проведение режимных наблюдений за состоянием и загрязнением поверхностных вод суши. СПб., 1992. 24 с.
25. РД 52.24.633-2002. Методические основы создания и функционирования подсистемы мониторинга экологического регресса пресноводных экосистем. СПб., 2002. 32 с.
26. РД 52.24.565-96. Метод оценки загрязнённости пресноводных экосистем по показателям развития зоопланктона. М., 1996. 32 с.
27. Баканов А.И. Использование зообентоса для мониторинга пресноводных водоёмов // Биол. внутр. вод. 2000. № 1. С. 68–82.
28. Воробейчик Е.Л., Садыков О.Ф., Фарафонов М.Г. Экологическое нормирование техногенных загрязнений. Екатеринбург, 1994. 280 с.
29. Даценко Ю.С. Эвтрофирование водохранилищ. Гидролого-гидрохимические аспекты. М., 2007. 252 с.
30. Шитиков В.К., Розенберг Г.С., Зинченко Т.Д. Количественная гидроэкология. Тольятти, 2003. 463 с.
31. РД 52.24.566-94. Методы токсикологической оценки загрязнения пресноводных экосистем. М., 1994. 130 с.
32. РД 52.24.662-2004. Оценка токсического загрязнения природных вод и донных отложений пресноводных экосистем методами биотестирования с использованием колонок. М., 2006. 60 с.
33. Р 52.24.808-2014. Оценка токсичности поверхностных вод суши методом биотестирования с использованием хлорофилла *a* / Бакаева Е.Н., Игнатова Н.А., Черникова Г.Г. Ростов н/Д., 2014. 23 с.
34. Р 52.24.695-2007. Оценка токсического загрязнения природных вод и донных отложений водных экосистем по коэффициенту регенерации популяции. Ростов н/Д, 2008. 32 с.
35. Оксикюк О.М., Жукинский В.Н., Брагинский Л.П. Комплексная экологическая классификация качества поверхностных вод суши // Гидробиол. журн. 1993. Т. 30, № 2. С. 213–221.
36. Никаноров А.М., Хоружая Т.А., Бражникова Л.В., Жулидов А.В. Качество вод: оценка токсичности. СПб., 2000. 159 с.
37. ПНД Ф Т 14.1:2.3:4.2-98. Методика определения токсичности воды по хемотаксической реакции инфузорий. М., 1998.
38. ПНД Ф Т 16.2:2.2-98. Методика определения токсичности почвы и донных осадков по хемотаксической реакции инфузорий. М., 1998.
39. ПНД Ф Т 14.1:2.3:4.11-04 (ПНД Ф 16.1:2.3:3.8-04). Методика определения токсичности воды и водных вытяжек из почв, осадков сточных вод и отходов по изменению интенсивности бактериальной биолюминесценции тест-системой «Эколюм». М., 2004.
40. Бакаева Е.Н., Игнатова Н.А. Эколого-токсикологическое состояние нижнего течения р. Дон // Антропогенное влияние на водные организмы и экосистемы : материалы III Всерос. конф. по водной токсикологии. Борок, 2008. С. 193–197.
41. Бакаева Е.Н., Игнатова Н.А. Оценка токсичности вод методом биотестирования: вопросы методического обеспечения // Экология. Экономика. Информатика : материалы конф. Ростов н/Д, 2008. С. 93–95.
42. Бакаева Е.Н., Игнатова Н.А. Динамика токсичности вод и донных отложений водного объекта рекреации // Совр. проблемы науки и образования (электр. журн.). 2011. № 6.
43. Бакаева Е.Н., Игнатова Н.А., Черникова Г.Г. Экологическая токсичность вод приплотинного участка Цимлянского водохранилища // Глобальная ядерная безопасность. 2012. Спец. вып. № 3. С. 5–10.

References

1. *Vodnyi kodeks Rossiiskoi Federatsii ot 03.06.2006 N 74-FZ* (red. ot 14.10.2014) [Water Code of the Russian Federation of 03.06.2006 N 74-FZ]. Available at: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_170158/ (accessed 11.10.2014).
2. Vinberg G.G. [Methods for the quantitative study of the role of aquatic organisms as agents of self-purification of polluted water]. *Radioaktivnye izotopy v gidrobiologii i metody sanitarnoi gidrobiologii* [Radioactive isotopes in hydrobiology and sanitary methods of hydrobiology]. Moscow, 1964, pp. 21-36.
3. Hauhs M., Neal C., Hooper R., Christophersen N. Summary of a workshop on ecosystem modeling: The end of an era? *Sci. Total Environ.*, 1996, vol. 183, pp. 1-5.
4. Vernadskii V.I. *Zhivoe veshchestvo* [Living matter]. Moscow, 1978, 358 p.
5. *GOST 17.1.1.01-77. Okhrana prirody. Gidrosfera. Ispol'zovanie i okhrana vod. Osnovnye terminy i opredeleniya* [GOST 17.1.1.01-7. Nature Conservancy. Hydrosphere. Use and protection of water. Basic terms and definitions]. Moscow, 2000.
6. *ISO/TK 147/S 6 1990. Kachestvo vody. Obshchee rukovodstvo po biotestirovaniyu vod i stochnykh vod. Otkor prob, podgotovka, provedenie i otsenka* [ISO / TC 147 / C 6 1990. Water quality. General guidance of water and wastewater biotesting. Sampling, preparation, implementation and evaluation].
7. Bakaeva E.N., Nikanorov A.M. *Gidrobionty v otsenke kachestva vod sushi* [Aquatic organisms in water quality assessment of the land]. Moscow, 2006, 236 p.
8. Stroganov N.S. *Kratkii slovar' terminov po vodnoi toksikologii* [A brief glossary on water toxicology]. Yaroslavl, 1982, 42 p.
9. *GOST 27065 ST SEV 5184-85. Kachestvo vod. Terminy i opredeleniya* [GOST 27065 ST SEV 5184-85. Water quality. Terms and definitions]. Moscow, 2001.
10. Bakaeva E.N. [Adequate assessment of aquatic ecosystems biological methods]. *Materialy 6 vseros. gidrolog. s"ezda. 28 sentyabrya - 1 oktyabrya 2004* [Materials 6 Proc. hydrologist. congress. 28 September - 1 October 2004]. Saint Petersburg, 2004, pp. 156-158.
11. Nikanorov A.M., Bakaeva E.N., Khoruzhaya T.A. [Results and prospects of ecotoxicological methods of control systems for surface water monitoring]. *Desyat' let sotrudnichestva Rossii i Belarusi v oblasti gidrometeorologii i monitoringa zagryazneniya prirodnoi sredi i perspektivy ego dal'neishego razvitiya* : materialy nauch.-prakt. konf. 12-14 dekabrya 2006 [Ten years of cooperation between Russia and Belarus in the field of hydrometeorology and monitoring of environmental pollution and the prospects for its further development: scientific and practical materials. Conf. 12-14 December 2006]. Moscow, 2006, pp. 33-35.
12. Bakaeva E.N., Nikanorov A.M., Ignatova N.A. *Dinamika toksichnosti poverkhnostnykh vod basseina reki Don v predelakh megapolisa po mnogoletnim dannym biotestirovaniya* [Dynamics of surface water toxicity Don basin within the metropolis for long-term data bioassay]. *Vodnye resursy*, 2015, vol. 42, no 1, pp. 70-77.
13. *Polozhenie ob osushchestvlenii gosudarstvennogo monitoringa vodnykh ob"ektov*: Postanovlenie Pravitel'stva RF N 219 ot 10.04.07 [Regulation on the implementation of state monitoring of water bodies: Russian Federation Government Resolution № 219 of 10.04.07]. Available at: http://www.consultant.ru/document/cons_doc_LAW_162057/ (accessed 11.10.2014).
14. *Pravila okhrany poverkhnostnykh vod: tipovye polozheniya* [Rules for the protection of surface waters: model regulations]. Moscow, 1991, 42 p.
15. Kriterii otsenki ekologicheskoi obstanovki territorii dlya vyyavleniya zon chrezvychainoi ekologicheskoi situatsii i zon ekologicheskogo bedstviya [Criteria for assessing the ecological environment areas to identify areas of ecological emergency and ecological disaster zones]. *Zelenyi mir*, 1994, no 12, p. 8.
16. *RD 52.24.309-2011. Organizatsiya i provedenie rezhimnykh nablyudenii za sostoyaniem i zagryazneniem poverkhnostnykh vod sushi* [RD 52.24.309-2011. Organization and carrying out routine observations of the condition and surface water pollution]. Rostov-on-Don, 2011, 24 p.
17. *R 52.24.741-2010. Otsenka toksichnosti poverkhnostnykh vod sushi v usloviyakh chrezvychainykh situatsii metodom ekspresnogo biotestirovaniya* [P 52.24.741-2010. Evaluation of the toxicity of surface water in emergency situations by express bioassay]. *Obespechenie bezopasnosti poverkhnostnykh vod sushi RF v usloviyakh chrezvychainykh situatsii* : sbornik rekomendatsii. Rostov-on-Don, 2011, pp. 67-90.
18. *R 52.24.756-2011. Kriterii opasnosti toksicheskogo zagryazneniya poverkhnostnykh vod sushi pri chrezvychainykh situatsiyakh (v sluchayakh zagryazneniya)* [P 52.24.756-2011. Criteria for a hazardous toxic pollution of surface waters in emergency situations (in the case of pollution)]. *Obespechenie bezopasnosti poverkhnostnykh vod sushi RF v usloviyakh chrezvychainykh situatsii* : sbornik rekomendatsii. Rostov-on-Don, 2011, pp. 91-125.
19. Bakaeva E.N., Ignatova N.A. [The study of surface water on the basis of complex biological methods]. *Sovremennye metody issledovaniya sostoyaniya poverkhnostnykh vod v usloviyakh antropogennoi nagruzki* : materialy V vseros. konf. po vodnoi toksikologii. 28 oktyabrya - 1 noyabrya 2014 [Modern methods of investigation of surface waters in the conditions of anthropogenic load: the V All-Russia. conf. on aquatic toxicology. 28 October - 1 November 2014]. Borok, 2014, vol. 2, pp. 119-123.
20. Chuiko G.M. [Biomarkers in hydroecology: principles, methods, methodology, practice of using]. *Sovremennye metody issledovaniya sostoyaniya poverkhnostnykh vod v usloviyakh antropogennoi nagruzki* : materialy V vseros. konf. po vodnoi toksikologii, 28 oktyabrya - 1 noyabrya 2014 [Modern methods of investigation of surface waters in the conditions of anthropogenic load: the V All-Russia. Conf. on aquatic toxicology, Oct. 28 - 1 Nov. 2014]. Borok, 2014, vol. 2, pp. 185-197.
21. Sazykina M.A. *Ekotoksikologicheskaya otsenka vodnykh ekosistem s ispol'zovaniem biosensorov na osnove lyuminescentnykh bakterii*: avtoref. dis. ... d-ra biol. nauk [Ecotoxicological assessment of aquatic ecosystems based biosensors based on fluorescent bacteria]. Rostov-on-Don, 2014.
22. *Rukovodstvo po gidrobiologicheskomu monitoringu presnovodnykh ekosistem* [Guide of hydrobiological monitoring of freshwater ecosystems]. Ed. V.A. Abakumov. Saint Petersburg, 1992, 318 p.
23. Braginskii L.P. *Nekotorye printsipy klassifikatsii presnovodnykh ekosistem po urovnyam toksicheskoi zagryaznennosti* [Some principles of classification of freshwater ecosystems through the levels of toxic contamination]. *Gidrobiol. zhurn.*, 1985, vol. 21, no 6, pp. 65-74.

24. RD 52.24.309-92. *Organizatsiya i provedenie rezhimnykh nablyudenii za sostoyaniem i zagryazneniem poverkhnostnykh vod sushi* [RD 52.24.309-92. Organization and carrying out routine observations of the condition and surface water pollution]. Saint Petersburg, 1992, 24 p.
25. RD 52.24.633-2002. *Metodicheskie osnovy sozdaniya i funktsionirovaniya podsystemy monitoringa ekologicheskogo regressa presnovodnykh ekosistem* [RD 52.24.633-2002. Methodological basis for the creation and operation of environmental monitoring subsystem recourse freshwater ecosystems]. Saint Petersburg, 2002, 32 p.
26. RD 52.24.565-96. *Metod otsenki zagryaznennosti presnovodnykh ekosistem po pokazatelyam razvitiya zooplanktona* [RD 52.24.565-96. Method of estimating contamination of freshwater ecosystems in terms of the development of zooplankton]. Moscow, 1996, 32 p.
27. Bakanov A.I. Ispol'zovanie zoobentosa dlya monitoringa presnovodnykh vodoemov [Using zoobenthos to monitor freshwater reservoirs]. *Biol. vnutr. vod*, 2000, no 1, pp. 68-82.
28. Vorobeichik E.L., Sadykov O.F., Farafontov M.G. *Ekologicheskoe normirovanie tekhnogennykh zagryaznenii* [Environmental regulation of technogenic pollution]. Ekaterinburg, 1994, 280 p.
29. Datsenko Yu.S. *Evtrofirovanie vodokhranilishch. Gidrologo-gidrokhimicheskie aspekty* [Eutrophication of reservoirs. Hydrological and hydrochemical aspects]. Moscow, 2007, 252 p.
30. Shitikov V.K., Rozenberg G.S., Zinchenko T.D. *Kolichestvennaya gidroekologiya* [Quantitative hydroecology]. Tol'yatti, 2003, 463 p.
31. RD 52.24.566-94. *Metody toksikologicheskoi otsenki zagryazneniya presnovodnykh ekosistem* [RD 52.24.566-94. Methods of toxicological assessment of pollution of freshwater ecosystems]. Moscow, 1994, 130 p.
32. RD 52.24.662-2004. *Otsenka toksicheskogo zagryazneniya prirodnnykh vod i donnykh otlozhenii presnovodnykh ekosistem metodami biotestirovaniya s ispol'zovaniem kolovratok* [RD 52.24.662-2004. Evaluation of the toxic pollution of natural waters and sediments of freshwater ecosystems bioassay methods using rotifers]. Moscow, 2006, 60 p.
33. R 52.24.808-2014. *Otsenka toksichnosti poverkhnostnykh vod sushi metodom biotestirovaniya s ispol'zovaniem khlorofilla a* [P 52.24.808-2014. Evaluation of the toxicity of surface water by bioassay using chlorophyll a]. Bakaeva E.N., Ignatova N.A., Chernikova G.G. Rostov-on-Don, 2014, 23 p.
34. R 52.24.695-2007. *Otsenka toksicheskogo zagryazneniya prirodnnykh vod i donnykh otlozhenii vodnykh ekosistem po koeffitsientu regeneratsii populyatsii* [P 52.24.695-2007. Evaluation of the toxic pollution of natural waters and sediments of aquatic ecosystems at a rate of regeneration of the population]. Rostov-on-Don, 2008, 32 p.
35. Oksiyuk O.M., Zhukinskii V.N., Braginskii L.P. *Kompleksnaya ekologicheskaya klassifikatsiya kachestva poverkhnostnykh vod sushi* [Complex ecological quality classification of surface waters]. *Gidrobiol. zhurn.*, 1993, vol. 30, no 2, pp. 213-221.
36. Nikanorov A.M., Khoruzhaya T.A., Brazhnikova L.V., Zhulidov A.V. *Kachestvo vod: otsenka toksichnosti* [Water quality: evaluation of toxicity]. Saint Petersburg, 2000, 159 p.
37. PND F T 14.1:2:3:4.2-98. *Metodika opredeleniya toksichnosti vody po khemotaksicheskoi reaktsii infuzorii* [PND F T 14.1:2:3:4.2-98. Method of determining the toxicity of water on the chemotactic response of ciliates]. Moscow, 1998.
38. PND F T 16.2:2.2-98. *Metodika opredeleniya toksichnosti pochvy i donnykh osadkov po khemotaksicheskoi reaktsii infuzorii* [PND F T 16.2:2.2-98. Method of determining the toxicity of soils and bottom sediments on the chemotactic response of ciliates]. Moscow, 1998.
39. PND F T 14.1:2:3:4.11-04 (PND F 16.1:2.3:3.8-04). *Metodika opredeleniya toksichnosti vody i vodnykh vytyazhek iz pochv, osadkov stochnykh vod i otkhodov po izmeneniyu intensivnosti bakterial'noi bioluminesentsii test-sistemoi «Ekolyum»* [PND F T 14.1: 2: 3: 4.11-04 (PND F 16.1: 2.3: 3.8-04). Method of determining the toxicity of water and aqueous extracts from soils, sewage sludge and waste by changes in the intensity of bacterial bioluminescence test system "Ekolyum"]. Moscow, 2004.
40. Bakaeva E.N., Ignatova N.A. [Ecological and toxicological state of the lower reaches of the river Don]. *Antropogennoe vliyaniye na vodnye organizmy i ekosistemy* : materialy III vseros. konf. po vodnoi toksikologii [Anthropogenic impact on aquatic organisms and ecosystems: Proceedings of III All-Russia. Conf. on aquatic toxicology]. Borok, 2008, pp. 193-197.
41. Bakaeva E.N., Ignatova N.A. [Assessment of toxicity bioassay method of treatment: methodological support questions]. *Ekologiya. Ekonomika. Informatika* : materialy konf. [Ecology. Economy. Computer Science: materials conf.]. Rostov-on-Don, 2008, pp. 93-95.
42. Bakaeva E.N., Ignatova N.A. *Dinamika toksichnosti vod i donnykh otlozhenii vodnogo ob'ekta rekreatsii* [The dynamics of the toxicity of water and bottom sediments of a water body recreation]. *Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya (elektr. zhurn.)*, 2011, no 6.
43. Bakaeva E.N., Ignatova N.A., Chernikova G.G. *Ekotoksichnost' vod priplotinnogo uchastka Tsimlyanskogo vodokhranilishcha* [Ecotoxicity water reservoir dam part Tsimlyansk]. *Global'naya yadernaya bezopasnost'*, 2012, Spetsvyp., no 3, pp. 5-10.

УДК 911.9

РАДИЛОВСКИЙ БОЛОТНЫЙ МАССИВ: СОСТОЯНИЕ И ГЕОЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ*

© 2015 г. М.И. Крыжевич, П.С. Зубкова, Г.В. Шипкова

Крыжевич Мария Ивановна – кандидат географических наук, доцент, старший научный сотрудник, Крыловский государственный научный центр, Московское шоссе, 44, г. Санкт-Петербург, 196158, e-mail: maymars@mail.ru

Зубкова Полина Сергеевна – младший научный сотрудник, Институт наук о Земле Санкт-Петербургского государственного университета, 10-я линия В.О., 33-35, г. Санкт-Петербург, 199178, e-mail: sandra-arven@mail.ru

Шипкова Галина Владимировна – магистр, биолого-почвенный факультет, Южный федеральный университет, пр. Стачки, 219б, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: galina_shipkova@mail.ru

Kryzhevich Mariya Ivanovna – Candidate of Geographical Science, Associate Professor, Senior Researcher, Krylov State Research Centre, Moskovskoe Highway, 44, St. Petersburg, 196158, Russia, e-mail: maymars@mail.ru

Zubkova Polina Sergeevna – Junior Researcher, Institute of Earth Sciences of the Saint Petersburg State University, 10 liniya V.O., 33-35, St. Petersburg, 199178, Russia, e-mail: sandra-arven@mail.ru

Shipkova Galina Vladimirovna – Master, Biology and Soil Department, Southern State University, Stachki Ave., 219b, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: galina_shipkova@mail.ru

Радиловский болотный массив расположен в Хиловской низине и относится к бассейну р. Шелонь Ладожско-Ильменско-Западнодвинской провинции широколиственно-хвойных лесов и выпуклых грядово-мочажинных комплексов. Заложённые в 2012–2013 гг. физико-географические профили характеризуются быстрой и резкой сменой природных комплексов, что особенно характерно для восточных и окраинных частей болотного массива, что отмечается на ключевых участках. В пределах пробных площадок рассчитаны ресурсные показатели клюквы – запас и коэффициент урожайности зеленой массы. Анализ содержания микроэлементов в растениях проводился с помощью метода атомно-абсорбционной спектроскопии на спектрометре марки NOVAA 300.

Ключевые слова: болотный массив, ключевые участки, клюква, тяжелые металлы, метан.

Radilov raised bog is located in the Hilov lowland of Shelon basin. This area is devoted to Ladoga-Ilmen-Zapadnodvina province of broadleaved and coniferous forests and hummock-ridge bogs. Geographical profiles are characterized by quick and sharp change of ecosystems. This is particularly evident for the key areas of eastern and marginal parts bog. Within the test plots were calculated resource cranberry indicators: reserve and coefficient of productivity of green mass. Analysis of plants trace elements was carried out by atomic absorption spectroscopy with a spectrometer brand NOVAA 300.

Keywords: bog massive, key areas, cranberry, heavy metals, methane.

Радиловский болотный массив (Порховский район Псковской области) расположен в Хиловской низине и имеет обилие моренных гряд и холмов в основном песчаного и супесчаного состава. Речная сеть относится к бассейну р. Шелони, впадающей в оз. Ильмень.

Окрестности оз. Радилово с типичным верховым болотным массивом – это территория, где отроги Лужской возвышенности сочетаются с ландшафтами Хиловской низины, с преобладающими высотами 0–100 м (рисунок). В геоморфологическом отношении район относится к моренным и озерно-ледниковым равнинам. Территория сложена пермскими отложениями – известняками, доломитами, мергелями, песчаниками, повсюду распространены озерно-ледниковые отложения. Район исследований расположен в пределах Ладожско-Ильменско-Западнодвинской провинции широколиственно-хвойных лесов и выпуклых грядово-мочажинных комплексов

(ГМК) [1]. По лесорастительным условиям территория относится к Стругокрасненскому сосново-еловому песчано-суглинистому району холмисто-котловинных камовых комплексов [2]. По М.С. Боч (1999), Радиловский болотный массив относится к Восточноприбалтийской провинции зоны выпуклых грядово-мочажинных болот [3].

Для территории характерно значимое количество осадков (до 700 мм), несколько большее, чем для окрестностей. Оз. Радиловское со средней глубиной 1,5 м (максимальная – 2,5 м [4]) – проточное, из него вытекает р. Удоха (бассейн р. Шелони). Это район с преобладанием подзолистых, торфяных и подзолисто-глеевых почв. Для болот территории характерно доминирование западных видов (*Andromeda*, *Myrica gale*), частая встречаемость видов с юго-западным акцентом распределения (*Sphagnum tenellum*, *Sphagnum cuspidatum*), многие восточ

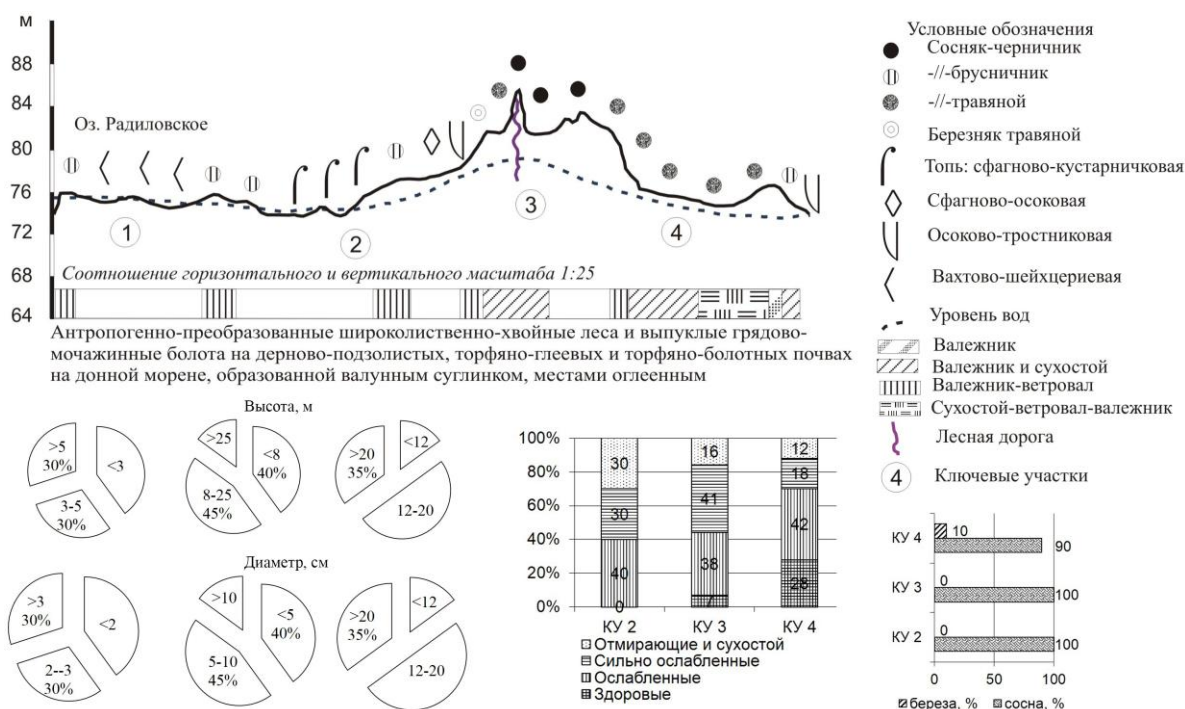
* Экспедиционные работы по определению потоков метана выполнялись при финансовой поддержке гранта Президента РФ НШ-5548.2014.5.

ные виды теряют свое значение или выпадают (*Sphagnum balticum*, *Cassandra*), наблюдается «инверсия» экологии некоторых видов [1].

Была заложена система физико-географических профилей через разные типы природных комплексов (ПК) на восточном и северо-восточном берегах озера. Часто такие профили характеризуются быстрой и радикальной сменой природных комплексов на коротких расстояниях, что характерно для окраинных частей болотного массива, где и природные, и антропогенные процессы идут с большей скоростью, формируя наиболее изменчивые и интересные сообщества. Отмечается антропогенное воздействие на территорию, особенно на юго-восточном побережье, где сужение и проходимость болота делают доступным хозяйственное использование озера местным населением (рыбная ловля, сбор ягод, грибов). В последние годы в летний период отмечаются заморы рыбы, связанные с перегреванием озера и развитием процессов эвтрофикации водоема. В рамках нашего исследования на ключевых участках ландшафтных профилей фиксировались состояние и динамика природных комплексов, лесотаксационные характеристики, а также антропогенные нарушения. Проводилось изучение содержания микроэлементов в растениях (*Ledum*

palustre L.), а также определение потоков метана в атмосферу. Содержание и потоки метана исследовали по методике, описанной в работе [5].

Приведем в качестве примера фрагмент физико-географического профиля № 2, проложенного к северо-западу от д. Радилово, захватывает лесоболотные, лесные и водно-болотные ПК. Местность относится к антропогенно-преобразованным широколиственно-хвойным лесам и выпуклым грядово-мочажинным болотам на дерново-подзолистых, болотно-подзолистых, торфяно-глеевых и торфяно-болотных почвах, на донной морене, образованной валунным суглинком, местами оглеенным. Профиль начинается с заболоченного сосняка на берегу оз. Радиловское, который сменяется шейхцериевой – сфагновой топью, далее – чередование травяного сосняка (на повышениях мезорельефа) и мохово-кустарничковых, осоково-тростниковых сообществ (на понижениях). На окраине минерального острова болотные комплексы сменяет заболоченный березняк, который при поднятии на коренной берег переходит в сфагновый сосняк, постепенно появляется примесь из березы и ели, затем сообщество переходит в ельник-черничник (рисунк).



Фрагмент физико-географического профиля № 2, 0,8 км к северо-западу от д. Радилово (Псковская область), сентябрь 2012 г. Морфометрические характеристики и жизненное состояние древостоя на КУ 2, 3, 4

На участках в понижениях воды выходят на поверхность, в мочажинах – уровень стояния болотных вод 10–15 см, присутствуют пятна деградированной растительности. Древостой на КУ 2, 3, 4 в основном

представлен разными формами сосны обыкновенной (рисунок), на КУ 1 древостой отсутствует. Состояние деревьев сильно ослабленное ($L_s = 2,9$, рисунок). Состояние древостоя ухудшается из-за постепенного

подтопления территории. Брусничник при понижении уступает место багульниковому сосняку с деревьями старших возрастов (присутствует сухостой, ветровал), в составе которого далее по трансекте появляется ель.

Морфометрические показатели деревьев сильно различаются от участка к участку и зависят от природных условий и степени антропогенной трансформации. Класс жизненного состояния древостоя выше при приближении к озеру, несмотря на сложные лесорастительные условия, что связано прежде всего с молодостью древостоя и слабой антропогенной трансформацией территории.

В пределах ключевых участков закладывались пробные площадки (ПП = 1 м²) для определения ресурсных показателей клюквы (запаса зеленой массы, коэффициента урожайности зеленой массы). Определялись проективное покрытие (%), морфометрические показатели растения [6]. Рассчитывались показатели, учитывающие урожайность зеленой массы при данном проективном покрытии. Полезный запас зелёной массы (Y) – по формуле $Y = S_{\text{проективного покрытия}} (m \pm 2 \% m)$, где m – масса; 2 %m – ошибка среднего арифметического; S – площадь исследуемой территории. Коэффициент урожайности зелёной массы (K) клюквы – по формуле $K = S_{\text{проективного покрытия}} (Q \cdot q) \cdot 10^{-3}$, где Q – плотность побегов; q – среднее количество листьев; S – площадь исследуемой территории.

По базовым морфометрическим показателям были вычислены запас зеленой массы (г/м³), коэффициент урожайности зеленой массы. Самые значимые запасы – на участках P16 (до 1,10 кг/м²), Б6 (до 0,73), минимальные – на Б4 (от 0,19) и P11 (от 0,20 кг/м²), среднее значение – 0,57 кг/м². Наибольший коэффициент

урожайности зеленой массы характерен для участков P16 (6,14), P19 (7,24), это глубинные части массива, часто с выходами метана и высоким проективным покрытием, минимален показатель K на P11 (1,06), значения P18 (3,2) близки к средним (3,84) для исследованных ПК.

Кроме того, запас зеленой массы клюквы (до 1,10 кг/м²) становится более значимым при высоком уровне стояния болотных вод. Однако по сравнению с другими территориями (например, Полистово-Ловатским болотным массивом, запасы зеленой массы в пушицево-сфагновых и кустарничко-сфагновых сообществах [6]) ресурсные запасы клюквы в пределах средних значений. Интересны колебания зеленой массы клюквы по годам (учитывая главным образом режим увлажнения и заморозки в период цветения), за исследуемый период они невелики и имеют тенденцию к уменьшению.

Анализ содержания микроэлементов в растениях проводился с помощью метода атомно-абсорбционной спектроскопии, подготовленные пробы анализировались на содержание микроэлементов на атомно-абсорбционном спектрометре марки NOVAA 300 [7]. Багульник болотный (*Ledum palustre* L.) выбран как специфическое и типичное растение верховых болот семейства вересковые (*Ericaceae*). В результате проведенных измерений концентрации микроэлементов (табл. 1) не превышают средних значений содержания рассеянных элементов в ежегодном приросте растительности Мировой суши [8]. При разложении органического вещества в болоте железо, тяжелые металлы накапливаются в слабопроточных водах, и их концентрация в растениях увеличивается, что прослеживается на участках в зависимости от морфологии.

Таблица 1

Концентрация Fe, Ni, Cr, Mn, Cu, Zn, Co, Pb, Cd в растениях *Ledum palustre* L., мг/кг, 2012–2013 гг.

№ станции	Fe (III)	Mn	Zn	Cu	Ni	Co	Cr	Pb	Cd
1. (3)	11,5	62,3	8,9	1,15	0,394	<0,05	<0,05	<0,05	<0,05
2. (4)	17,1	41,8	11,6	1,30	0,331	0,125	<0,05	<0,05	<0,05
3. (5)	9,2	109,2	6,4	1,63	0,257	0,054	<0,05	<0,05	<0,05
4. (6)	10,5	80,8	10,2	1,86	0,292	0,170	<0,05	<0,05	<0,05
5. (7)	17,5	70,9	12,1	2,36	0,498	0,154	<0,05	<0,05	<0,05
6. (8)	22,2	63,1	12,8	1,95	0,553	0,089	<0,05	<0,05	<0,05
7. (9)	27,7	50,5	7,4	1,38	0,503	0,098	<0,05	<0,05	<0,05

 – концентрация Fe, Ni, Cr, Mn, Cu, Zn, Co, Pb, Cd в фрагменте профиля № 2.

Измерение содержания и потоков метана в исследуемых ПК мы проводили по методике, описанной в работах [5, 9]. Наибольшие показатели для ПК Радиловского болотного массива (так же, как и крупной в Европе Полистово-Ловатской системы верховых болот) характерны для топей и областей, где существуют физико-химические или механические барьеры (пограничная зона болото–озеро). Именно в теплое время года благоприятные условия для активизации деятельности метанообразующих микроорганизмов способствуют увеличению содержания метана в воде и почвах и его эмиссии в атмосферу. С точки зрения исследования содержания и эмиссии метана особенно

интересны черные (юнгерманиевые) мочажины, с поверхности которых в жаркую погоду выделяется газ в виде крупных пузырей.

Среди исследованных типов ПК максимальное содержание метана наблюдалось как в воде, так и в торфах под переходными (соответственно до 1300–3132 мкл/л и 1,9–5,4 мкг/г в.о.) и сфагновыми топиями (227 мкл/л и до 1,84–13,6 мкг/г в.о., табл. 2). Минимальные содержания метана обнаружены в почвах под сфагновыми лесами легкого супесчаного состава, что, вероятно, связано с аэрированием верхних почвенных слоев. Содержание метана в воде рек Коломенка и Цевла [5] имеет сходные значения, а донные отложе-

ния содержат в два раза меньше метана. Вероятно, меньшие значения обусловлены пониженным количеством илистых частиц. Поток метана с поверхности переходных (максимальный) и сфагновых топей входят в диапазон значений, характерных для ПЛБС [5].

Наибольшие потоки газа наблюдались с поверхности топей (особенно переходных). Эти ПК характеризовались высокой обводненностью, местами

угнетенным состоянием сфагновых мхов [10, 11] и, вероятно, высокой активностью микроорганизмов. Высоким содержанием метана в воде и его потоками характеризуется участок переходного болота, занятый травяным березняком и сопряженный с прибрежной зоной оз. Радиловского, где наряду с аккумуляцией органики идет осаждение терригенного минерального материала.

Таблица 2

Результаты экспериментальных определений эмиссии метана и его содержания в воде, торфе и донных отложениях ландшафтов верховых болот, 2012 [10]

№ станции	Координаты, с.ш./в.д.	Микроландшафт	Содержание CH_4			Поток CH_4 , мг/м ² ч
			вода, мкл/л	торф (почва), мкг/г в.л.о.	донные отл., мкг/г в.л.о.	
3	58°01'9,20"/29°16'27,1"	Водные и водно-болотные комплексы: Вахтово-шейхцериевая, ковер	227	1,8–13,6	–	6,23
8	58°01'42,4"/29°18'59,4"	Топь переходная, осоковая, сильно обводненная	1300	–	–	52,12
1	58°00'58,0"/29°16'19,9"	Березняк осоковый, заболоченный	3132	1,9–5,4	–	76,77
2	58°00'57,9"/29°16'20,2"	оз. Радиловское, прибрежная зона	119	–	–	24,78
9	58°00'22,7"/29°23'40,8"	р. Коломенка, прибрежная зона	142,5	–	8,31–23,2	–
7	58°01'42,4"/29°18'59,4"	Лесоболотные комплексы: Сосняк брусничник сфагновый	185,8	0,2–2,1	–	7,46
6	58°01'37,1"/29°19'2,51"	Сосняк-черничник сфагновый	–	0,024–0,13	–	6,94

Грядово-мочажинные комплексы расположены на близком гипсометрическом уровне с чередующимися с ними сфагновыми топиями, так как измерение потоков на них не проводилось, то, проведя аналогию с ПЛБС, можно предположить, что значения для мочажин ГМК примерно 12,8–13,6 для гряд 0,7 мг/м²ч и менее, в воде мочажин содержится 227–424 мкл/л метана. Мочажины грядово-мочажинных комплексов (с поверхности которых в жаркую погоду мы наблюдали выделение газа в виде пузырьков) – один из главных источников поступления метана в атмосферу с поверхности верховых болот.

Таким образом, для Радиловского болотного массива характерны следующие особенности:

1. Массив типичен для верховых болот Северо-Запада России и расположен в пределах Ладожско-Ильменско-Западнодвинской провинции широколиственно-хвойных лесов и выпуклых грядово-мочажинных комплексов.

2. Болота района исследований слабо изменены человеком. Наибольшее воздействие наблюдается в юго-восточной части болотного массива, где побережье озера наиболее доступно местному населению (рыбная ловля, сбор ягод, грибов).

3. В летний период на Радиловском озере отмечаются заморы рыбы, связанные с перегревом озера и интенсивным развитием процессов эвтрофикации водоема.

4. В работе приведен пример фрагмента ландшафтного профиля (и ключевые участки) со значительной сменой природных комплексов от уреза воды оз. Радиловского к минеральному острову и далее вглубь массива.

5. Запасы зеленой массы клюквы значительны у дренажных канав юго-восточной части болота, в центре они характеризуются средними значениями, типичными для болот Северо-Запада России.

6. Концентрация микроэлементов в растениях не превышает средних значений содержания рассеянных элементов в ежегодном приросте и зависит от морфологии участков.

7. Максимальное содержание и эмиссия метана наблюдается на топиях и мочажинах ГМК.

Литература

1. Кац Н.Я. Болота земного шара. М., 1971. 296 с.
2. Григорьева С.О. Леса таежной части Псковской обл.: автореф. дис. ... канд. биол. наук. Л., 1980. 21 с.
3. Водно-болотные угодья России. Т. 2: Ценные болота / под ред. М.С. Боч. М., 1999. 85 с.
4. Лесенко В.К. Псковские озера. Л., 1988. 112 с.
5. Федоров Ю.А., Гарькуша Д.Н., Шипкова Г.В. Эмиссия метана торфяными залежами верховых болот Псковской области // География и природные ресурсы. 2015. № 1. С. 88–97.

6. Мартынова М.И., Шипкова Г.В. Изучение продуктивности клюквенников Полистово-Ловатского болотного массива // Эколого-географические проблемы регионов России: материалы III Всерос. заоч. науч.-практ. конф. Самара, 2012. С. 63–65.
7. Крыжевский М.И., Зубкова П.С., Шипкова Г.В. Исследования юго-западной части Полистово-Ловатского болотного массива // Болота и биосфера: материалы VIII Всерос. с междунар. участием науч. школы молодых ученых. Томск, 2012.
8. Добровольский В.В. Основы биогеохимии. М., 2003. 400 с.
9. Федоров Ю.А., Тамбиева Н.С., Гарькуша Д.Н., Хорошевская В.О. Метан в водных экосистемах. Ростов н/Д, 2007. 330 с.
10. Шипкова Г.В., Мартынова М.И., Федоров Ю.А., Яблоков М.С., Фурман К.И. Экспедиционные исследования в Полистово-Ловатской болотной системе – 2011 // Актуальные проблемы науки и образования. 2012. № 3. URL: <http://www.science-education.ru/103-6288> (дата обращения: 25.01.2015).
11. Мартынова М.И., Яблоков М.С., Шипкова Г.В., Михайлова Е.А. Современные природные комплексы окраинных лесов Полистово-Ловатского болотного массива // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2010. № 2. С. 127–130.
4. Lesnenko V.K. Pskovskie ozera [Pskov region lakes]. Leningrad, 1988, 112 p.
5. Fedorov Yu.A., Gar'kusha D.N., Shipkova G.V. Emissiya metana torfyanymi zalezhami verkhovykh bolot Pskovskoi oblasti [Methane emissions from the Pskov region peat lands]. *Geografiya i prirodnye resursy*, 2015, no 1, pp. 88-97.
6. Martynova M.I., Shipkova G.V. [Productivity research of cranberry the Polisto-Lovat bog massive]. *Ekologo-geograficheskie problemy regionov Rossii. Materialy III Vserossiiskoi zaochnoi nauchno-prakticheskoi konferentsii* [Ecological and geographical problems of the regions of Russia. Materials 3 All-Russia correspondence scientific-practical conference]. Samara, 2012, pp. 63-65.
7. Kryzhevich M.I., Zubkova P.S., Shipkova G.V. [Studies of the south-west of the Polisto-Lovat bog massive]. *Bolota i biosfera. Materialy VIII Vseros. s mezhdunar. uchastiem nauch. shkoly molodykh uchenykh* [Bogs and biosphere. Proceedings of 8 All-Russia with international participation scientific school of young scientists]. Tomsk, 2012.
8. Dobrovolskii V.V. *Osnovy biogeokhimii* [Principles of biogeochemistry]. Moscow, 2003, 400 p.
9. Fedorov Yu.A., Tambieva N.S., Gar'kusha D.N., Khoroshevskaya V.O. *Metan v vodnykh ekosistemakh* [Methane in aquatic ecosystems]. Rostov-on-Don, 2007, 330 p.
10. Shipkova G.V., Martynova M.I., Fedorov Yu.A., Yablokov M.S., Furman K.I. *Ekspeditsionnye issledovaniya v Polistovo-Lovatskoi bolotnoi sisteme - 2011* [Field studies in the Polisto-Lovat bog system - 2011]. *Aktual'nye problemy nauki i obrazovaniya*, 2012, no 3. Available at: <http://www.science-education.ru/103-6288> (accessed 25.01.2015).
11. Martynova M.I., Yablokov M.S., Shipkova G.V., Mikhailova E.A. *Sovremennye prirodnye komplekсы okrainnykh lesov Polistovo-Lovatskogo bolotnogo massiva* [Present natural complexes of the Polisto-Lovat bog massive marginal forest]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2010, no 2, pp. 127-130.

References

1. Kats N.Ya. *Bolota zemnogo shara* [Marshes of the globe]. Moscow, 1971, 296 p.
2. Grigor'eva S.O. *Lesa taezhnoi chasti Pskovskoi obl.* : avtoref. dis. ... kand. biol. nauk [Boreal forests of the Pskov region]. Leningrad, 1980, 21 p.
3. *Vodno-bolotnye ugod'ya Rossii. T. 2: Tsennyye bolota* [Wetlands of Russia. Vol. 2: Securities swamp]. Ed. M.S. Boch. Moscow, 1999, 85 p.

Поступила в редакцию

3 февраля 2015 г.

УДК 622.279.23

ОЦЕНКА МАСШТАБОВ МАССОПЕРЕНОСА ФЛЮИДОВ И ХИМИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАЗРАБАТЫВАЕМОЙ ГАЗОКОНДЕНСАТНОЙ ЗАЛЕЖИ

© 2015 г. И.Н. Петренко

Петренко Иван Николаевич – аспирант, Северо-Кавказский федеральный университет, ул. Пушкина, 1, г. Ставрополь, 355009, e-mail: petrenko-rng071@mail.ru

Petrenko Ivan Nikolaevich – Post-Graduate Student, North-Caucasus Federal University, Pushkin St., 1, Stavropol, 355009, Russia, e-mail: petrenko-rng071@mail.ru

Месторождение представлено переслаиванием коллекторов и неколлекторов. Коллекторы содержат промышленные запасы газа. В неколлекторах – в основном вода. Все флюиды содержат химические элементы. На примере газоконденсатного месторождения рассмотрено соотношение всех пород и насыщающих их флюидов, которое показало наличие значительных объемов газа в коллекторах, а в неколлекторах – огромных количеств поровой воды. Рассчитаны объемы массопереноса элементов при фазовых переходах воды. Оценены объемы порового пространства неколлекторов, из которых возможна эмиграция флюидов из-за возникшего перепада давления между неколлекторами и газонасыщенными коллекторами.

Ключевые слова: коллектор, неколлектор, газ, нефть, остаточная вода, химические элементы, массоперенос.

The deposit is represented interbedded reservoir and non-reservoir. Collectors contain recoverable reserves of gas. In the non-reservoir contains mainly water. All fluids contain chemical elements. On the example of gas-condensate field is considered the ratio of all breeds and their saturating fluids, which showed the presence of significant amounts of gas in reservoirs, and huge amounts of non-reservoir pore water. Calculate the volume of the mass transfer elements in phase transitions of water. Estimate the amount of non-reservoir pore space, from which it is possible emigration of fluids due to this pressure difference between the non-reservoir and gas saturated reservoirs.

Keywords: reservoir, non-reservoir, gas, oil, residual water, chemical elements, mass transfer.

Большинство месторождений углеводородов, включая газоконденсатные залежи, приурочено к куполовидным складкам, разрезы которых представлены переслаиванием пород-коллекторов и пород-неколлекторов. Обычно выделяются кондиционные коллекторы, в которых определяются начальные и текущие запасы углеводородов. Французские специалисты при изучении газоконденсатного месторождения GE выделили также некондиционные коллекторы, очень близкие по основным фильтрационным показателям кондиционным. По сложившейся практике в большинстве случаев породы-неколлекторы в структуре, содержащей залежь углеводородов, не рассматриваются.

Нами для месторождения GE выполнены соответствующие расчеты, позволившие определить соотношение пород кондиционных коллекторов, некондиционных коллекторов и неколлекторов (рис. 1а). Основные запасы газа приурочены к кондиционным коллекторам, объем которых от общего объема пород в месторождении составляет 35,7 %. Поровый объем кондиционных коллекторов, в которых сосредоточены запасы газа и конденсата, равен 53,1 % от общего порового объема всех пород (рис. 1б), а в абсолютных величинах объем начальных запасов газа на 91,75 %

сосредоточен в поровом объеме кондиционных коллекторов (рис. 1в). Месторождение GE является вторичным газоконденсатным. Изначально это было нефтяное месторождение, затем в структуру поступил газ, вытеснивший нефть и частично её растворивший. В кондиционных и некондиционных коллекторах имеются зоны с остаточной нефтенасыщенностью пород 4÷12 %. В кондиционных и некондиционных коллекторах сосредоточено 46,7 % остаточной нефти (рис. 1г). Все породы месторождения в той или иной мере насыщены водой. В кондиционных и некондиционных коллекторах это – остаточная вода, не вытесненная заполнявшими ловушку нефтью, а затем газом. В неколлекторах находится поровая вода (рис. 1д). В месторождении GE объемы воды огромны: количество остаточной воды в кондиционных коллекторах оценивается в 2,21 млрд м³, количество поровой воды в неколлекторах – в 7,16 млрд м³. В пределах месторождения все воды насыщены газами.

Большинство газовых и газоконденсатных месторождений разрабатывается при упруговодонапорном режиме, при котором, несмотря на внедрение законтурных или подошвенных вод в залежь, происходит снижение пластового давления. При этом энергия гид-

родинамического бассейна, к которому приурочено месторождение, имеет огромное значение для процесса его разработки. Если гидротермальная система огромна и обладает большой упругой энергией, а породы-коллекторы имеют хорошую проницаемость, то вне-

дрение воды в залежь может быть весьма активным и продолжительным во времени с обводнением эксплуатационных скважин и поддержанием пластового давления.

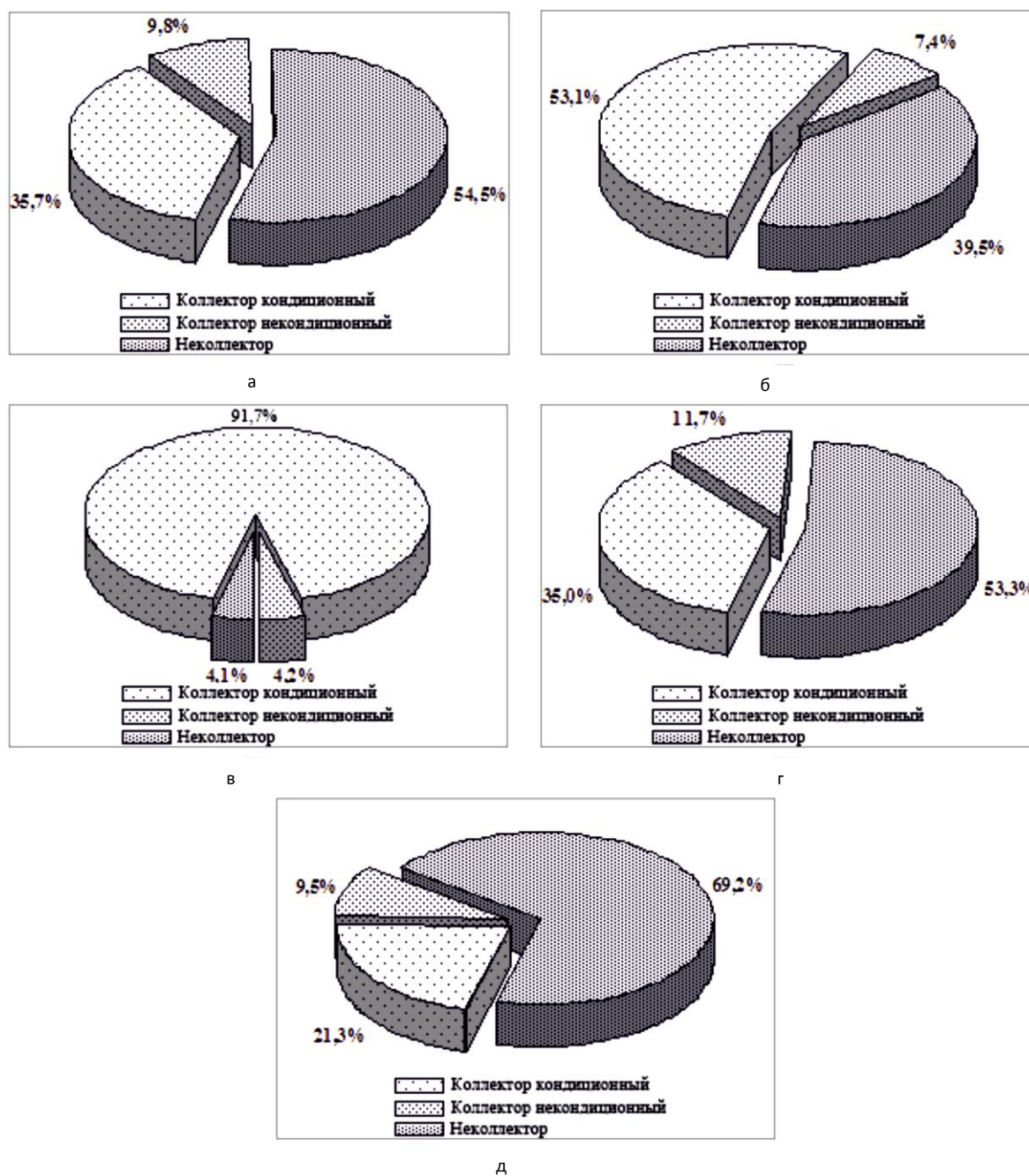


Рис. 1. Соотношение пород (а), поровых объёмов (б), запасов газа (в), «ресурсов» остаточной нефти (г) и воды (д) в месторождении GE

Упруговодонапорный режим разработки сопровождается массопереносом пластовых вод из законтурной или подошвенной зон в залежи, и объёмы поступивших вод во многие месторождения были

оценены специалистами [1]. Имеются многочисленные публикации, посвященные перетокам флюидов как в пределах месторождений, так и за их пределами [2–6]. В настоящей работе выполнены оценки по

фазовым переходам флюидов и по массопереносу с ними химических элементов в месторождении GE, основные начальные параметры которого представлены в табл. 1.

Известно, что изотермическое снижение пластового давления в газовой залежи сопровождается испарением остаточной воды [7]. Для месторождения GE по специально созданной программе были выполнены расчеты испарения остаточной воды в процессе разработки месторождения (табл. 2).

За 50 лет разработки испарилось 4,02 млрд м³ остаточной воды.

Несмотря на низкую минерализацию, конденсационная вода содержит многие химические элементы (рис. 2).

По их средним концентрациям в водяном паре (в газозапарогенной влаге [8]) определена масса элементов, поступивших в пластовый газ при испарении остаточной воды (табл. 3).

Как было показано на рис. 1, в некондиционных коллекторах и неколлекторах содержатся огромные количества флюидов в виде газа, остаточной нефти и поровой воды.

Таблица 1

Параметры залежей месторождения GE

Параметры залежей	Залежь		
	I	II	III
Площадь газоносности, км ²	3171	962	1382
Средняя толщина пласта, м	13,4	8,7	18,1
Объём газонасыщенных пород, 10 ⁶ м ³	42493	8368	25020
Средняя пористость, %	15,6	14,2	17,5
Поровый объём, 10 ⁶ м ³	6628,9	1188,3	4378,5
Средняя проницаемость, 10 ⁻¹⁵ м ²	152,86	105,44	388,69
Средняя водонасыщенность пород, %	19,6	22,2	14,8
Средняя газонасыщенность пород, %	80,4	77,8	85,2
Начальное пластовое давление, МПа	30,51	30,51	30,51
Пластовая температура, °С	91	91	91
Начальные запасы газа, млрд м ³	1263	214	881

Таблица 2

Количество испарившейся остаточной воды в процессе разработки месторождения GE

Периоды разработки, лет	Отбор газа за период, млрд м ³	Пластовое давление на конец периода, МПа	Объём газа-абсорбента, млрд м ³	Влагосодержание пластового газа на конец периода, г/м ³	Количество испарившейся воды, млн м ³
1–5	2,012	30,49	2356,74	1,722	1,503
6–10	9,657	30,29	2347,93	1,728	15,12
11–15	15,902	29,99	2332,65	1,738	22,88
16–20	41,26	29,61	2293,96	1,750	28,00
21–25	103,938	26,58	2199,16	1,861	247,9
26–30	337,858	21,44	1883,08	2,121	533,7
31–35	378,913	16,60	1507,37	2,508	652,5
36–40	438,352	11,79	1071,05	3,214	898,2
41–45	384,921	8,21	674,11	4,295	936,9
46–50	232,643	6,08	428,15	5,529	684,4
Итого					4021,11

Периоды	Ряды	ГРУППЫ ЭЛЕМЕНТОВ															
		I		II		III		IV		V		VI		VII		VIII	
		a	б	a	б	a	б	a	б	a	б	a	б	a	б	б	a
1	1	H															He
2	2	Li	Be	B		C		N		O		F					Ne
3	3	Na	Mg	Al		Si		P		S		Cl					Ar
4	4	K	Ca		Sc		Ti		V		Cr		Mn		Fe	Co	Ni
	5		Cu		Zn		Ga		Ge		As		Se		Br		Kr
5	6	Rb	Sr		Y		Zr		Nb		Mo		Tc		Ru	Rh	Pd
	7		Ag		Cd		In		Sn		Sb		Te		I		Xe
6	8	Cs	Ba		лантаноиды		Hf		Ta		W		Re		Os	Ir	Pt
	9		Au		Hg		Tl		Pb		Bi		Po		At		Rn
7	10	Fr	Ra		актиноиды		Rf		Db		Sg		Bh		Hn	Mt	

Лантаноиды	La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd
		Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
Актиноиды	Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm
		Bk	Cf	Es	Fm	Md	(No)	(Lr)

Рис. 2. Элементы, обнаруженные в конденсационных водах

Таблица 3

Массоперенос химических элементов при испарении остаточной воды в месторождении GE

Элемент	Содержание, мг/дм ³	Массоперенос, т	Элемент	Содержание, мг/дм ³	Массоперенос, т	Элемент	Содержание, мг/дм ³	Массоперенос, т
Al	0,532	3,08	Bi	0,00200	0,0116	Na	31,4	181,8
Fe	159,7	925,6	Zn	3,60	20,9	Mg	4,65	26,9
Mn	2,33	13,5	Sn	0,00300	0,0174	Si	2,80	16,2
Ni	0,485	2,81	Ge	0,00233	0,0135	Cl	93,9	544,3
Co	0,101	0,584	Ga	0,101	0,584	K	2,50	14,5
Ti	0,0512	0,297	Sc	0,00200	0,0116	Ca	28,8	167,1
V	0,00473	0,0274	Y	0,00400	0,0232	Br	0,0930	0,539
Cr	0,0660	0,382	Yb	0,000500	0,00290	I	0,00670	0,0388
Mo	0,00298	0,0172	Li	0,0507	0,294	HCO ₃ ⁻	158,3	917,4
Zr	0,00673	0,0390	Sr	0,562	3,25	SO ₄ ²⁻	26,0	150,6
Cu	3,44	19,9	Ba	0,721	4,18	NH ₄ ⁺	9,00	52,2
Pb	0,362	2,10	B	0,250	1,45	Итого		3071,78
Ag	0,000360	0,00209	F	0,210	1,22			

Широко известна способность флюидов, в особенности газов, проникать через породы в случае наличия перепада давления. Установлено, что для начала

движения жидкости или газа в поровом пространстве породы необходим начальный градиент давления [9]. В уникальном эксперименте, выполненном Т.П. Жузе

и Т.П. Сафроновой [10], через глину пропусклся углекислый газ. При перепаде давления 12÷15 МПа в течение 4 сут через керн толщиной 0,2 м с проницаемостью $0,816 \cdot 10^{-18} \text{ м}^2$ прошло 9 поровых объемов газа. Данные эксперимента свидетельствуют о том, что по газу начальный градиент давления для глинистой породы с указанной проницаемостью составляет 60÷75 МПа/м. В месторождении из неколлекторов в коллекторы в первую очередь будет эмигрировать вода. Установлено, что при скоростях фильтрации 0,1÷0,01 см/с скорость миграции газовой фазы в 4÷10 раз выше скорости жидкой фазы [11]. Это дает нам основание условно увеличить начальный градиент давления для воды в 5 раз. Таким образом, для глины он составляет 300÷375 МПа/м, хотя можно предполагать, что эти величины завышены. Представляет теоретический и практический интерес выполнить оценку объёма порового пространства неколлекторов, из которого может частично эмигрировать поровая вода при начальном градиенте давления 375 МПа/м.

Толщина неколлектора, из которого частично будет эмигрировать вода, находится из выражения

$$h = \frac{\Delta P_{\text{пл}}}{\Delta P_0},$$

где $\Delta P_{\text{пл}}$ – снижение пластового давления, МПа; ΔP_0 – начальный градиент давления, МПа/м.

Объём породы, которая будет реагировать на возращение перепада давления на границе неколлектор–коллектор, получаем из выражения

$$V_{\text{пор}} = h \cdot S,$$

где h – реагируемая толщина породы-неколлектора; S – площадь контактирования коллекторов и неколлекторов, м^2 .

Поровый объём неколлектора, в пределах которого возможна частичная эмиграция флюидов, находится из выражения

$$V_{\text{по}} = V_{\text{пор}} \cdot m,$$

где $V_{\text{пор}}$ – объём реагируемой породы, м^3 ; m – коэффициент пористости неколлекторов, принятый равным 0,10.

Полученные результаты приведены в табл. 4 и на рис. 3. Как видно из табл. 4, даже при исключительно высоком значении начального градиента давления, равном 375 МПа/м, поровый объём реагируемой породы на перепад давления между неколлекторами и коллекторами значителен и составляет 73,0 млн м^3 . Если предположить, что за 47-летний период разработки месторождения из неколлекторов в коллекторы эмигрировала 1/10 часть поровой воды, то получим 7,3 млн м^3 .

Как уже отмечалось, из неколлекторов в первую очередь эмигрирует поровая вода. Из-за понижения давления из поровой воды выделяется растворенный газ, и на определенной стадии этого понижения фазовая проницаемость для газа в какой-то части реагируемой толщины неколлектора может оказаться достаточной для его эмиграции в коллекторы.

Таблица 4

10. Объём пород-неколлекторов, из которых происходит эмиграция флюидов

Период разработки, лет	Пластовое давление, МПа	Снижение пластового давления, МПа	Реагируемая толщина неколлектора, см	Объём реагируемой породы, млн м^3	Поровый объём реагируемой породы, млн м^3
1–5	30,39	0,12	0,0320	3,53	0,35
6–10	30,12	0,39	0,104	11,5	1,15
11–15	29,77	0,74	0,197	21,8	2,2
16–20	28,32	2,19	0,584	64,4	6,4
21–25	23,39	7,12	1,90	209,4	20,9
26–30	18,54	11,97	3,19	352,1	35,2
31–35	13,66	16,85	4,49	495,6	49,6
36–40	9,36	21,15	5,64	622,1	62,2
41–47	5,70	24,81	6,62	729,7	73,0

Представленный материал позволяет считать необходимым в пределах каждого месторождения определять объёмы всех пород, а также количество насы-

щающих их флюидов, что позволит более полно оценивать динамику флюидов с оценкой их возможных перетоков из неколлекторов в коллекторы.

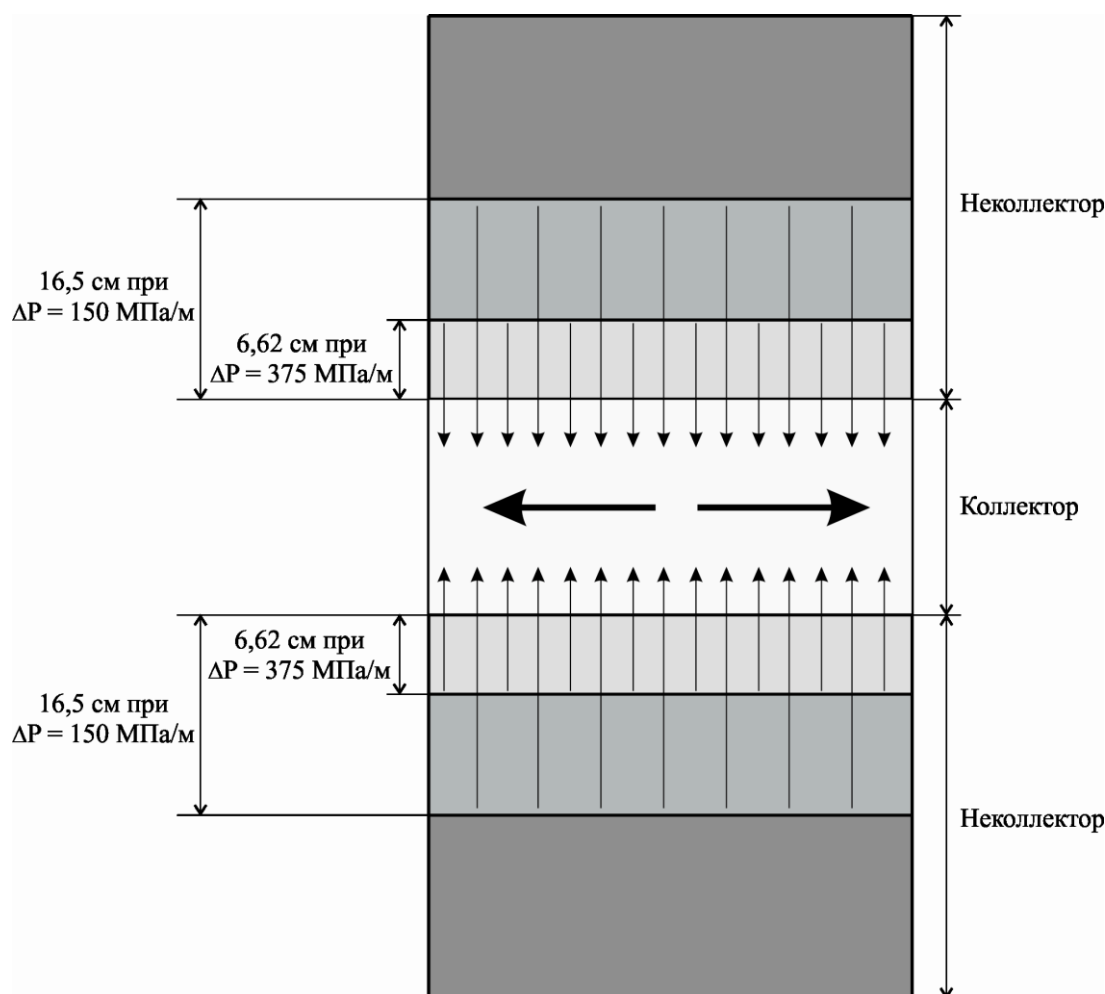


Рис. 3. Толщины неколлекторов, реагирующих на снижение пластового давления в залежи

Литература

1. Петренко В.И., Зиновьев В.В., Зленко В.Я., Зиновьев И.В., Остроухов С.Б., Петренко Н.В. Геолого-геохимические процессы в газоконденсатных месторождениях и ПХГ. М., 2003. 511 с.
2. Джеванишир Р.Д., Алиев Р.Ю. К оценке проявлений внутреннего водонапорного режима по геофизическим и гидродинамическим данным // Геология нефти и газа. 1985. № 8. С. 14–17.
3. Гудзенко В.В. Использование отношения $^{226}\text{Ra}/^{222}\text{Ra}$ при решении некоторых задач гидрогеологии // Изотопные исследования природных вод. М., 1979. С. 182–191.
4. Закиров С.Н., Контарев А.А. Выработка запасов нефти в линзовидных коллекторах // Докл. РАН. 2007. Т. 413, № 1. С. 68–70.
5. Петренко В.И., Королев С.Н., Бигун П.В., Славицкий В.С. О возможном проявлении флюидонапорного режима на Воробьевском нефтяном месторождении // Газовой отрасли – новые технологии и новая техника: тез. докл. Междунар. науч.-практ. конф., г. Ставрополь, 9–12 сент. Ставрополь, 2002. С. 47–49.
6. Тимонин В.И., Булатов А.И., Здоров Ф.Г., Крылов Д.А., Паршин Ю.А., Васюнов В.Д. Резервы повышения продуктивности скважин и нефтеотдачи пластов на месторождении Узень // Нефтяное хозяйство. 1980. № 6. С. 34–38.
7. Крафт Б.С., Хокинс М.Ф. Прикладной курс технологии добычи нефти. М., 1963. 460 с.
8. Петренко В.И., Зленко В.Я., Петренко Н.Н. Геолого-геохимическая роль газозапарогенной влаги природных парогазовых систем // Геологическая эволюция взаимодействия воды с горными породами: тр. Всерос. конф. с участием иностранных ученых. Томск, 2012. С. 409–413.
9. Рассохин Г.В., Сливков В.И., Уляшев В.Е. Экспериментальные исследования величин предельного градиента давления для коллекторов месторождений Коми АССР // Разработка и эксплуатация газовых и газоконденсатных месторождений. 1975. № 10. С. 18–23.
10. Жузе Т.П., Сафронова Т.П. Экспериментальное исследование закономерностей переноса углеводородов (битума) через осадочные породы сжатыми газами // Генезис нефти и газа. М., 1967. С. 404–412.
11. Аверкин Ю.А. Динамика отложения компонентов из гидротермального раствора при выкипании CO_2 // Геохимия. 1987. № 11. С. 1580–1585.

References

1. Petrenko V.I., Zinov'ev V.V., Zlenko V.Ya., Zinov'ev I.V., Ostroukhov S.B., Petrenko N.V. *Geologo-geokhimicheskie protsessy v gazokondensatnykh mestorozhdeniyakh i PKhG*

- [Geological and geochemical processes in gas-condensate fields and UGS]. Moscow, 2003, 511 p.
2. Dzhevanshir R.D., Aliyarov R.Yu. K otsenke proyavlenii vnutrennego vodonapornogo rezhima po geofizicheskim i gidrodinamicheskim dannym [Estimation of the manifestations of internal water drive on geophysical and hydrodynamic data]. *Geologiya nefti i gaza*, 1985, no 8, pp. 14-17.
 3. Gudzenko V.V. Ispol'zovanie otnosheniya $^{226}\text{Ra}/^{222}\text{Ra}$ pri reshenii nekotorykh zadach gidrogeologii [Using the relationship $^{226}\text{Ra}/^{222}\text{Ra}$ in solving certain hydrogeology problems]. *Izotopnye issledovaniya prirodnikh vod*. Moscow, 1979, pp. 182-191.
 4. Zakirov S.N., Kontarev A.A. Vyrabotka zapasov nefti v linzovidnykh kollektorakh [Development of oil reserves in the lenticular reservoirs]. *Dokl. RAN*, 2007, vol. 413, no 1, pp. 68-70.
 5. Petrenko V.I., Korolev S.N., Bigun P.V., Slavitskii V.S. [On the possibility of fluid pressure mode on Vorobiev oilfield]. *Gazovoi otrasli – novye tekhnologii i novaya tekhnika. Tez. dokl. Mezhdunar. nauch.-prakt. konf. Stavropol', 9-12 sent. 2002* [Gas industry - new technologies and new equipment. Abstracts of the International Scientific and Practical Conference, Stavropol, September 9-12, 2002]. Stavropol, 2002, pp. 47-49.
 6. Timonin V.I., Bulatov A.I., Zdorov F.G., Krylov D.A., Parshin Yu.A., Vasyuntsov V.D. Rezervy povysheniya produktivnosti skvazhin i nefteotdachi plastov na mestorozhdenii Uzen' [Reserves of increase well productivity and oil recovery at Uzen field]. *Neftyanoe khozyaistvo*, 1980, no 6, pp. 34-38.
 7. Kraft B.S., Khokins M.F. *Prikladnoi kurs tekhnologii dobychi nefti* [Applied technology of oil production rate]. Moscow, 1963, 460 p.
 8. Petrenko V.I., Zlenko V.Ya., Petrenko N.N. [Geological and geochemical role of gazo-evaporigenic moisture of natural combined-cycle systems]. *Geologicheskaya evolyutsiya vzaimodeistviya vody s gornymi porodami: trudy Vserossiiskoi konferentsii s uchastiem inostrannykh uchenykh* [Geological evolution of the interaction of water with rocks: Proceedings of the All-Russian conference with participation of foreign scientists]. Tomsk, 2012, pp. 409-413.
 9. Rassokhin G.V., Slivkov V.I., Ulyashev V.E. Eksperimental'nye issledovaniya velichin predel'nogo gradienta davleniya dlya kollektorov mestorozhdenii Komi ASSR [Experimental studies of the limit values of the pressure gradient for reservoirs of the Komi Republic]. *Razrabotka i ekspluatatsiya gazovykh i gazokondensatnykh mestorozhdenii*, 1975, no 10, pp. 18-23.
 10. Zhuze T.P., Safronova T.P. Eksperimental'noe issledovanie zakonomernostei perenosu uglevodorodov (bituma) cherez osadochnye porody szhatymi gazami [Experimental study of patterns of hydrocarbons migration (bitumen) through sedimentary rocks compressed gases]. *Genezis nefti i gaza*, Moscow, 1967, pp. 404-412.
 11. Averkin Yu.A. Dinamika otlozheniya komponentov iz gidrotermal'nogo rastvora pri vykipanii SO_2 [The dynamics of the components deposits of hydrothermal solution at boiling CO_2]. *Geokhimiya*, 1987, no 11, pp. 1580-1585.

МЕДИЦИНА

УДК 617.583-089.28/29-06

АНАЛИЗ ОСЛОЖНЕНИЙ ЭНДОПРОТЕЗИРОВАНИЯ КОЛЕННОГО СУСТАВА

© 2015 г. А.В. Алабут, В.Д. Сикилинда, С.Г. Чесников, М.Е. Тимошенко,
А.А. Скаржинский, М. О. Х. Хаммад

Алабут Анна Владимировна – доктор медицинских наук, доцент, кафедра травматологии и ортопедии, заведующая травматолого-ортопедическим отделением клиники, Ростовский государственный медицинский университет, пер. Нахичеванский, 29, г. Ростов-на-Дону, 344022, e-mail: alabut@mail.ru

Сикилинда Владимир Данилович – доктор медицинских наук, профессор, заведующий кафедрой травматологии и ортопедии, Ростовский государственный медицинский университет, пер. Нахичеванский, 29, г. Ростов-на-Дону, 344022, e-mail: v.sikilinda@yandex.ru

Чесников Сергей Геннадьевич – заведующий отделением травматологии и ортопедии, Ростовская клиническая больница, ул. Пешкова, 34, г. Ростов-на-Дону, 344045, e-mail: annakard@yandex.ru

Тимошенко Михаил Евгеньевич – врач, отделение травматологии и ортопедии, Ростовская клиническая больница, ул. Пешкова, 34, г. Ростов-на-Дону, 344045.

Скаржинский Алексей Александрович – врач, отделение травматологии и ортопедии, Ростовская клиническая больница, ул. Пешкова, 34, г. Ростов-на-Дону, 344045.

Хаммад Мохаммад Омар Хасан – аспирант, кафедра травматологии и ортопедии, Ростовский государственный медицинский университет, пер. Нахичеванский, 29, г. Ростов-на-Дону, 344022.

Alabut Anna Vladimirovna – Doctor of Medical Science, Associate Professor, Department of Traumatology and Orthopedics, Head of Traumatology and Orthopedic Department of Hospital, Rostov State Medical University, Nakhichevanskii Lane, 29, Rostov-on-Don, 344022, Russia, e-mail: alabut@mail.ru

Sikilinda Vladimir Danilovich – Doctor of Medical Science, Professor, Head of Traumatology and Orthopedic Department, Rostov State Medical University, Nakhichevanskii Lane, 29, Rostov-on-Don, 344022, Russia, e-mail: v.sikilinda@yandex.ru

Chesnikov Sergei Gennadievich – Head of Traumatology and Orthopedic Department, Rostov Clinical Hospital, Peshkov St., 34, Rostov-on-Don, 344045, Russia, e-mail: annakard@yandex.ru

Timoshenko Mikhail Evgen'evich – Doctor, Department of Traumatology and Orthopedics, Rostov Clinical Hospital, Peshkov St., 34, Rostov-on-Don, 344045, Russia.

Skarzshinskii Aleksei Aleksandrovich – Doctor, Department of Traumatology and Orthopedics, Rostov Clinical Hospital, Peshkov St., 34, Rostov-on-Don, 344045, Russia.

Khammad Mokhammad Omar Khasan – Post-Graduate Student, Department of Traumatology and Orthopedics, Rostov State Medical University, Nakhichevanskii Lane, 29, Rostov-on-Don, 344022, Russia.

Проанализированы результаты лечения 885 больных, перенесших эндопротезирование коленного сустава в период с 2003 по 2013 г. Женщин было 684 (77,29 %), мужчин – 201 (22,71 %). Возрастной диапазон – от 19 до 82 лет, средний возраст – 61,68 года. В ближайшем и отдаленном послеоперационном периоде у 10 пациентов (1,13 %) были зафиксированы осложнения: 1 (0,11 %) – стойкая контрактура, 3 (0,34 %) – глубокое нагноение, 1 (0,11 %) – асептическая нестабильность, 2 (0,23 %) – стойкая артралгия, 3 (0,34 %) – нефатальная ТЭЛА. Венозные тромбоэмболические осложнения зафиксированы у 87 (9,83 %) больных, геморрагические осложнения – у 18 (2,03 %) пациентов.

Ключевые слова: тотальное эндопротезирование коленного сустава, осложнения эндопротезирования коленного сустава.

The article analyzes of complications of total knee arthroplasty. Materials and methods: The results of treatment of 885 patients who underwent total knee arthroplasty in the period from 2003 to 2013. Women was 684 (77,29%), men – 201 (22,71 %). Age range – from 19 to 82 years, mean age – 61,68 years. Results: in the immediate and late postoperative period in 10 patients (1,13 %) were reported complications: 1 (0,11 %) – persistent contracture, 3 (0,34 %) – deep sepsis, 1 (0,11 %) – aseptic loosening, 2 (0,23 %) – persistent arthralgia, 3 (0,34 %) – non-fatal pulmonary embolism. Venous thromboembolic events were recorded in 87 (9,83 %) patients, hemorrhagic complications – in 18 (2,03 %) patients.

Keywords: replacement of the knee joint, complications total knee replacement.

Несмотря на внедрение новых технологий, количество осложнений и неудовлетворительных результатов эндопротезирования коленного сустава достаточно

велико и составляет 3,3–13,2 %. Частота развития инфекции области хирургического вмешательства при первичном эндопротезировании коленного сустава

составляет от 0,5 до 3,5 %, а при повторных операциях достигает 3,2 и 5,6 % [1, 2]. Частота таких осложнений, как параартикулярная боль, асептическая нестабильность, контрактура, может достигать 3–12 % [3]. Частота тромбоза глубоких вен после эндопротезирования коленного сустава колеблется от 41 до 88 %; проксимальный тромбоз регистрируется у 5–22 % больных; тромбоэмболия легочной артерии без тромбопрофилактики встречается у 1,5–10 % пациентов; фатальные случаи ТЭЛА регистрируются у 0,1–1,7 % пациентов [4, 5]. В 1982 г. J.P. McElwaine впервые сообщил о 7 случаях стрессовых переломов проксимального отдела бедренной кости через 3–16 мес. после тотального эндопротезирования коленного сустава в группе из 500 прооперированных больных. В последующем публикации по поводу стрессовых переломов стали носить регулярный характер [6–8]. По мнению авторов, стрессовые переломы полиэтиологичны. Имеют значение локальный и системный остеопороз, диагностируемый у пациентов, стероидная терапия, увеличение мышечной активности и давления на шейку бедренной кости у пациентов, ограничивающих подвижность до операции из-за резких болей. Имеет значение техника операции, когда при установке бедренного компонента ударные усилия передаются на шейку и приводят к микропереломам. При расширении двигательной активности переломы становятся завершенными.

Целью данного исследования явился анализ осложнений тотального эндопротезирования коленного сустава.

1. Материалы и методы

Проанализированы результаты лечения 885 больных, перенесших эндопротезирование коленного сустава в отделении травматологии и ортопедии ЮОМЦ,

травматолого-ортопедическом отделении клиники РостГМУ и базах кафедры травматологии и ортопедии РостГМУ в период с 2003 по 2013 г. Женщин было 684 (77,29), мужчин – 201 (22,71 %). Возрастной диапазон – от 19 до 82 лет, средний возраст – 61,68 года.

В структуре больных преобладали пациенты с первичным – 665 (75,14 %) и посттравматическим – 160 (18,08 %) артрозом III–IV стадии (по I. Kellgren, I. Lawtence, 1957), на втором месте пациенты с ревматоидным артритом – 48 (5,43 %) чел., реже эндопротезирование требовалось по поводу хронического остеомиелита – 4 (0,45), доброкачественных и злокачественных опухолей – 8 (0,90 %) больных.

С целью профилактики и выявления венозных тромбоэмболических осложнений через 7–10 дней после оперативного вмешательства больным выполняли триплексное исследование вен нижних конечностей. Диагностика остеопороза осуществлялась на основании оценки факторов риска остеопороза, остеоденситометрического исследования.

Рентгенологическую оценку результатов эндопротезирования коленного сустава выполняли по шкале E.C. Ewald (1989) в модификации О.А. Кудинова с соавторами (2005). Рентгенограмму выполняли в прямой и боковой проекции от тазобедренного до голеностопного сустава с центрацией на коленный сустав.

2. Результаты и обсуждение

В ближайшем и отдаленном послеоперационном периоде у 10 пациентов (1,13 %) были зафиксированы осложнения (таблица).

У одной пациентки в послеоперационном периоде развилась стойкая контрактура правого коленного сустава.

3. Характер осложнений после эндопротезирования коленного сустава

Вид осложнений	Количество больных	
	Абс.	%
Стойкая контрактура оперированного сустава	1	0,11
Глубокая инфекция	3	0,34
Асептическая нестабильность	1	0,11
Стойкая артралгия	2	0,23
Нефатальная ТЭЛА	3	0,34
Всего	10	1,13

Клинический пример. Пациентка Г., 57 лет, история болезни № 5587, была госпитализирована в отделение по поводу посттравматического гонартроза правого коленного сустава 3-й клинко-рентгенологической стадии по Косинской, сросшегося перелома наружного мыщелка правой большеберцовой кости в условиях кортикального металлоостеосинтеза двумя винтами, асептического некроза наружного мыщелка, стойкой смешанной контрактуры правого коленного сустава. Пациентке было выполнено удаление металлоконструкции, тотальное эндопротезирование правого

коленного сустава. Объем движений после операций – 90°, сгибание – 90°, разгибание – 180°. Через 4 мес. после операции больная обратилась с жалобами на ограничение движений в правом коленном суставе сгибание (100°), разгибание (165°), амплитуда (65°). Пациентке была выполнена редрессация правого коленного сустава, восстановлен объем движений (90°). В связи с несоблюдением рекомендаций в реабилитационном периоде пациентке не удалось сохранить оптимальный объем движений. При контрольном осмотре через 7 лет у больной признаков нестабильности эндопротеза нет.

Объем движений в коленном суставе – 70°, разгибание – 170°, сгибание – 100°. Пациентка оценивает объем движений как достаточный, от предложенного хирургического лечения отказалась. На рис. 1 пред-

ставлены рентгенограммы больной после операции. Через 7 лет после эндопротезирования коленного сустава определяется выраженная оссификация параартикулярных тканей.



Рис. 1. Рентгенограммы больной: а, б – через 4 мес. после операции; в, г – через 7 лет после операции

У трех больных была зафиксирована глубокая инфекция. У одного больного развилась параэндопротезная острая послеоперационная инфекция по Coventry – Fitzgerald. У второго больного – экзогенная острая послеоперационная инфекция. У третьего больного – поздняя хроническая инфекция. У всех пациентов – санация послеоперационной раны и попытки сохранить эндопротез оказались безуспешными, было выполнено удаление металлоконструкции.

Клинический пример. Больной К., 68 лет, история болезни № 001792, № 008995, № 039490, был прооперирован по поводу двухстороннего гонартроза 3-й клинико-рентгенологической стадии по Косинской. Пациенту было выполнено тотальное эндопротезирование левого коленного сустава. Через 2 мес. после операции, выходя из машины, пациент ударился оперированным коленным суставом о дверь. После удара сформировалась гематома. В результате позднего обращения в лечебное учреждение – через 3 недели после травмы произошло нагноение гематомы. Пациенту было выполнено активное дренирование нагноившейся гематомы с использованием приточно-промывных систем. В посеве из раны был выделен *S. aureus*. В связи с неэффективностью антибактериальной терапии и санационных мероприятий через 6 мес. после эндопротезирования было выполнено удаление эндопротеза, артрорез левого коленного сустава в условиях аппарата внешней фиксации. Приточно-промывная система функционировала в течение 3 недель. После трехкратного отрицательного посева промывных вод из раны приточно-промывная система была

удалена. Через 6 мес. был демонтирован аппарат внешней фиксации. В течение 2 лет после купирования инфекции рецидивов воспаления не было. В связи с этим в ноябре 2012 г. больному выполнено ревизионное эндопротезирование левого коленного сустава эндопротезом Мати. Через 4,5 мес. после ревизионного эндопротезирования коленного сустава у пациента сохраняется дефицит активного разгибания 10 градусов за счет слабости четырехглавой мышцы бедра, пассивное разгибание полное. Активное сгибание – 95°, пассивное – 85°. Пациент продолжает реабилитационное лечение.

У одной пациентки 72 лет на фоне прогрессирования остеопороза произошел лизис кости вокруг большеберцового компонента, в результате чего развилась асептическая нестабильность эндопротеза. Больной было выполнено ревизионное эндопротезирование.

У двух пациентов наблюдалась стойкая артралгия коленного сустава без признаков асептического расшатывания и конфликта надколенника. Обоим пациентам была выполнена ревизия полости коленного сустава с релизом тканей: в одном случае посредством артротомии, во втором – артроскопически.

У одной пациентки 68 лет через 10 мес. после эндопротезирования коленного сустава на фоне постменопаузального остеопороза произошел перелом проксимального отдела бедренной кости на стороне операции.

Венозные тромбозмболические осложнения. У 12 (1,36 %) пациентов выявлены флотирующие тромбы в берцово-подколенном сегменте, у 7 (0,79 %) произошел тромбоз бедренной вены. Всем пациентам

потребовалась экстренная операция. Были выполнены тромбэктомия, пликация поверхностной бедренной вены. Тромбоземболия мелких ветвей легочной артерии развилась у трех (0,34 %) больных в первые 6 сут после операции. Своевременная интенсивная терапия позволила избежать фатальных осложнений. У 24 (2,71 %) больных клинически значимый тромбоз глубоких вен развился в течение первого месяца после операции и потребовал госпитализации. Неэмболоопасный бессимптомный тромбоз глубоких вен голени диагностирован у 41 (4,63 %) больных как случайная находка при контрольном ультразвуковом исследовании через 2,5–3 мес. после операции.

Все пациенты получали антикоагулянтную терапию согласно отраслевому стандарту. На фоне антикоагулянтной терапии у 18 (2,03 %) пациентов развились геморрагические осложнения. У трех пациентов (0,34 %) были диагностированы большие кровотечения из желудочно-кишечного тракта.

В предоперационном периоде при выполнении видеогастроуденоскопии язв и эрозий желудка и двенадцатиперстной кишки у пациентов выявлено не было. В послеоперационном периоде на 4–5-е сут на фоне антикоагулянтной терапии у пациентов развилась острая стрессовая язва антрального отдела желудка с массивным желудочно-кишечным кровотечением, меленой, рвотой «кофейной гущей». Снижение уровня гемоглобина у пациентов произошло ниже 75 г/л, что потребовало трансфузии препаратов донорской крови.

У 15 (1,69 %) пациентов развились малые кровотечения: у одного (0,11) – из геморроидальных узлов, у 4 (0,45) – маточные кровотечения, у 7 (0,79) – носовое кровотечение, у трех (0,34 %) пациентов развился гемартроз. У одного пациента на фоне длительной антикоагулянтной терапии после эндопротезирования и по поводу хронической сердечной недостаточности развился рецидивирующий гемартроз, потребовавший артроскопической абляции (рис. 2).

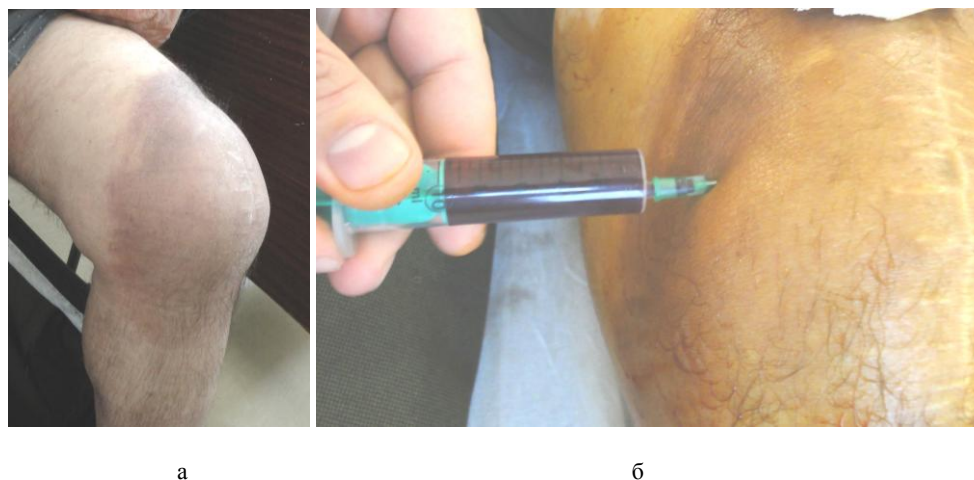


Рис. 2. Вид больного: а – гематома; б – гемартроз после эндопротезирования коленного сустава на фоне длительной антикоагулянтной терапии

4. Заключение

Прогнозирование, медикаментозная и немедикаментозная профилактика инфекционных осложнений в области хирургического вмешательства позволили получить минимальное количество 3 (0,34 %) гнойно-септического осложнения.

Комплексная диагностика, медикаментозная профилактика снижения минеральной плотности костной ткани и лечение остеопороза позволили снизить риски развития ранней нестабильности эндопротеза у пациентов, перенесших артропластику.

Адекватная по дозам и длительности специфическая и неспецифическая профилактика венозных тромбоэмболических осложнений, использование современных таблетированных антикоагулянтов позволили уменьшить риски развития тромбозов. Выполнение контрольного ультразвукового исследова-

ния вен нижних конечностей больным через 5–7 дней после операции эндопротезирования помогли избежать фатальных тромбоэмболий легочной артерии.

Продуманная комплексная терапия имеющихся у пациента коморбидных состояний позволила уменьшить количество осложнений, связанных с обострением сопутствующих заболеваний. Выбор хирургической тактики позволил снизить травматичность оперативного вмешательства, получить хорошие анатомические, рентгенологические и функциональные результаты у 96,38 % пациентов.

Литература

1. Ефименко Н.А., Гицюк А.А., Серeda А.П. Антибиотикопрофилактика в травматологии и ортопедии // Инфекции в хирургии. 2008. Т. 6, № 2. С. 9–14.

2. *Lentino J.R.* Prosthetic Joint Infections: Bane of Orthopedists, Challenge for Infectious Disease Specialists // *Clin. Inf. Dis.* 2003. Vol. 36. P. 1157–1161.
3. Румянцев Ю.И. Лучевая диагностика осложнений после эндопротезирования тазобедренного и коленного суставов // *Радиология-практика*. 2011. № 4. С. 95–96.
4. Копёнкин С.С. Профилактика венозных тромбоэмболических осложнений в ортопедической хирургии: новые возможности // *Вестн. травматологии и ортопедии им. Н.Н. Приорова*. 2010. № 1. С. 35–39.
5. *Matziolis G., Perka C., Labs K.* Acute arterial occlusion after total knee arthroplasty // *Arch. Orthop. Trauma. Surg.* 2004. Vol. 12, № 2. P. 134–136.
6. *Hardy D.C.R., Delinçe P.E., Yasik E., Lafontaine M.A.* Stress fracture of the hip An unusual complication of total knee arthroplasty // *Clin. Orthop.* 1992. Vol. 281. P. 140–144.
7. *Rawes M.L., Patsalis T., Gregg P.J.* Subcapital stress fractures of the hip complicating total knee replacement // *Injury*. 1995. Vol. 26. P. 421–423.
8. *Hendel D., Beloosesky Y., Weisbort M.* Fracture of the hip after knee arthroplasty – an unusual case with pain in the knee // *Acta Orthop. Scand.* 2001. Vol. 72. P. 194–195.
- in trauma and orthopedics]. *Infeksii v khirurgii*, 2008, vol. 6, no 2, pp. 9-14.
2. *Lentino J.R.* Prosthetic Joint Infections: Bane of Orthopedists, Challenge for Infectious Disease Specialists. *Clin. Inf. Dis.*, 2003, vol. 36, pp. 1157-1161.
3. Rumyantsev Yu.I. Luchevaya diagnostika oslozhnenii posle endoprotezirovaniya tazobedrennogo i kolennogo sustavov [Radiological diagnosis of complications after hip and knee joints]. *Radiologiya-praktika*, 2011, n 4, pp. 95-96.
4. Kopenkin S.S. Profilaktika venoznykh tromboembolicheskikh oslozhnenii v ortopedicheskoi khirurgii: novye vozmozhnosti [Prevention of venous thromboembolic complications in orthopedic surgery: new opportunities]. *Vestnik travmatologii i ortopedii im. N.N. Priorova*, 2010, no 1, pp. 35-39.
5. Matziolis G., Perka C., Labs K. Acute arterial occlusion after total knee arthroplasty. *Arch. Orthop. Trauma. Surg.*, 2004, vol. 124, no 2, pp. 134-136.
6. Hardy D.C.R., Delinçe P.E., Yasik E., Lafontaine M.A. Stress fracture of the hip. An unusual complication of total knee arthroplasty. *Clin. Orthop.*, 1992, vol. 281, pp. 140-144.
7. Rawes M.L., Patsalis T., Gregg P.J. Subcapital stress fractures of the hip complicating total knee replacement. *Injury*, 1995, vol. 26, pp. 421-423.
8. Hendel D., Beloosesky Y., Weisbort M. Fracture of the hip after knee arthroplasty – an unusual case with pain in the knee. *Acta Orthop. Scand.*, 2001, vol. 72, pp. 194-195.

References

1. Efimenko N.A., Gitsyuk A.A., Sereda A.P. Antibiotikoprofilaktika v travmatologii i ortopedii [Antibiotic prophylaxis

УДК 57.052+618.36+618.346

АЗОТИСТЫЙ ОБМЕН ПЛАЦЕНТЫ И ОКОЛОПЛОДНЫХ ВОД В ПРОЦЕССЕ РАЗВИТИЯ ФИЗИОЛОГИЧЕСКОЙ БЕРЕМЕННОСТИ

© 2015 г. И.И. Крукиер, А.С. Дегтярева, Е.В. Нарезная, В.В. Авруцкая,
А.А. Никашина, Л.В. Кравченко, О.И. Кухта

Крукиер Ирина Ивановна – доктор биологических наук, ведущий научный сотрудник, отдел медико-биологических проблем в акушерстве, гинекологии и педиатрии, Академия биологии и биотехнологии ЮФУ, пр. Стачки 194/1, г. Ростов-на-Дону, Россия, 344090; Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, г. Ростов-на-Дону, 344012, e-mail: biochem@rniiap.ru

Дегтярева Анна Сергеевна – научный сотрудник, отдел медико-биологических проблем в акушерстве, гинекологии и педиатрии, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, г. Ростов-на-Дону, 344012, e-mail: biochem@rniiap.ru

Нарезная Елена Васильевна – кандидат химических наук, доцент, кафедра аналитической химии, химический факультет, Южный федеральный университет, ул. Р. Зорге, 7, г. Ростов-на-Дону, 344090, e-mail: evn@sfedu.ru

Авруцкая Валерия Викторовна – доктор медицинских наук, профессор, заведующая поликлиническим отделением, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, г. Ростов-на-Дону, 344012, e-mail: biochem@rniiap.ru

Никашина Анастасия Александровна – младший научный сотрудник, отдел медико-биологических проблем в акушерстве, гинекологии и педиатрии, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, г. Ростов-на-Дону, 344012, e-mail: biochem@rniiap.ru

Кравченко Лариса Вахтанговна – доктор медицинских наук, ведущий научный сотрудник, педиатрический отдел, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, г. Ростов-на-Дону, 344012, e-mail: biochem@rniiap.ru

Кухта Ольга Ивановна – младший научный сотрудник, врач-неонатолог, отделение новорожденных, Ростовский научно-исследовательский институт акушерства и педиатрии, ул. Мечникова, 43, г. Ростов-на-Дону, e-mail: biochem@rniiap.ru

Krukier Irina Ivanovna – Doctor of Biological Science, Chief Researcher, Department of Medico-Biological Problems in Obstetrics, Gynecology and Pediatrics, Academy of Biology and Biotechnology SFU, Stachki St., 194/1, Rostov-on-Don, 344090; Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: biochem@rniiap.ru

Deptyareva Anna Sergeevna – Researcher, Department of Medico-Biological Problems in Obstetrics, Gynecology and Pediatrics, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: biochem@rniiap.ru

Narezhnaya Elena Vasilievna – Candidate of Chemical Science, Associate Professor, Faculty of Chemistry, Southern Federal University, R. Zorge St., 7, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: evn@sfedu.ru

Avrutskaya Valeriya Victorovna – Doctor of Medical Science, Professor, Head of Polyclinic Department, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: biochem@rniiap.ru

Nikashina Anastasiya Aleksandrovna – Junior Researcher, Department of Medico-Biological Problems in Obstetrics, Gynecology and Pediatrics, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: biochem@rniiap.ru

Kravchenko Larisa Vakhtangovna – Doctor of Medical Science, Leading Researcher, Department of Pediatrics, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: biochem@rniiap.ru

Kukhta Olga Ivanovna – Junior Researcher, Obstetrician Pediatric, Department of Newborn, Rostov Scientific Research Institute of Obstetrics and Pediatrics, Mechnikov St., 43, Rostov-on-Don, 344012, Russia, e-mail: biochem@rniiap.ru

В процессе нормального внутриутробного развития происходят значительные изменения в аминокислотном составе плаценты и околоплодных водах. В плаценте по мере её развития уровень аргинина, пролина и глутамата снижается, а цитруллин – повышается. Продукция аргинина в амниотической жидкости увеличивается в 2 раза в сроках 20–23 недели беременности, а наиболее высокий уровень пролина и цитруллина наблюдается к 15-й неделе беременности. На основании полученных данных можно заключить, что, регулируя поступление питательных веществ к плоду, а именно аминокислот, плацента играет центральную роль во «внутриутробном программировании».

Ключевые слова: плацента, околоплодные воды, аминокислоты, физиологическая беременность, капиллярный электрофорез.

During normal fetal development are significant changes in the amino acid composition of the placenta and amniotic fluid. In placenta as organ development, the level of arginine, proline and glutamate reduced, and citrulline – increases. Production of arginine in the amniotic fluid increased by 2 times up to 20–23 weeks of pregnancy, and the highest level of proline and citrulline in the amniotic fluid is observed to the 15th week. The development of placenta, the level of all investigated amino acids has increased. Based on these data, we can conclude that by regulation the supply of nutrients to the fetus and fetal growth, placenta thus plays a central role in the «prenatal programming».

Keywords: placenta, amniotic fluid, amino acids, physiological pregnancy, capillary electrophoresis.

Метаболическая и функциональная полноценность плаценты в значительной степени определяет уровень взаимоотношений между матерью и плодом на всем протяжении внутриутробного развития. Количество работ, посвященных различным проблемам плацентологии, прогрессивно увеличивается в последнее десятилетие. Многие вопросы молекулярных механизмов, обеспечивающих становление функций плаценты в процессе физиологической беременности, ещё далеки от разрешения [1, 2].

Одним из важных компонентов в развитии прогрессирования беременности являются околоплодные воды. В настоящее время о диагностической ценности изучения околоплодных вод свидетельствуют имеющиеся данные о функциональной взаимозависимости между состоянием плода и составом амниотической жидкости. Весьма мало сведений, касающихся роли околоплодных вод как биологического посредника в передаче информации от плода материнскому организму [3].

Среди азотистых компонентов плаценты и амниотической жидкости одно из важных мест занимают свободные аминокислоты. Они служат предшественниками биоактивных соединений, включаются в энергетический обмен, некоторые выполняют самостоятельные функции, в частности, являются индукторами пролиферативных процессов, участвуют в синтезе стероидных гормонов, а также осуществляют роль активных нейромедиаторов.

К одной из этих значимых аминокислот относится аргинин – полузаменимая аминокислота, выполняющая многочисленные функции, в том числе пластические и регуляторные. Главным источником аргинина при беременности является плацента, обеспечивающая пополнение аминокислоты не только для собственных нужд (пролиферации, регуляции процессов клеточной дифференцировки), но и поддержания роста и развития плода [4]. Существенная роль также принадлежит другим аминокислотам – цитруллину и пролину. Особенно богат последним белок – коллаген, который в высоких концентрациях содержится в костной и мышечной тканях. Кроме того, цитруллин способен частично заменять аргинин в поддержании определенного уровня оксида азота в интактных клетках [5].

В настоящее время в ряде исследований установлено значение глутаминовой кислоты (глутамат) в комплексе метаболических процессов, характерных для роста и развития плода. Глутамату принадлежит ключевая роль в многочисленных клеточных процессах, протекающих в тканях мозга. Быстрорастущий плод зависит от достаточного поступления данной аминокислоты, обеспечивающей нормальное внутриутробное развитие плода [6].

Соотношение аминокислот в плаценте, а также в околоплодных водах может отражать состояние плода, что позволяет рассматривать эти соединения в качестве возможных маркеров характера течения беременности и прогноза состояния новорожденного.

Целью работы явилось изучение содержания аргинина, пролина, цитруллина и глутаминовой кислоты в плаценте и околоплодных водах женщин в процессе физиологического развития беременности.

5. Материалы и методы

Обследовано 59 беременных в возрасте 22–33 лет. Материалом для исследования служили околоплодные воды, а также экстракты хориона и плаценты при физиологической беременности в разные сроки её развития.

Амниотическая жидкость была получена путем трансабдоминального амниоцентеза в сроки 15–27 недель беременности, когда имеется достаточное количество околоплодных вод и содержащихся в них клеток плода. Этот период является наиболее безопасным как для матери, так и для плода при проведении указанной процедуры [3]. Показаниями к амниоцентезу у условно здоровых беременных служили необходимость установления степени зрелости плода, антенатальная диагностика пола, необходимость кариотипирования при подозрении на хромосомную патологию и пороки развития плода (в том числе у женщин после 30 лет).

Идентификацию и количественное определение свободных форм аргинина, пролина, цитруллина и глутаминовой кислоты в экстрактах хориона, плаценты и околоплодных водах осуществляли методом капиллярного электрофореза с использованием немодифицированного кварцевого капилляра с внешней полиамидной пленкой общей длиной 60 см и внутренним диаметром 75 мкм. Исследования проводили на аппарате «Капель-105» («Льюмэкс», Санкт-Петербург, Россия). Сбор и обсчёт данных был выполнен при помощи IBM PC с программным обеспечением «Мультихром» (АО «Амперсенд»).

Статистическую обработку данных осуществляли с помощью лицензионного пакета программ Statistica (версия 5.1, фирмы StatSoft Inc.). Однородность дисперсий оценивали по критерию Фишера. Для оценки статистической значимости различий между сравниваемыми группами использовали критерий Стьюдента и непараметрический критерий Манна – Уитни. Достоверными считались различия при $p < 0,05$.

6. Результаты и обсуждение

Результаты проведенных нами исследований представлены в табл. 1. Сопоставление полученных данных в хорионе (6–12 нед.) и плаценте при 39–40 неделях беременности показало следующее.

Наиболее низким в хорионе оказался уровень L-цитруллина. Невысокая концентрация характерна также для содержания L-аргинина. В то же время в этот период (6–12 нед.) имели место более высокие концентрации L-пролина и особенно глутаминовой кислоты. Максимальная концентрация указанных аминокислот в 12 недель беременности, по-видимому,

связана с тем, что именно в это время происходит наиболее интенсивное развитие и формирование пла-

центы как органа, достигшего своей морфологической и функциональной зрелости.

Таблица 1

7. **Содержание аминокислот, мкг/мл, и их соотношение в хорионе и плаценте женщин в разные сроки физиологической беременности ($M \pm m$)**

Показатель	Сроки беременности, недели	
	6 – 12 (хорион)	39 – 40 (плацента)
L-аргинин	33,1 $\pm$ 3,6	27,0 $\pm$ 5,2
L-пролин	67,0 $\pm$ 4,8	42,3 $\pm$ 8,4*
L-цитруллин	27,2 $\pm$ 6,0	112,4 $\pm$ 9,2*
Глутаминовая кислота	173,0 $\pm$ 9,4	47,1 $\pm$ 1,8*
arg/pro	0,49 $\pm$ 0,02	0,64 $\pm$ 0,03
arg/cit	1,22 $\pm$ 0,06	0,24 $\pm$ 0,012
pro/cit	2,46 $\pm$ 0,12	0,38 $\pm$ 0,02*
arg/glu	0,19 $\pm$ 0,008	0,57 $\pm$ 0,03
pro/glu	0,39 $\pm$ 0,002	0,89 $\pm$ 0,004
cit/glu	0,16 $\pm$ 0,008	2,39 $\pm$ 0,12*

Примечание. arg – аргинин; pro – пролин; cit – цитруллин; glu – глутаминовая кислота; * – достоверность отличий между показателями в 6–12 и 39–40 недель.

К концу гестации уровень L-цитруллина вырос почти в 4 раза, а содержание глутаминовой кислоты и L-пролина, напротив, снизилось на 73 и 37 % соответственно.

Определенную информативность о балансе аминокислотного состава хориона и плаценты в процессе развития физиологической беременности дает коэффициент отношения изученных нами аминокислот (табл. 1).

Проанализировав полученные коэффициенты указанных аминокислот в хорионе и плаценте, можно утверждать, что наибольшие изменения отмечены в соотношении пролин/цитруллин и цитруллин/глутамат. Однако если отношение pro/cit к концу гестации (39–40 нед.) уменьшалось в 6 раз, то отношение cit/glu, напротив, увеличивалось в 14 раз. Относительно низкая концентрация L-цитруллина в начале беременности сильно возрастает к концу гестации, а уровень глутаминовой кислоты, которой больше всего в 6–12 недель, па-

дает к 39–40 неделям беременности, за счет чего и растет отношение цитруллин/глутамат.

Выявленные по мере формирования физиологической беременности изменения в содержании аминокислот вызваны, по-видимому, неодинаковыми потребностями в них плаценты и плода, а также необходимостью обеспечения пластических процессов, которые более интенсивно протекают в первую половину беременности.

Содержание аминокислот в процессе развития гестации может регулироваться различными путями: скоростью образования их в самой плацентарной ткани, путем поступления из крови матери, а также в различных реакциях обмена (между плацентой и околоплодной средой).

Полученные данные о составе аминокислот в околоплодных водах (табл. 2) свидетельствуют о том, что по мере развития беременности наиболее высокий уровень отмечался для L-аргинина.

8. Таблица 2

9. **Содержание аминокислот, мкг/мл, и их соотношение в околоплодных водах женщин в разные сроки физиологической беременности ($M \pm m$)**

Показатель	Сроки беременности, недели			
	15–19	20–23	24–27	39–40
L-аргинин	28,5 $\pm$ 5,1	57,4 $\pm$ 4,7*	30,73 $\pm$ 5,5**	36,4 $\pm$ 8,1
L-пролин	25,2 $\pm$ 6,7	19,2 $\pm$ 2,1*	13,9 $\pm$ 2,1**	16,9 $\pm$ 8,2
L-цитруллин	15,04 $\pm$ 2,4	7,35 $\pm$ 1,03*	6,02 $\pm$ 1,1**	7,3 $\pm$ 4,3
arg/pro	1,2	3,0	2,0	2,0
arg/cit	3,0	8,1	4,3	4,5
pro/cit	1,7	2,6	2,8	2,3

Примечание. arg – аргинин; pro – пролин; cit – цитруллин; достоверность отличий между показателями: * – в 15–19 и 20–23 нед.; ** – в 15–19 и 24–27 нед.

Его уровень в амниотической жидкости увеличивался в 2 раза относительно начальных сроков (15–19 нед.) и достигал своих максимальных концентраций к середине гестации (20–23 нед.). К 24–27 неделям беременности он снижается на 87 % относительно соответствующих величин 20-недельного срока, и к концу гестации (третий триместр) содержание L-аргинина достигало практически аналогичных величин второго триместра (15–19 нед.).

Известно, что аргинин является важным регулятором многих физиологических и биохимических процессов, а также участвует в коммуникации между нервными клетками [4]. Что касается продукции L-пролина и L-цитруллина, то максимальный уровень этих аминокислот в амниотической жидкости наблюдался в сроках 15–19 недель беременности, потом он достоверно снижался к 24–27 неделям гестации на 48 и 67 % соответственно относительно 15–19 недель беременности.

Известно также, что аргинин служит необходимым предшественником для синтеза белков и многих биологически важных молекул, таких как пролин, орнитин, креатин, полиамины и агматин [7].

В то же время цитруллин, являющийся сопродуктом оксида азота при окислении аргинина, способен вновь превращаться в аргинин. Этот путь трактуется в настоящее время как L-аргинин/L-цитруллиновый цикл [4]. Можно предположить, что повышение содержания аргинина в амниотической жидкости при физиологической гестации идет за счет снижения синтеза цитруллина и частично пролина.

Рассчитанные нами коэффициенты аргинин/пролин и пролин/цитруллин максимально были увеличены к 20–23 неделям беременности. В эти же сроки наиболее повышено отношение аргинина к цитруллину (в 2,6 раза) по сравнению с 15–19 неделями беременности.

Следует отметить, что именно в этот период (20–23 нед.) максимального увеличения полученных нами коэффициентов аминокислот в организме плода происходят существенные преобразования процессов биохимической и морфологической дифференцировки, требующие адекватного формирования плодово-плацентарного кровотока и трофики плода. К концу гестации (39–40 нед.) отношения аргинин/пролин и пролин/цитруллин в околоплодных водах, напротив, уменьшались (по сравнению с 20–23 нед.) на 33 и 43 % соответственно, что, по-видимому, указывает на завершение данных процессов во втором триместре и изменения потребностей организма в системе «мать – плацента – околоплодная среда – плод».

10. Заключение

В функциональной системе «мать – плацента – околоплодная среда – плод» конечной целью формирования и функционирования является рождение здорового ребенка.

В настоящее время имеется значительное количество исследований, в которых указывается на активный транспорт аминокислот через гемохориальную плаценту с помощью специфических транспортеров, находящихся в мембранах синцитиотрофобласта и представляющих собой лимитирующую составляющую в их трансплацентарном переносе. На сегодняшний день идентифицирован ряд специфических транспортных систем, функционирующих в различных тканях плаценты и позволяющих осуществлять данный переход аминокислот [8, 9].

Одним из механизмов, регулирующих транспорт аминокислот, являются интенсивность метаболических процессов в клетках плаценты и потребность плода в соответствующих аминокислотах. Перенос последних через плаценту – это конкурентный процесс, свидетельствующий об активной деятельности плаценты в регуляции аминокислотного состава крови плода и её способности осуществлять «повышающий транспорт» их при низких концентрациях аминокислот в крови матери [9].

Следует отметить, что концентрация изученных нами аминокислот в ткани плаценты в несколько раз была увеличена по сравнению с таковой в околоплодных водах. Особенно это касается содержания пролина и цитруллина: их уровень в плаценте превышал аналогичный в амниотической жидкости в 2,6 и 15 раз соответственно. Между высокой интенсивностью протеосинтетических процессов и способностью создания значительных резервов аминокислот существует тесная взаимосвязь, характерная для быстрорастущих органов и тканей [10], каковой и является плацента.

В процессе нормального внутриутробного развития происходят значительные изменения в аминокислотном составе околоплодных вод. Продукция аргинина увеличивается в 2 раза в сроках 20–23 недели беременности, а наиболее высокий уровень пролина и цитруллина в амниотической жидкости наблюдается к 15-й недели беременности.

Наряду с неоднозначностью в интенсивности обменных процессов между тканями плаценты и околоплодными водами существуют как определенные закономерности, так и отличия. Довольно высокий уровень пролина, обнаруженный в ранние сроки гестации в указанных биологических объектах, резко падает к концу беременности. Что касается концентрации L-цитруллина по сравнению с другими аминокислотами, то она как в хорионе (6–12 нед.), так и в околоплодных водах (15–19 нед.) достаточно низка. Однако к 39–40 неделям беременности этот показатель в плаценте сильно возрастает (в 4 раза), а в околоплодных водах – падает (в 2 раза).

В настоящее время плаценту рассматривают как «сенсор питания», координирующий функцию транспорта, в частности аминокислот, хотя достаточно известен, кроме основного азотистого обмена (через плаценту), параплацентарный транспорт аминокислот через плодные оболочки и амниотическую жидкость, однако этот путь переноса количественно незначителен [9].

Таким образом, можно заключить, что, регулируя поступление питательных веществ к плоду и его эмбриональный рост, плацента тем самым играет центральную роль во «внутриутробном программировании». Это достаточно новое понятие в настоящее время трактуется как «влияние неблагоприятных факторов на состояние структуры ткани, органов и их функционирование в ранние критические этапы развития плода» [11]. Возникновение различных видов внутриутробных повреждений может вызвать риск развития заболеваний после рождения, приводящих к вполне конкретным специфическим нарушениям и в зрелые годы.

Литература

1. Погорелова Т.Н., Линде В.А., Крукиер И.И., Гунько В.О., Друккер Н.А. Молекулярные механизмы регуляции метаболических процессов в плаценте при физиологически протекающей и осложненной беременности. СПб., 2012. 304 с.
2. Tsitsiou E., Sibley C.P., D'Souza S.W., Catanescu O., Jacobsen D.W., Glazier J.D. Homocysteine is transported by the microvillous plasma membrane of human placenta // *J. Inherit. Metab. Dis.* 2011. Vol. 34. P. 57–65.
3. Орлов В.И., Погорелова Т.Н., Крукиер И.И., Сагамонова К.Ю., Друккер Н.А. Околоплодные воды. Химический состав и физиологические функции. Ростов н/Д, 2009. 224 с.
4. Дмитриенко Н.П., Кишко Т.О., Шандаренко С.Г. Аргинин: биологическое действие, влияние на синтез оксида азота // *Укр. химиотерапевт. журн.* 2008. № 1. С. 137–140.
5. Хлыбова С.В., Циркин В.И., Дворянский С.А., Ежов А.В., Роман В.В. Гипоаргининемия – этиологический фактор хронической плацентарной недостаточности // *Вопр. гинекологии, акушерства и перинатологии.* 2007. Т. 6, № 3. С. 18–22.
6. Battaglia F.C. Glutamine and Glutamate Exchange between the Fetal Liver and the Placenta // *J. of Nutrition.* 2000. Vol. 130, № 4. P. 974S–977S.
7. Galan H.L., Marconi A.M., Paolini C.L., Cheung A., Battaglia F.C. The transplacental transport of essential amino acids in uncomplicated human pregnancies // *Am. J. of Obstet. Gynecol.* 2009. Vol. 200. P. E1–E7.
8. Cleal J.K., Lewis R.M. The mechanisms and regulation of placental amino acid transport to the human foetus // *J. Neuroendocrinol.* 2008. № 20(4). P. 419–426.
9. Погорелова Т.Н., Гунько В.О., Линде В.А. Трансплацентарный переход аминокислот и его влияние на «внутриутробное программирование» постнатальной патологии // *Вопросы гинекологии, акушерства и перинатологии.* 2013. Т. 12, № 5. С. 46–52.
10. Van Winkle L.J. Amino acid transport regulation and early embryo development // *Biol. Reprod.* 2001. Vol. 64, № 1. P. 1–12.
11. Нетребенко О.К. Метаболическое программирование в антенатальном периоде // *Вопросы гинекологии, акушерства и перинатологии.* 2012. Т. 11, № 6. С. 58–64.

References

1. Pogorelova T.N., Linde V.A., Krukier I.I., Gun'ko V.O., Drukker N.A. *Molekulyarnye mekhanizmy regulyatsii metabolicheskikh protsessov v platsente pri fiziologicheskii prottekayushchei i oslozhnennoi beremennosti* [Molecular mechanisms of regulation of metabolic processes in the placenta at physiologically proceeding and complicated pregnancy]. Saint Petersburg, 2012, 304 p.
2. Tsitsiou E., Sibley C.P., D'Souza S.W., Catanescu O., Jacobsen D.W., Glazier J.D. Homocysteine is transported by the microvillous plasma membrane of human placenta. *J. Inherit. Metab. Dis.*, 2011, vol. 34, pp. 57-65.
3. Orlov V.I., Pogorelova T.N., Krukier I.I., Sagamonova K.Yu., Drukker N.A. *Okoloplodnye vody. Khimicheskii sostav i fiziologicheskie funktsii* [Amniotic fluid. The chemical composition and physiological functions]. Rostov-on-Don, 2009, 224 p.
4. Dmitrienko N.P., Kishko T.O., Shandarenko S.G. Arginin: biologicheskoe deistvie, vliyanie na sintez oksida azota [Arginine: biological effects, effects on nitric oxide synthesis]. *Ukrainskii khimioterapevticheskii zhurnal*, 2008, no 1, pp. 137-140.
5. Khlybova S.V., Tsirkin V.I., Dvoryanskii S.A., Ezhov A.V., Roman V.V. Gipoargininemiya – etiologicheskii faktor khronicheskoi platsentarnoi nedostatocnosti [Gipoargininemia - etiologic agent of chronic placental insufficiency]. *Voprosy ginekologii, akusherstva i perinatologii*, 2007, vol. 6, no 3, pp. 18-22.
6. Battaglia F.C. Glutamine and Glutamate Exchange between the Fetal Liver and the Placenta. *J. of Nutrition*, 2000, vol. 130, no. 4, pp. 974S-977S.
7. Galan H.L., Marconi A.M., Paolini C.L., Cheung A., Battaglia F.C. The transplacental transport of essential amino acids in uncomplicated human pregnancies. *Am. J. of Obstet. Gynecol.*, 2009, vol. 200, pp. E1-E7.
8. Cleal J.K., Lewis R.M. The mechanisms and regulation of placental amino acid transport to the human foetus. *J. Neuroendocrinol.*, 2008, no 20(4), pp. 419-426.
9. Pogorelova T.N., Gun'ko V.O., Linde V.A. Transplatsentarnyi perekhod aminokislot i ego vliyanie na «vnutriutrobnnoe programmirovaniye» postnatal'noi patologii [Transplacental transfer of amino acids and its effect on the "prenatal programming" postnatal pathology]. *Voprosy ginekologii, akusherstva i perinatologii*, 2013, vol. 12, no 5, pp. 46-52.
10. Van Winkle L.J. Amino acid transport regulation and early embryo development. *Biol. Reprod.*, 2001, vol. 64, no 1, pp. 1-12.
11. Netrebenko O.K. Metabolicheskoe programmirovaniye v antenatal'nom periode [Metabolic programming in the antenatal period]. *Voprosy ginekologii, akusherstva i perinatologii*, 2012, vol. 11, no 6, pp. 58-64.

УДК 618.346

МЕТАБОЛИЧЕСКИЙ СТАТУС НА ФОНЕ ДОЛГОВРЕМЕННОЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬНОЙ ГОРМОНАЛЬНОЙ ТЕРАПИИ У ПАЦИЕНТОК С СИНДРОМОМ ГИПОЭСТРОГЕНИИ

© 2015 г. Н.Б. Чагай, Е.Г. Бакулина

Чагай Наталья Борисовна – доктор медицинских наук, профессор, кафедра эндокринологии, детской эндокринологии, диабетологии, Ставропольский государственный медицинский университет, ул. Мира, 310, г. Ставрополь, 355017, e-mail: chagay2006@rambler.ru

Бакулина Елена Геннадьевна – кандидат медицинских наук, заведующая отделением, Центр охраны здоровья семьи и репродукции Ставропольского краевого клинического консультативно-диагностического центра, ул. Ленина, 304, г. Ставрополь, 355017.

Chagai Nataliya Borisovna – Doctor of Medical Science, Professor, Department of Endocrinology, Pediatric Endocrinology, Diabetology, Stavropol State Medical University, Mir St., 310, Stavropol, 355017, Russia, e-mail: chagay2006@rambler.ru

Bakulina Elena Gennadievna – Candidate of Medical Science, Head of the Department, Centre for Family Health and Reproduction of the Stavropol Regional Clinical Consultative and Diagnostic Center, Lenin St., 304, Stavropol, 355017, Russia.

Проведена оценка влияния монотерапии эстрогенами и долговременной комбинированной заместительной гормональной терапии *per os* на метаболизм жиров и углеводов у больных с гипогонадотропным гипогонадизмом и синдромом истощенных яичников.

Ключевые слова: гипогонадотропный гипогонадизм, гипергонадотропный гипогонадизм, заместительная гормональная терапия, инсулинорезистентность, метаболизм липидов.

Assess the influence of estrogen replacement therapy and long-term combined hormone replacement therapy *per os* on the metabolism of fats and carbohydrates in patients with hypergonadotrophic hypogonadism and premature ovarian failure.

Keywords: hypogonadotrophic hypogonadism, hypergonadotrophic hypogonadism, hormone replacement therapy, insulin resistance, lipid metabolism.

Доказано, что у больных гипозестрогенными формами ановуляции повышен риск развития метаболических нарушений [1, 2]. Это обусловлено искажением стероид-опосредованных реакций в сложном комплексе биохимических процессов синтеза и секреции инсулина, утилизации глюкозы, метаболизма и депонирования жиров [3].

Применение заместительной гормональной терапии (ЗГТ) пероральным путем предполагает напряженное участие печени в процессах биотрансформации экзогенных стероидов. Нефизиологическое воздействие эстроген-гестагенов на организм может повлечь за собой нарушение чувствительности к инсулину, липидного состава крови, особенно у лиц, имеющих генетическую предрасположенность к атеросклерозу и СД 2-го типа [2]. Современные научные изыскания направлены на создание «идеальных» эстроген-гестагенов. Сохраняющиеся сомнения в безопасности ЗГТ имеют под собой серьезные основания, поскольку синтез и секреция гормонов яичников, качество и количество которых регулируется уникальными ауто-, пара- и эндокринными механизмами в отдельно взятом естественном цикле, невоспроизводимы при экзогенном введении стероидов. Настоящее исследование посвящено изучению метаболического статуса пациенток с гипогонадотропным гипогона-

дизмом (ГипоГГ) и гипергонадотропным гипогонадизмом (ГиперГГ) – преждевременной недостаточностью яичников в зависимости от тяжести и длительности дефицита половых гормонов, а также на фоне долговременной ЗГТ.

11. Материалы и методы исследования

По патофизиологическому механизму развития гипозестрогенной ановуляции пациентки были рандомизированы на группы: 1-я группа – ГипоГГ, средний возраст – 19 (18; 21) лет ($n = 31$, где 19 – изолированный ГипоГГ (uГипоГГ), 5 – гипопитуитаризм (ГП) после хирургического или радиационного лечения аденом гипофиза, 7 – анорексия (aГипоГГ)); 2-я группа – ГиперГГ, средний возраст – 32 (29,5; 37,5) года ($n = 44$).

Диагностика включала сбор жалоб, анамнеза, клинический осмотр, в том числе определение индекса массы тела (ИМТ), окружности талии (ОТ), проведение тестов функциональной диагностики (отрицательная прогестероновая проба, положительная – с эстроген-гестагенами, тест с агонистом гонадотропин-рилизинг-гормона). Исследование сыворотки крови на содержание гормонов ЛГ, ФСГ, пролактина, тестостерона (ТСТ), глобулина, связывающего половые

гормоны (ГСПГ), эстрадиола (Е2), дегидроэпиандростерона-сульфата (ДГА-С) и др. проводилось в лаборатории СКККДЦ твердофазным хемилюминесцентным иммуноанализом (IMMULITE I-DPC, Beckman Coulter DxI). Определение биологически активного ТСТ (биоТСТ) с учетом уровня ГСПГ, постоянной величины SA (при концентрации альбумина 4,3 г/дл) осуществлялось с помощью онлайн-калькулятора на сайте ISSAM [4].

Гликемия натощак и через 2 ч после нагрузки 75 г глюкозы определялась в плазме капиллярной крови (SUPER GL ambulance). Определение холестерина (ХС), триглицеридов (ТГ), липопротеидов высокой плотности (ХС-ЛПВП), липопротеидов низкой плотности (ХС-ЛПНП) в сыворотке крови проводилось с помощью колориметрического фотометрического теста (OLIMPUS).

Критерии инсулинорезистентности (ИР): базальная гиперинсулинемия (ГИ) (N до 12,2 мкЕд/мл) [5] и/или значение индекса НОМА (homeostasis model assessment) $> 1,8$ [6]. Метаболический синдром (МС) верифицирован на основании критериев IDF (International Diabetes Federation, 2005) [7]: наличие у больных с центральным ожирением (окружность талии у женщин > 80 см) двух и более из нижеперечисленных признаков: уровень ТГ $\geq 1,7$ ммоль/л; ХС-ЛПВП $< 1,29$ ммоль/л; артериальная гипертензия ($AD \geq 130/85$ мм рт. ст.); гликемия $\geq 5,6$ ммоль/л.

Статистический анализ результатов исследования был выполнен с помощью программ Statistica 6.0, MedCalc Version 7.4.2.0. Проверка на нормальность распределения проводилась методом Шапиро – Уилка. Для описания количественных признаков вычисляли медиану (Me), среднее значение (M), стандартное отклонение (SD), квартили [25;75]. Сравнение двух или более связанных выборок осуществлено с помощью критерия Вилкоксона (W) и дисперсионного анализа Фридмана (F), соответственно, внутригрупповая статистика проведена с помощью критерия Ньюмана – Кеулса. Для анализа различия двух групп по распределению качественных признаков использован критерий χ^2 , в зависимых группах – χ^2 Макнемара (A/D). Для оценки зависимости между количественными признаками использовали коэффициент корреляции Спирмена (r). Для проведения анализа множественной регрессии использована процедура с пошаговым включением предикторов. В процессе всех видов анализа вывод о статистической значимости принимался при $p < 0,05$.

Результаты исследования и их обсуждение

В 1-й группе ГИ натощак выявлена в 35,5 % (11/31), индекс НОМА $> 1,8$ – в 41,9 % (13/31) наблюдений. Изучение внутригрупповых значений НОМА показало, что распространенность ИР имела место у 57,9 % (11/19) пациенток и ГипоГТ; у 60 (3/5) – ГП; у 14,3 % (1/7) – аГипоГТ. Чувствительность к инсулину у больных с анорексией, как правило, повышена, что является адаптационным механизмом в ответ на огра-

ничение поступления энергии с пищей. Однако базальная ГИ и повышение индекса НОМА характерны для больных с неврогенной анорексией-булимией [3].

Неполный МС (абдоминальное ожирение, повышение ТГ, снижение ХС-ЛПВП) был диагностирован у 16,1 % (5/31) больных. Для больных в состоянии анорексии изначально характерно повышение всех липопротеинов (ХС, ТГ, ХС-ЛПВП) при сохранении нормальных сыровоточных концентраций свободных жирных кислот [3]. Данная особенность метаболизма липидов объясняется компенсаторным снижением катаболизма богатых триглицеридами липопротеинов в условиях дефицита питания [8].

У больных 1-й группы Е2 коррелирует с базальной инсулинемией ($r = -0,367483$; $p = 0,045740$), не выявлено связи Е2 и биоТСТ с индексом НОМА ($p > 0,05$). ДГА-С обратно коррелирует с уровнем инсулина ($r = -0,437620$; $p = 0,028687$) независимо от ИМТ ($r = -0,171032$; $p = 0,413683$). Отрицательная зависимость между ДГА-С и НОМА выявлена только у больных без ИР ($r = -0,719512$; $p = 0,018987$). Вероятно, угнетение синтеза ДГА-С, характерное для ГипоГТ [9], является дополнительным фактором риска развития МС [3].

Множественный пошаговый регрессионный анализ позволил выявить главные факторы в развитии ИР (из числа – возраст, ИМТ, Е2, ДГА-С, биоТСТ). Таковыми являются низкий уровень Е2 ($R = 0,77893161$; $p = 0,043109$) и повышение ИМТ ($R = 0,77893161$; $p = 0,005297$).

Во 2-й группе выявлено 54,5 % (24/44) больных с базальной ГИ. ИР на основании НОМА $> 1,8$ диагностирована у 65,9 % (29/44) больных. Дислипидемия имела место в 79,5 % (35/44) наблюдений. Неполный МС верифицирован у 34,1 % (15/44) больных. Его компоненты были представлены сочетанием абдоминального ожирения с признаками: гипертриглицеридемия и гипоальфахолестеринемия – в 25 % (11/44), гипертриглицеридемия, гипоальфахолестеринемия, нарушение углеводного обмена – в 9,1 % (4/44) (2 – нарушение толерантности к глюкозе (НТГ), 2 – СД 2-го типа) наблюдений.

Поиск зависимости между стероидами и состоянием углеводного обмена обнаружил, что при ГиперГТ уровень Е2 значимо отрицательно коррелирует с базальной инсулинемией ($r = -0,488710$; $p = 0,001850$), но не связан с индексом НОМА ($r = -0,215275$; $p = 0,073013$). Обратная зависимость между биоТСТ, с одной стороны, инсулином и индексом НОМА, с другой – высокозначима ($r = -0,595349$, $p = 0,009142$; $r = -0,568182$; $p = 0,013892$). Уровень ДГА-С отрицательно коррелирует с базальной инсулинемией ($r = -0,491046$; $p = 0,000713$) и НОМА ($r = -0,486201$; $p = -0,000820$) и отражает положительное влияние андрогена коры надпочечников на биологическую активность инсулина. Тем не менее регрессионный анализ с процедурой пошагового включения независимых факторов (из числа – продолжительность аменореи, ИМТ, уровень ДГА-С, биоТСТ, Е2) в качестве главного

предиктора развития ИР выделил показатель «продолжительность аменореи» ($R = 0,79048052$; $p = 0,033156$).

Таким образом, у больных с гипозестрогенными формами ановуляции длительность и тяжесть эстрогенного и андрогенного дефицита являются определяющими факторами в формировании «порочного круга» нарушенного метаболизма жиров и углеводов.

Монотерапия натуральными эстрогенами (эстрадиол / эстрадиола валерат по 0,25 – 0,5 – 1,0 мг в сутки per os в течение 8–26 мес. до появления первой менструальноподобной реакции) проводилась 13 больным с наиболее выраженным эстрогенным дефицитом. Остальным 18 пациенткам 1-й группы в качестве стартовой терапии рекомендована комбинированная ЗГТ в циклическом режиме.

Монотерапия эстрогенами привела к значимому снижению показателей базального инсулина (9,2 (6,9; 14,6) vs 8,6 (5,6; 12,0) мкЕД/мл, $p = 0,006601$); НОМА ($2,22 \pm 1,08$ vs $1,8 \pm 0,74$; $p = 0,007786$), общего ХС (5,3 (4,9; 6,0) vs 4,8 (4,3; 5,1) ммоль/л; $p = 0,000682$); ХС-ЛПНП (3,5 (2,7; 4,0) vs 3,0 (2,4; 3,4) ммоль/л; $p = 0,001477$), повышению ХС-ЛПВП (1,3 (1,2; 1,5) vs 1,4 (1,3; 1,5) ммоль/л; $p = 0,292089$). Среднее значение ИМТ не претерпело динамики ($22,2 \pm 3,8$ vs $22,6 \pm 5,45$; $p = 0,210144$), однако ЗГТ способствовала прибавке в весе у пациенток, имеющих дефицит массы тела, и, напротив, снижению веса у больных, имеющих ожирение. Изменение ОТ (72 (62; 84) vs 70 (67; 77) см; $p = 0,034625$) наиболее полно отразило положительную динамику в соотношении между жировой и мышечной массой тела. Доказано, что применение 17 β -эстрадиола в малых (физиологических) концентрациях через активацию эстрогеновых рецепторов (ER) α вызывает увеличение плотности и активности рецепторов к инсулину [10], стимулирует процессы окисления глюкозы и гликогеногенеза [3], обеспечивает баланс между активностью липопротеиновой и гормоночувствительной липаз с распределением жиров по женскому типу. Таким образом, монотерапия эстрогенами в вышеуказанных дозах оказывает исключительно благоприятное влияние на метаболизм углеводов и липидов у пациенток с ГипоГТ.

В обеих группах выбор препарата для комбинированной ЗГТ проводился с учетом уровня биоТСТ (1 квартиль = 13 нг/дл). Пациенткам с андрогенным дефицитом был назначен эстрадиола валерат (EV) 2 мг/сут – 9 дней, эстрадиола валерат 2 мг+левоноргестрел (LNG) 150 мкг/сут – 12 дней). Больные с уровнем биоТСТ ≥ 13 нг/дл получали 17 β -эстрадиол (E2) 2 мг/сут – 14 дней, 17 β -эстрадиол 2 мг+дидрогестерон (D) 10 мг/сут – 14 дней. В связи с данными об ухудшении метаболизма жиров и углеводов именно на фоне приема прогестинов [11] метаболические показатели определены в «прогестагеновую» фазу цикла.

По данным A.L. Isotton et al. [12], терапия per os эстрогенами, особенно в комбинации с гестагенами, вызывает подавление синтеза печенью инсулиноподобного фактора роста-I (ИФР-I) и значительное уси-

ление продукции гормона роста по принципу обратной связи. Это приводит к ухудшению чувствительности к инсулину, повышению атерогенности липидного профиля. Тем не менее замечено [13], что андрогены у пациенток, имеющих андрогенный дефицит, обладают свойствами усиливать синтез печенью ИФР-I и в «определенных пороговых концентрациях» корректируют эффекты, вызванные эстрадиолом. С этих позиций особого внимания заслуживает изучение влияния на метаболизм углеводов и жиров EV/LNG, в состав которого входит прогестаген, обладающий средством к андрогеновым рецепторам.

В группе 1 комбинированная ЗГТ в течение 2 лет сопровождалась прибавкой в весе, но медиана не превысила нормативные показатели. У больных иГипоГТ на фоне E2/D-2/10 уровень чувствительности к инсулину сохранился на позициях, достигнутых монотерапией эстрогенами (табл. 1). Однако в 11,1 % (1/9) наблюдений выявлено повышение НОМА и базальной инсулинемии. На фоне EV/LNG 30 % (3/10) отмечено прогрессирование ИР с повышением базального инсулина и индекса НОМА.

У больных иГипоГТ при переводе с монотерапии эстрогенами на комбинированную ЗГТ отмечена тенденция к снижению атерогенного потенциала крови. Тем не менее стоит заметить, что в 21,1 % (4/19) наблюдений зарегистрировано увеличение уровня ТГ, ХС-ЛПНП (1 больная принимала E2/D-2/10 и 3 – EV/LNG). Неблагоприятные эффекты оказались наиболее выражены у EV/LNG. Входящий в его состав LNG, будучи дериватом норгестостерона, ухудшает функцию печени с повышением уровня ХС-ЛПНП, снижением ХС-ЛПВП, развитием ИР.

У больных ГипоГТ ухудшение чувствительности к инсулину и отрицательное влияние на липидный спектр комбинированной ЗГТ могут быть связаны со сверхфизиологическим влиянием экзогенных стероидов не только на печень (после приема внутрь концентрация E2 в портальной вене в 3–4 раза превышает таковую в общей циркуляции), но и на иные ткани-мишени. Так, применение эстрогенов per os в составе ЗГТ, с учетом их первичного печеночного и кишечного метаболизма, априори осуществляется в супрафизиологических дозах для достижения «естественного» уровня гормонов в органах-мишенях [14]. Немаловажное значение, на наш взгляд, имеет неподготовленность рецепторного аппарата у больных ГипоГТ в эстроген- и прогестерончувствительных тканях к восприятию собственных гормонов. Именно у пациенток с иГипоГТ с дефицитным рецепторным аппаратом к эстрогенам и прогестерону обменные нарушения могут быть результатом хронического супрафизиологического воздействия на стероидзависимые ткани и эстрадиола, и прогестинов. Длительная передозировка 17 β -эстрадиола сопровождается установлением прочных его связей с ER β [15], что приводит к развитию ИР, НТГ, повышению активности гормоночувствительной, уменьшению липопротеновой липаз и, как следствие, нарушению метаболизма жировой ткани с гипертрофией висцеральных адипоцитов [3]. Принимаемые в избытке прогестины, помимо основных

эффектов, реализуемых через стимуляцию прогестероновых рецепторов, обладают конкурентным сродством к глюкокортикоидным рецепторам (в большей степени

дидрогестерон), подавлению синтеза ER (данный эффект наиболее выражен у LNG) с последующим развитием системной ИР и дислипидемии.

Таблица 1

Динамика показателей метаболизма на фоне комбинированной терапии эстроген-гестагенами у больных с изолированным ГипоГГ

Показатель метаболизма	На фоне монотерапии эстрогенами (n=13), до лечения (n=6)	Через 27 (18;30) мес. E2/D-2/10 (n=9)	W-тест (p)
		EV/LNG (n=10)	* до лечения vs E2/D-2/10 после лечения, ** до лечения vs EV/LNG после лечения
ИМТ, кг/м ²	21 (20; 22)	22,0 (22; 23)	*0,020863
	22,5 (20; 25)	23 (21; 24)	**0,059337
Инсулин, мкЕД/мл	9,6 (8,1; 14,1)	9,8 (8,2; 12,1)	*0,812704
	8,9 (6,9; 10,1)	9,5 (7,1; 13,3)	**0,075062
Глюкоза 0, ммоль/л	4,5 (4,1; 4,8)	4,3 (4,0; 4,4)	*0,090970
	4,5 (4,4; 4,7)	4,1 (3,9; 4,4)	**0,005062
Глюкоза 120, ммоль/л	5,8(5,0; 6,3)	5,9 (5,2; 6,4)	*0,065254
	5,3 (4,9; 5,9)	6,1 (5,4;6,7)	**0,056784
НОМА	1,9 (1,6; 2,6)	1,8 (1,7; 2,1)	*0,858955
	1,6 (1,4; 2,2)	1,9 (1,5; 2,4)	**0,076659
НОМА, % β	171 (153; 334)	156 (140; 290)	*0,020880
	262 (185; 307)	379 (136; 230)	**0,386271
ХС, ммоль/л	4,6 (4,5; 4,9)	4,5 (4,3; 4,9)	*0,400815
	5,0 (4,8; 5,1)	4,9 (4,6; 5,1)	**0,779435
ТГ, ммоль/л	1,2 (0,9; 1,2)	1,0 (1,0; 1,2)	*0,123486
	1,1 (0,8; 1,7)	1,2 (1,0; 1,4)	**0,069337
ХС-ЛПНП, ммоль/л	2,6 (2,4; 3,0)	2,4 (2,3; 3,0)	*0,400815
	3,2 (2,9; 3,4)	2,9 (2,6; 3,1)	**0,202623
ХС-ЛПВП, ммоль/л	1,5 (1,3; 1,8)	1,6 (1,5; 1,7)	*0,092893
	1,35 (1,3; 1,9)	1,5 (1,2; 1,7)	**0,575403

Кроме вышеобозначенных внешних причин, характер изменений метаболизма жиров и углеводов в ответ на ЗГТ определяется индивидуальным полиморфизмом генов, ответственных за метаболизм липидов в печени, и является отражением генетической предрасположенности к атеросклерозу и СД 2-го типа [16].

По данным анализа множественной пошаговой регрессии у пациенток с иГипоГГ фактором, оказывающим решающее влияние на формирование ИР и гипертриглицеридемии (из числа – возраст, ИМТ, семейный анамнез по СД 2-го типа, препарат для ЗГТ), признан выбор препарата EV/LNG ($R = 0,828514$; $p = 0,051086$ – для НОМА; $R = 0,715619$; $p = 0,0483116$ – для ТГ). Следовательно, применение ЗГТ с LNG в течение продолжительного времени должно осуществляться под тщательным динамическим контролем метаболического состояния организма.

В отличие от больных иГипоГГ, у пациенток с ГП и аГипоГГ после 2 лет комбинированной ЗГТ не выявлено никаких отрицательных эффектов эстроген-гестагенов на углеводно-жировой метаболизм, отмечено значимое снижение базального инсулина, индек-

са НОМА, нормализация соотношения липидных показателей (табл. 2).

Следовательно, у пациенток репродуктивного возраста, имеющих до развития ГипоГГ овуляторные менструальные циклы, рецепторный аппарат адекватно восприимчив к терапевтической концентрации эстроген-прогестинов. Применение ЗГТ, в том числе с LNG, в качестве прогестагена приводит к устранению различных эстроген-, прогестерон- и андроген-дефицитных симптомов, отрицательные эффекты данного вида лечения не столь ярко выражены.

Во 2-й группе через 6 циклов ЗГТ зарегистрировано улучшение чувствительности к инсулину, липидного состава крови. Однако спустя 2 года применения комбинированной ЗГТ в циклическом режиме по ряду показателей отмечена отрицательная динамика в метаболическом статусе. В частности, у больных ГиперГГ, получающих E2/D-2/10, тенденция к уменьшению ИМТ ($p = 0,097558$), ОТ ($p = 0,090044$), значимое снижение базальной инсулинемии ($p = 0,047249$), индекса НОМА ($p = 0,046827$) впоследствии были «утрачены». Отрицательная динамика отмечена по уровню базальной и постнагрузочной гликемии.

Таблица 2

Динамика показателей метаболизма на фоне комбинированной терапии эстроген-гестагенами у больных с гипопитуитаризмом и анорексией

Показатель метаболизма	До лечения (n=12)	Через 24 (21;28) мес. EV/LNG (n=5), E2/D-2/10 (n=2)	W-тест до лечения vs 24 мес.
ИМТ, кг/м ²	20,6±5,3	22,6±2,8	0,932647
Инсулин, мкЕД/мл	15,5 (9,1; 19,9)	9,0 (8,1; 10,5)	0,027993
Глюкоза 0, ммоль/л	4,2±0,3	4,6±0,4	0,128191
Глюкоза 120, ммоль/л	5,6±1,1	4,9±1,9	0,213622
НОМА	2,9 (1,8; 4,1)	1,9 (1,63; 2,2)	0,006297
ХС, ммоль/л	6,1 (4,6; 6,5)	4,9±0,34	0,008581
ТГ, ммоль/л	1,9 (1,7; 2,3)	1,3 (1,1; 1,5)	0,017961
ХС-ЛПНП, ммоль/л	3,7 (3,2; 3,9)	2,4 (2,1; 2,5)	0,048662
ХС-ЛПВП, ммоль/л	1,0 (0,7; 1,2)	1,3 (1,1; 1,6)	0,008320

Положительные изменения в липидном спектре крови оказались более устойчивы к продолжительной терапии эстроген-гестагенами. Так, через 6 циклов приема фемостона-2/10 отмечено значимое снижение концентраций атерогенных липидов – ТГ (p = 0,036641), ХС-ЛПНП (p = 0,039445), повышение ХС-ЛПВП (p = 0,009558). Показатели, полученные спустя 2 года ЗГТ, не отличались достоверно от ранее достигнутых (табл. 3). Тем не менее ухудшение липидограммы имело место у 25 % (3/12) пациенток.

За 6 циклов применения EV/LNG не претерпели существенной динамики уровень базального инсули-

на (p = 0,064552), индекс НОМА (p = 0,285980). Снижение атерогенного потенциала крови было значимым (p = 0,020194 – для общего ХС, p = 0,000549 – для ТГ, p = 0,013151 – для ХС-ЛПНП, p = 0,000105 – для ХС-ЛПВП (табл. 3)). Через 2 года статистически значимое ухудшение зарегистрировано по ИМТ, гликемии натощак. Индекс НОМА превысил соответствующий показатель до лечения. Уровень ТГ, ХС-ЛПВП сохранился на уровне, достигнутом через 6 циклов терапии EV/LNG. За 2 года ЗГТ отрицательные изменения липидограммы зарегистрированы у 23,8 % (5/21) больных.

Таблица 3

Метаболические изменения у больных ГиперГТ на фоне применения фемостона-2/10 и EV/LNG

Показатель метаболизма	До лечения E2/D-2/10(n=15) EV/LNG (n=24)	Через 6 мес. (n=14) (n=24)	Через 26 (24; 31) мес. (n=12) (n=21)	F (p<0,05)
ИМТ, кг/м ²	24,1 (20,45; 26,3) 23,0 (21,5; 26,3)	23,5 (22,4; 25,7) 22,4 (21,9; 30,6)	24,2 (22,5; 27,3) 24 (23,7; 27,0)	p<0,54452 p<0,01401
ОТ, см	78±10,5 77,3±8,3	76,3±9,4 75,8±8,8	80,7±8,9 80,9±9,05	p<0,23105 p<0,18622
Глюкоза, ммоль/л	4,6±0,44 4,4 (4,2; 5,0)	4,45±0,29 4,3 (4,0; 5,0)	4,9±0,29 4,9 (4,6; 5,0)	p<0,00219 p<0,03542
Глюкоза 120, ммоль/л	5,1±1,0 4,6 (4,2; 5,3)	6,2±0,8 5,8 (4,8; 6,3)	6,1±0,9 6,03 (5,2; 6,9)	p<0,01609 p<0,22313
Инсулин, мкЕД/мл	9,8 (8,4; 12,4) 11,9 (8,7; 17,4)	9,4 (6,2; 16,7) 10,9 (9,4; 12,5)	10,9 (9,69; 14,9) 12,3 (9,6; 19,2)	p<0,11790 p<0,43080
НОМА	2,0 (1,5; 3,4) 2,5 (1,6; 3,7)	1,7 (1,4; 2,3) 2,4 (2,0; 2,8)	2,0(1,8; 3,1) 3,2 (2,2; 4,3)	p<0,07428 p<0,00018
Холестерин, ммоль/л	5,3 (4,8; 5,8) 5,3 (5,0; 5,72)	5,1 (4,9; 5,2) 5,0 (4,9; 5,2)	5,0 (4,9; 5,2) 5,2 (4,9; 5,6)	p<0,31997 p<0,00536
ТГ, ммоль/л	1,3 (1,0; 1,6) 1,5 (1,1; 2,0)	1,1 (1,0; 1,3) 1,2 (1,0; 1,4)	1,0 (0,9; 1,1) 1,3 (1,2; 1,6)	p<0,19746 p<0,00694
ХС-ЛПНП, ммоль/л	3,6 (2,6; 3,7) 3,7 (3,1; 3,9)	3,1 (2,9; 3,2) 3,0 (2,8; 3,3)	3,3 (2,8; 3,5) 3,6 (3,1; 3,8)	p<0,49659 p<0,09223
ХС-ЛПВП, ммоль/л	1,1 (0,85; 1,0) 0,9 (0,7; 1,05)	1,3 (1,0; 1,3) 1,2 (0,7; 1,4)	1,35 (1,2; 1,5) 1,2 (0,9; 1,6)	p<0,00010 p<0,00003

Пошаговый регрессионный анализ позволил оценить влияние на индекс НОМА совокупности независимых факторов. Из числа факторов – ИМТ, возраст, семейный анамнез по СД 2-го типа, выбора препарата – ведущим предиктором повышения индекса НОМА у больных ГиперГГ обозначен фактор «анамнез семьи по СД 2-го типа» ($R = 0,65866310$; $p = 0,015821$). Также по результатам анализа множественной регрессии была установлена зависимость гипертриглицеридемии от ИМТ ($R = 0,38961300$; $p = 0,023722$), возраста больных ($R = 0,72962998$; $p = 0,036782$), а также выбора препарата EV/LNG ($R = 0,65758661$; $p = 0,004227$).

Таким образом, ЗГТ у больных ГиперГГ в первые 6 циклов применения оказывает благоприятное влияние на метаболизм углеводов и жиров, отражая важное участие эстроген-гестагенов в достижении метаболического баланса. Выбор прогестина в составе ЗГТ следует учитывать при повышении атерогенных показателей липидограммы.

Под наблюдением от 5 до 10 ($6,9 \pm 1,8$) лет находились 27 больных с гипозэстрогенными формами ановуляции (11 – с ГипоГГ (8 с иГипоГГ, 3 – ГП), 16 – с ГиперГГ). (Количественные данные части пациентов не приняты в расчет, поскольку наряду с ЗГТ им были назначены препараты для устранения метаболических нарушений – метформин, орлистат). Средний возраст к окончанию исследования пациентов с ГипоГГ составил $28,5 \pm 4,9$ года, с ГиперГГ – $36,3 \pm 6,4$. Фемостон-2/10 получали 11, EV/LNG – 16 больных.

По промежуточным и окончательным итогам прибавка в весе зарегистрирована у всех без исключения пациенток (от 4 до 36 кг; Ме 12 ($5,0$; $15,1$) кг). При этом ИМТ $< 26 \text{ кг/м}^2$ имел место у 27,3 % (3/11) больных ГипоГГ, 25 % (4/16) – с ГиперГГ, у остальных – избыточная масса тела или ожирение. Отличия показателей ИМТ, ОТ значимы (табл. 4).

Таблица 4

Внутригрупповые различия показателей метаболизма в зависимости от выбранной ЗГТ

Показатель метаболизма	Через 2 года ЗГТ	Через 6,9±1,8 года	(p) W-тест * 1(E2/D) vs 2(E2/D), **1 (EV/LNG) vs 2(EV/LNG)
	E2/D (n=11)	EV/LNG (n=16)	
ИМТ, кг/м ²	24,5±5,47	28,7±5,4	*0,003346
	24,3±4,5	27,4±4,2	**0,001474
ОТ, см	74,4 (69; 83)	81,7 (76; 90)	*0,023855
	72,6 (70; 78)	79 (75,5; 88,5)	**0,031424
Глюкоза 0, ммоль/л	4,9 (4,3; 5,0)	4,9 (4,5; 5,3)	*0,308064
	4,3 (4,2; 5,0)	4,3 (3,9; 5,0)	**0,284504
Глюкоза 120, ммоль/л	5,7 (5,3; 6,5)	5,7 (5,2; 5,9)	*0,858863
	6,4 (5,2; 6,7)	6,6 (6,2; 6,8)	**0,749691
Инсулин, мкЕД/мл	10,9 (8,3; 16,2)	13,5 (10,8; 19,3,3)	*0,005234
	12,1 (8,30; 14,8)	14,3 (10,4; 26,9)	**0,016369
НОМА	2,2 (1,6; 3,3)	2,8 (2,2; 4,1)	*0,040861
	2,3 (2,0; 3,5)	3,2 (2,1; 6,5)	**0,014597
НТГ, СД 2-го типа	Нет	9,1 % (1/11)	
		6,25 % (1/16)	
Семейный анамнез по СД2	18,2 % (4/11)		
	12,5 % (2/16)		
ХС, ммоль/л	5,0 (4,9; 6,2)	4,96 (4,8; 5,6)	*0,504880
	5,6 (5,0; 6,5)	5,3 (4,9; 6,2)	**0,084285
ТГ, ммоль/л	1,0 (0,9; 1,3)	1,1 (0,9; 1,3)	*0,878482
	1,3 (1,2; 1,4)	1,3 (1,2; 1,6)	**0,776425
ХС-ЛПНП, ммоль/л	3,3 (2,9; 3,5)	3,2 (2,9; 4,0)	*0,230025
	4,1 (3,4; 4,8)	3,6 (3,0; 4,5)	**0,125154
ХС-ЛПВП, ммоль/л	1,3 (1,2; 1,6)	1,2 (1,1; 1,4)	*0,093493
	1,2 (0,9; 1,5)	1,1 (0,9; 1,35)	**0,504880

Показатели углеводного метаболизма, в частности базальная инсулинемия и индекс НОМА, зафиксированные через 2 года ЗГТ, претерпели существенную нежелательную динамику за 5–10 лет лечения. При этом названные показатели не отличаются у больных, принимающих E2/D-2/10 либо EV/LNG ($p > 0,05$). Базальная ГИ имела место в 55,6 % (15/27) и индекс НОМА $> 1,8$ – в 85,2 % (23/27) наблюдений. Методом по-

шаговой регрессии проведен поиск наиболее значимого предиктора ухудшения чувствительности к инсулину у больных с гипозэстрогенными формами ановуляции на фоне длительной ЗГТ. Анализ совокупного влияния друг на друга таких факторов, как выбор препарата для ЗГТ, возраст, ИМТ в конце исследования, уровень ТГ, анамнез семьи по СД 2-го типа, определил ведущим предиктором повышения индекса НОМА

только семейный анамнез по СД 2-го типа ($R = 0,92311728$; $p = 0,000000$).

Гипертриглицеридемия ($\geq 1,7$ ммоль/л) развилась у 14,8 % (4/27), $\geq 1,3$ ммоль/л – у 44,4 % (12/27) пациентов. При этом, сравнивая показатели липидного спектра по итогам 2 лет ЗГТ и окончательные результаты, прогрессирующее повышение ТГ отмечено на фоне долговременной терапии фемостоном-2/10 лишь у 9,1 % (1/11), EV/LNG – у 18,75 % (3/16) больных, однако отличие незначимо ($\chi^2 p = 0,4876$). У остальных пациентов уровень ТГ либо не изменился, либо имел тенденцию к снижению. Показатели ХС-ЛПНП снизились, но отмечено незначимое падение концентраций ХС-ЛПВП. С помощью множественного регрессионного анализа выявлено, что выбор препарата не определяет ухудшение липидограммы $R = 0,154376$; $p = 0,064888$), в отличие от статистических результатов через 2 года приема ЗГТ. Главным предиктором нарастания гипертриглицеридемии признан *возраст пациенток* к концу исследования ($R = 0,49073716$; $p = 0,047145$).

Из группы 2 выбыли пациентки, у которых в момент включения в исследование верифицированы НТГ и СД 2-го типа. Из 27 пациенток, прошедших весь период наблюдения, нарушение углеводного обмена выявлено впервые у 14,8 % (4/27) больных: 1 пациентка с ГипоГГ – нарушенная гликемия натощак, 3 – с ГиперГГ – НТГ ($n = 2$) и СД2 ($n = 1$). Отличие по частоте распространения НТГ от начала исследования до его завершения высокосignificantly (Макнемара A/D $\chi^2 = 21,04$; $p = 0,0000$). Предикторами развития НТГ (СД 2-го типа) у больных ГипоГГ и ГиперГГ на фоне долговременной ЗГТ являются повышение *индекса НОМА* ($R = 0,74258177$; $p = 0,002392$), *ИМТ* ($R = 0,88211843$; $p = 0,000172$) и *анамнез по СД 2-го типа* ($R = 0,76185805$; $p = 0,000009$), главным из которых выделен семейный анамнез по данному заболеванию.

Выводы

1. Монотерапия эстрогенами при гипогонадотропном гипогонадизме характеризуется значимыми положительными изменениями в обмене углеводов и жиров.

2. Комбинированная ЗГТ в циклическом режиме у больных с гипоестрогенными формами ановуляции является эффективным средством нормализации чувствительности к инсулину и липидного спектра преимущественно в первые 6 циклов терапии. В дальнейшем уровень метаболического гомеостаза может изменяться в сторону улучшения, стабилизироваться либо претерпеть ухудшение в зависимости от индивидуальных особенностей метаболизма углеводов и жиров под влиянием стероидов.

3. ЗГТ при гипогонадотропном и гипергонадотропном гипогонадизме не препятствует ухудшению чувствительности к инсулину у больных с отягощенным семейным анамнезом по СД 2-го типа и не является средством профилактики данного заболевания.

Литература

1. Чагай Н.Б. Метаболический гомеостаз и его коррекция у пациенток с различными формами ановуляции: автореф. дис. ... канд. мед. наук. М., 2003. 24 с.
2. Чагай Н.Б., Мкртумян А.М., Геворкян М.А. Состояние метаболизма углеводов и жиров у пациенток с гипоестрогенными формами ановуляции на фоне долговременной заместительной гормональной терапии // Проблемы репродукции. 2011. № 3. С. 10–14.
3. Манухин И.Б., Геворкян М.А., Чагай Н.Б. Ановуляция и инсулинорезистентность. М., 2006. 416 с.
4. URL: <http://www.issam.ch/freetesto.htm> (дата обращения: 10.12.2014).
5. McAuley K.A., Williams S.M., Mann J.I., Walker R.J., Lewis-Barned N.J., Temple L.A., Duncan A.W. Diagnosing Insulin Resistance in the General Population // Diabetes Care. 2001. Vol. 24. P. 460–464.
6. Esteghamati A., Ashraf H., Esteghamati A.R., Meysamie A., Khalilzadeh O., Nakhjavani M., Abbasi M. Optimal threshold of homeostasis model assessment for insulin resistance in an Iranian population: the implication of metabolic syndrome to detect insulin resistance // Diabetes Res. Clin. Pract. 2009. Vol. 84(3). P. 279–87.
7. Alberti K.G., Zimmet P., Shaw J. The metabolic syndrome - a new worldwide definition // Lancet. 2005. Vol. 366. P. 1059–1062.
8. Ohwada R., Hotta M., Oikawa S., Takano K. Etiology of hypercholesterolemia in patients with anorexia nervosa // Int. J. Eat. Disord. 2006. Vol. 39(7). P. 598–601.
9. Зекцер В.Ю. Гипогонадотропный гипогонадизм у женщин: патогенез, диагностика, клиническая характеристика: автореф. дис. ... канд. мед. наук. М., 2008. 20 с.
10. Gonzalez C., Alonso A., Grueso N.A., Diaz F., Esteban M.M., Fernandez S., Patterson A.M. Role of 17beta-estradiol administration on insulin sensitivity in the rat: implications for the insulin receptor // Steroids. 2002. Vol. 67 (13–14). P. 993–1005.
11. Rontu R., Solakivi T., Teisala K., Lehtimäki T., Punnonen R., Jokela H. Impact of long-term hormone replacement therapy on in vivo and in vitro markers of lipid oxidation // Free Radic. Res. 2004. Vol. 38(2). P. 129–137.
12. Isotton A.L., Wender M.C., Czepielewski M.A. The influence of estrogen and progestogen replacement on growth hormone activity in women with hypopituitarism // Arq. Bras. Endocrinol. Metabol. 2008. Vol. 52(5). P. 901–916.
13. Christiansen J.J., Fisker S., Gravholt C.H., Bennett P., Svenstrup B., Andersen M., Feldt-Rasmussen U., Christiansen J.S., Jørgensen J.O. Discontinuation of estrogen replacement therapy in GH-treated hypopituitary women alters androgen status and IGF-I // Eur. J. Endocrinol. 2005. Vol. 152(5). P. 719–76.
14. Зайдиева Я.З. Заместительная гормонотерапия. Фармакология и клиническое применение. М., 2001. 50 с.
15. Naaz A., Zakroczymski M., Heine P., Taylor J., Saunders P., Lubahn D., Cooke P.S. Effect of ovariectomy on adipose tissue of mice in the absence of estrogen receptor alpha (ERalpha): a potential role for estrogen receptor beta (ERbeta) // Horm. Metab. Res. 2002. Vol. 34(11–12). P. 758–763.
16. Lamou-Fava S., Herrington D.M., Horvath K.V., Schaefer E.J., Asztalos B.F. Effect of hormone replacement therapy on plasma lipoprotein levels and coronary atherosclerosis progression in postmenopausal women according to type 2 diabetes mellitus status. // Metabolism. 2010. Vol. 59(12). P. 1794–1800.

References

1. Chagai N.B. *Metabolicheskie gomeostaz i ego korektsiya u patsientok s razlichnymi formami anovulyatsii*: avtoref. dis. ... kand. med. nauk [Metabolic homeostasis and its correction in patients with various forms of anovulation]. Moscow, 2003, 24 p.
2. Chagai N.B., Mkrtumyan A.M., Gevorkyan M.A. Sostoyaniye metabolizma uglevodov i zhirov u patsientok s gipoestrogennymi formami anovulyatsii na fone dolgovremennoi zamestitel'noi gormonal'noi terapii [The state of the metabolism of carbohydrates and fats in patients with anovulation gipoestrogenic forms on the background of long-term hormone replacement therapy]. *Problemy reproduksii*, 2011, no 3, pp. 10-14.
3. Manukhin I.B., Gevorkyan M.A., Chagai N.B. *Anovulyatsiya i insulinorezistentnost'* [Anovulation and insulin resistance]. Moscow, 2006, 416 p.
4. Available at: <http://www.issam.ch/freetesto.htm> (accessed 10.12.2014).
5. McAuley K.A., Williams S.M., Mann J.I., Walker R.J., Lewis-Barned N.J., Temple L.A., Duncan A.W. Diagnosing Insulin Resistance in the General Population. *Diabetes Care*, 2001, vol. 24, pp. 460-464.
6. Esteghamati A., Ashraf H., Esteghamati A.R., Meysamie A., Khalilzadeh O., Nakhjavani M., Abbasi M. Optimal threshold of homeostasis model assessment for insulin resistance in an Iranian population: the implication of metabolic syndrome to detect insulin resistance. *Diabetes Res. Clin. Pract.*, 2009, vol. 84(3), pp. 279-287.
7. Alberti K.G., Zimmet P., Shaw J. The metabolic syndrome - a new worldwide definition. *Lancet*, 2005, vol. 366(9491), pp. 1059-1062.
8. Ohwada R., Hotta M., Oikawa S., Takano K. Etiology of hypercholesterolemia in patients with anorexia nervosa. *Int. J. Eat Disord.*, 2006, vol. 39(7), pp. 598-601.
9. Zektser V.Yu. *Gipogonadotropnyi gipogonadizm u zhenshin: patogeneza, diagnostika, klinicheskaya kharakteristika*: avtoref. dis. ... kand. med. nauk [Hypogonadotropic hypogonadism in women: pathogenesis, diagnosis, clinical characteristics]. Moscow, 2008, 20 p.
10. Gonzalez C., Alonso A., Grueso N.A., Diaz F., Esteban M.M., Fernandez S., Patterson A.M. Role of 17beta-estradiol administration on insulin sensitivity in the rat: implications for the insulin receptor. *Steroids*, 2002, vol. 67 (13-14), pp. 993-1005.
11. Rontu R., Solakivi T., Teisala K., Lehtimäki T., Punnonen R., Jokela H. Impact of long-term hormone replacement therapy on in vivo and in vitro markers of lipid oxidation. *Free Radic. Res.*, 2004, vol. 38(2), pp. 129-137.
12. Isotton A.L., Wender M.C., Czepielewski M.A. The influence of estrogen and progestogen replacement on growth hormone activity in women with hypopituitarism. *Arq. Bras. Endocrinol. Metabol.*, 2008, vol. 52(5), pp. 901-916.
13. Christiansen J.J., Fisker S., Gravholt C.H., Bennett P., Svenstrup B., Andersen M., Feldt-Rasmussen U., Christiansen J.S., Jørgensen J.O. Discontinuation of estrogen replacement therapy in GH-treated hypopituitary women alters androgen status and IGF-I. *Eur. J. Endocrinol.*, 2005, vol. 152(5), pp. 719-726.
14. Zaidieva Ya.Z. *Zamestitel'naya gormonoterapiya. Farmakologiya i klinicheskoe primeneniye* [Hormone replacement therapy. Pharmacology and clinical use]. Moscow, 2001, 50 p.
15. Naaz A., Zakroczymski M., Heine P., Taylor J., Saunders P., Lubahn D., Cooke P.S. Effect of ovariectomy on adipose tissue of mice in the absence of estrogen receptor alpha (ERalpha): a potential role for estrogen receptor beta (ERbeta). *Horm. Metab. Res.*, 2002, vol. 34(11-12), pp. 758-763.
16. Lamon-Fava S., Herrington D.M., Horvath K.V., Schaefer E.J., Asztalos B.F. Effect of hormone replacement therapy on plasma lipoprotein levels and coronary atherosclerosis progression in postmenopausal women according to type 2 diabetes mellitus status. *Metabolism*, 2010, vol. 59(12), pp. 1794-1800.

УДК 618.146-006.6:615.382:615.277.3:615.37:612.017.2

ОТРАЖАТЕЛЬНАЯ ДИНАМИКА ОБЩИХ АДАПТАЦИОННЫХ РЕАКЦИЙ ПРИ ПРОВЕДЕНИИ ПЛАЗМАФЕРЕЗА И ИММУНОТЕРАПИИ В ХОДЕ ЛЕКАРСТВЕННОГО ЛЕЧЕНИЯ РАКА ШЕЙКИ МАТКИ*

© 2015 г. А.И. Шихлярова, А.П. Меньшенина, Т.И. Моисеенко, Н.Д. Ушакова

Шихлярова Алла Ивановна – доктор биологических наук, профессор, руководитель лаборатории биофизики рака, Ростовский научно-исследовательский онкологический институт, ул. 14-я линия, 63, г. Ростов н/Д, 344037, e-mail: onco-sekretar@mail.ru

Меньшенина Анна Петровна – кандидат медицинских наук, ведущий научный сотрудник, отделение опухолей репродуктивной системы, Ростовский научно-исследовательский онкологический институт, ул. 14-я линия, 63, г. Ростов н/Д, 344037, e-mail: rnioi-patology@yandex.ru

Моисеенко Татьяна Ивановна – доктор медицинских наук, профессор, заведующая отделением онкогинекологии, главный научный сотрудник, отделение опухолей репродуктивной системы, Ростовский научно-исследовательский онкологический институт, ул. 14-я линия, 63, г. Ростов н/Д, 344037, e-mail: onco-sekretar@mail.ru

Ушакова Наталья Дмитриевна – доктор медицинских наук, профессор, врач отделения анестезиологии и реанимации, Ростовский научно-исследовательский онкологический институт, ул. 14-я линия, 63, г. Ростов н/Д, 344037, e-mail: rnioi@list.ru

Shikhlyarova Alla Ivanovna – Doctor of Biological Science, Professor, Head of Laboratory of Cancer Biophysics, Rostov Research Oncological Institute, 14 line St., 63, Rostov-on-Don, 344037, Russia, e-mail: onco-sekretar@mail.ru

Menshenina Anna Petrovna – Candidate of Medical Science, Leading Researcher, Department of Tumors of the Reproductive System, Rostov Research Oncological Institute, 14 line St., 63, Rostov-on-Don, 344037, Russia, e-mail: rnioi-patology@yandex.ru

Moiseenko Tatiana Ivanovna – Doctor of Medical Sciences, Professor, Head of the Department of Gynecological Oncology, Main Researcher, Department of Tumors of the Reproductive System, Rostov Research Oncological Institute, 14 line St., 63, Rostov-on-Don, 344037, Russia, e-mail: onco-sekretar@mail.ru

Ushakova Natalia Dmitrievna – Doctor of Medical Sciences, Professor, Physician of the Department of Anesthesiology and Intensive Care, Rostov Research Oncological Institute, 14 line St., 63, Rostov-on-Don, 344037, Russia, e-mail: rnioi@list.ru

Изучен характер развития общих адаптационных реакций у 47 больных местнораспространенным раком шейки матки T_{1b2-2b}N₀₋₁M₀ стадий при проведении плазмафереза и химиоиммунотерапии в неоадьювантном режиме. Установлено, что проведение плазмафереза сдерживает стрессогенное влияние химиотерапии на организм. Это доказывает целесообразность применения упреждающей детоксикации при местнораспространенном злокачественном росте. Проведение иммунотерапии способствует устойчивости антистрессорных реакций организма.

Ключевые слова: местнораспространенный рак шейки матки, плазмаферез, иммунотерапия, химиотерапия, адаптационные реакции.

We studied the nature of the development of a common adaptive responses in 47 patients with locally advanced cervical cancer T_{1b2-2b}N₀₋₁M₀ stages plasmapheresis and chemoimmunotherapy in neoadjuvant mode. It is established that the conduct of plasmapheresis stress inhibits the effect of chemotherapy on the body. This proves the expediency of application of proactive detoxification with locally spread of malignant growth. Holding immunotherapy promotes sustainability of anti-stress reactions.

Keywords: locally common cancer of the cervix, plasmapheresis, immunotherapy, chemotherapy, adaptive response.

Во многих странах мира рак шейки матки (РШМ), несмотря на разрабатываемые и внедряемые программы скрининга, продолжает оставаться наиболее частой злокачественной опухолью женских половых органов [1]. Среди заболевших местно-распространенный рак шейки матки (МРРШМ) встречается в 20–50 %, при этом отмечен рост заболеваемости у женщин молодого возраста [2]. Наибольшие трудности у клиницистов вызывает лечение именно этой категории больных, так как регионарное распространение опухоли ведет к быстрому лимфогенному метастазированию.

По мировым стандартам первичным лечением инвазивных новообразований РШМ, начиная с IB2 стадии, являются неоадьювантная химиотерапия (ХТ) или химиолучевое лечение [3]. Анализируя имеющиеся в литературе данные об эффективности неоадьювантной цитостатической терапии, можно заключить, что стандартное внутривенное введение химиопрепаратов позволяет перевести РШМ в резектабельное состояние и выполнить в последующем хирургическое вмешательство у 30–89 % пациенток. Столь широкий разброс эффективности химиотера-

* Исследование выполнено при поддержке гранта Президента Российской Федерации МК-4427.2014.7 «Новые технологии молекулярной детоксикации и клеточной иммунотерапии в комплексе персонализированного лечения и реабилитации больных при злокачественных опухолях гениталий».

пии свидетельствует о нередко возникающей резистентности опухоли к цитостатикам [4]. Согласно протоколам Всемирной ассоциации гематозеза, лечебный плазмаферез (ПА) в настоящее время используется в комплексной терапии более чем 150 заболеваний. Место ПА как компонента интенсивной поддерживающей терапии обосновывается исходя из производимых им биологических эффектов, таких как детоксикация, иммунокоррекция и реокоррекция. В процессе ПА происходят десорбция с поверхности клеток крови и транспортных белков лигандов различной природы и, как следствие, деблокирование рецепторного аппарата клетки [5]. По мнению R. Vambauer (2013 г.), ПА способен повысить эффективность лечения за счет снижения резистентности к химиопрепаратам, неизбежно развивающейся в процессе лечения, особенно в условиях раковой интоксикации [6]. Однако в современной литературе данные о применении ПА, как и других методов экстракорпоральной детоксикации организма онкологических больных, крайне немногочисленны и в большинстве случаев не имеют прямого отношения к специфике злокачественных заболеваний, осложнениям и побочным эффектам противоопухолевого лечения. В исследованиях, проведенных в Ростовском научно-исследовательском онкологическом институте, доказано, что проведение ПА перед неоадьювантной ХТ у больных распространенным раком яичников способствует оптимизации состояния общей реактивности организма, обеспечивая компенсацию эндогенной интоксикации и позволяя сохранять дозовую интенсивность ХТ у больных с высоким риском развития осложнений [7, 8].

В настоящее время четко идентифицирован этиологический фактор рака шейки матки – вирус папилломы человека. Известно, что иммунный статус организма активизирует или ограничивает возможности персистирующей папиллома-вирусной инфекции индуцировать развитие рака шейки матки. Данные, полученные П.И. Ковчуром и соавт., о положительном влиянии иммуномодулятора «Аллокин-альфа» на иммунный статус организма больных пре- и микроинвазивным раком шейки матки позволяют считать возможным включение этого препарата в комплексное лечение больных инвазивными формами РШМ [9].

Одним из важных аспектов механизма действия ПА и иммунотерапии при проведении лекарственного лечения РШМ $T_{1b2-2b}N_{0-1}M_0$ стадий может служить формирование симптомокомплекса общей неспецифической адаптационной реакции (ОНАР), типы которой характеризуются различной направленностью морфофункциональных изменений и состоянием неспецифической резистентности в организме: от патологических стрессорных (в острой и хронической формах) с низким уровнем резистентности до физиологических антистрессорных, соответствующих ОНАР тренировки, спокойной и повышенной активации с характерным высоким уровнем резистентности [10].

Цель исследования данной работы заключается в том, чтобы в сравнительном аспекте изучить структуру и характер интегральных адаптационных реакций больных МРРШМ $T_{1b2-2b}N_{0-1}M_0$ стадий при проведении стандартной предоперационной ХТ, а также неоадьювантной ХТ в сочетании с ПА и неспецифической иммунотерапией.

Материалы и методы

В нашей работе проанализирована структура ОНАР 47 больных МРРШМ $T_{1b2-2b}N_{0-1}M_0$ стадий в возрасте от 25 до 48 лет, находившихся на лечении в отделении гинекологии Ростовского научно-исследовательского онкологического института в период с 2009 по 2014 г. Базовым этапом лечения у всех пациенток применялась неоадьювантная химиотерапия (НАХТ). Пациентки были разделены на 3 группы: 1-ю группу составили 12 больных, которым проведен сеанс гравитационного ПА, через сутки после которого начинали курс НАХТ цисплатином (75 мг/м^2 в 1-й день введения) и блеоцином (20 мг/м^2 в 1-й и 5-й дни ХТ). Вторую группу составили 15 больных, которым проведен сеанс гравитационного ПА, через сутки после которого начинали курс НАХТ цисплатином (75 мг/м^2 в 1-й день введения) и блеоцином (20 мг/м^2 в 1-й и 5-й дни ХТ); на следующий день после окончания первого курса ХТ начинали курс неспецифической иммунотерапии препаратом «Аллокин-альфа» (6 инъекций препарата вводили подкожно через день). Третью группу составили 20 больных, получавших стандартную внутривенную ХТ цисплатином (75 мг/м^2 в 1-й день введения) и блеоцином (20 мг/м^2 в 1-й и 5-й дни ХТ).

Проведение ПА выполнялось на аппарате MCS3+Haemonetics в режиме протокола PPP со скоростью перфузии 40 мл/мин и сепарации крови $V = 5600$ об./мин, объемом плазмозэкстракции 600–700 мл.

Идентификация структуры ОНАР в ходе лечения проводилась индивидуально у каждой пациентки всех групп. Идентифицировали тип ОНАР по морфологическому составу крови (формула Шиллинга), сигнальным параметром порядка ОНАР – уровнем лимфоцитов, параметрами напряжения и неполноценности ОНАР – уровнем лимфоцитов, параметрами напряжения и неполноценности ОНАР – эозинофилов, моноцитов и общего числа лейкоцитов. Подсчет элементов вели в мазках крови, окрашенных по Романовскому – Гимза, используя метод миандров с обеих сторон мазка по 100 клеток. Для оценки общегрупповой структуры ОНАР и определения межгрупповых различий применяли кластерный анализ, формируя кластеры одноименных реакций в группе и вычисляя коэффициент соотношения между антистрессорными реакциями и стрессом [11]. Этот информативный показатель в цифровой и графической формах позволяет выявить тенденции общегрупповых и межгрупповых различий на разных этапах лечения и охарактеризо-

вать вклад используемых факторов: ПА, ХТ и химиоиммунотерапии – в изменении общей резистентности организма, а также влияние проводимого лечения на качество жизни больных.

Статистический анализ результатов проводили с помощью пакета Statistica 6.0 (Stat-Soft, 2001). Оценка достоверности произведена с использованием t-критерия Стьюдента. Уровень $p < 0,05$ принимали как значимый.

Результаты и обсуждение

Определение структуры ОНАР в исходном состоянии у больных первой группы с проведением ПА перед неoadъювантной НАХТ характеризовалось идентификацией всех типов реакций. При этом доля реакций тренировки превосходила в 3 раза частоту выявления стресса и в 1,5 раза – других антистрессорных реакций (таблица).

Структура адаптационных реакций у больных МРРШМ T_{1b2-2b}N₀₋₁M₀ стадий на этапах неoadъювантного лечения с проведением плазмафереза, химиотерапии и химиоиммунотерапии, %

Типы адаптационных реакций		Исходный фон			После ПА			После ХТ			Через 3 недели			Через 6 недель		
		I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III	I	II	III
Стресс	Острый	8,3	0	0	0	0	–	33,4*	36,4*	30,7*	0	0	7,7	11,1	0	0
	Хронический	8,3	9,0	15,4	0	18,2	–	0	18,2	30,8*	16,7	20,0	7,7	0	20,0	42,8*
Тренировка		50,0	36,4	23,0	36,4	18,2	–	50,0	27,2	30,8*	16,7	30,0*	30,8*	0	40,0*	0
Спокойная активация		8,3	27,3	46,2	45,5*	45,4*	–	8,3	18,2*	7,7*	33,3	50,0*	30,8*	66,7*	0	28,6*
Повышенная активация		8,3	27,3	7,7	18,1*	18,2*	–	8,3	0	0	8,3	0	23,0	0	40,0	28,6*
Переактивация		16,8	0	7,7	0	0	–	0	0	0	25,0	0	0	22,2	0	0
ЛФ, $\bar{x}$, %		30,6	27,4	28,5	30,5	26,9	–	21,5	18,0*	18,2*	31,8	26,1	28,5	34,3	27,4	26,4
K ^{AC} /C		5,0	10,1	5,5	10,0	4,5	–	2,0	1,75	0,63	4,9	4,0	5,5	8,0	4,0	1,3

* – различия достоверны по сравнению с исходным фоном.

После проведения ПА структура ОНАР включала только антистрессорные реакции с увеличением в 5,5 раза частоты развития реакции спокойной активации и в 2,2 раза – повышенной активации, что на фоне отсутствия стресса и переактивации свидетельствовало о физиологическом влиянии ПА на адаптивный статус пациенток.

После проведения ХТ с предварительным сеансом ПА структура ОНАР существенно изменилась в связи с формированием у трети пациенток острой формы стресса с характерной лимфопенией, анэозинофилией и лейкоцитозом. Среди антистрессорных реакций вновь преобладала реакция тренировки, а спокойная и повышенная активация выявлялась в единичных случаях.

Спустя 3 недели в 1-й группе больных после ПА и ХТ острой формы стресса не отмечалось ни в одном случае, а частота хронического стресса была в 4,5 раза меньше, чем антистрессорных реакций. Среди этих реакций физиологического типа наиболее часто идентифицировали спокойную активацию, при этом отмечено формирование переактивации, доля которой была в 3 раза больше, чем повышенной активации.

Подобная ситуация доминирования антистрессорных реакций наблюдалась и на шестой неделе исследования с тем отличием, что у одной пациентки наблюдался переход из спонтанной активации в острую форму стресса. Однако это не повлияло на динамику роста общегруппового показателя соотношения ОНАР: K^{AC}/C был увеличен вдвое.

Проведение ПА во 2-й группе больных перед проведением ХТ в сочетании с иммунотерапией сопровождалось изменением фоновой структуры ОНАР.

Частота развития антистрессорных реакций уменьшилась за счет перехода в хроническую форму стресса. Однако в соотношении K^{AC}/C доминировали реакции физиологического типа, особенно спокойной активации, уровень которой возрос в 1,7 раза. Несмотря на уменьшение в 2,2 раза K^{AC}/C, общегрупповая структура ОНАР свидетельствовала о достаточно высоком биоадаптивном потенциале организма перед проведением ХТ.

Сразу после проведения первого курса ПХТ ситуация кардинально изменилась, подобно той, что наблюдалась в 1-й группе больных, получавших ХТ без иммуномодуляторов. Общая доля стрессорных реакций увеличилась до 54,6 %, причем частота выявления острой формы стресса превышала не только хронический стресс, но и все сохранившиеся типы антистрессорных реакций (таблица). Соответственно этому коэффициент K^{AC}/C снизился в 2,6 раза по сравнению с уровнем после ПА.

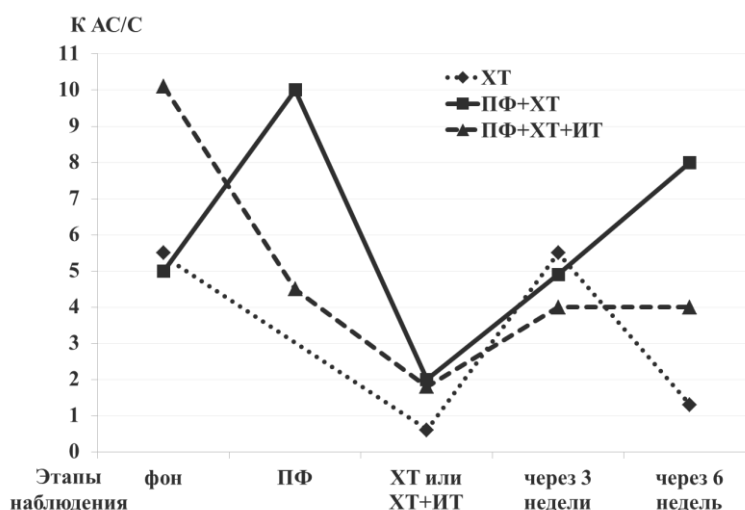
Включение иммунотерапии в схему лечения позитивно отразилось на структуре ОНАР. Через 3 недели после проведения химиоиммунотерапии в 80 % случаев были идентифицированы антистрессорные реакции тренировки и спокойной активации, причем частота последней превышала в 1,7 раза тренировку. По истечении 6 недель (т.е. после второго курса НАХТ) ситуация продолжала быть стабильной, но спокойная активация сменилась повышенной. Иными словами, включение в схему лечения иммунотерапии не перегружало стимулирующим влиянием лейкоцитарный состав крови и способствовало удержанию устойчивости антистрессорных реакций по сравнению с третьей группой пациенток.

В 3-й группе больных достаточно выражено проявился эффект стрессогенности ХТ без предварительного ПА. Частота формирования острого и хронического стресса увеличилась относительно исходного фона в 4 раза, составляя 61,5 % общегрупповой структуры ОНАР. Среди антистрессорных реакций доминировала реакция тренировки, в единичных случаях идентифицировалась спокойная активация. Соотношение адаптационных реакций, выраженное K^{AC}/C , снизилось по отношению к исходному состоянию в 8,7 раза, что подтверждало ингибирование защитных механизмов адаптации при проведении стандартной цитотоксической терапии.

На последующих этапах наблюдения у больных 3-й группы регистрировалась колебательная динамика стресслимитирующей и стрессиндуцирующей активности. Если спустя 3 недели после проведения первого курса индукционной ХТ были выявлены переходы из стресса в спокойную и повышенную активацию в

46 % случаев, то спустя 3 недели после проведения второго курса вновь возросла в 5,6 раза частота развития стресса в хронической форме, отсутствовала реакция тренировки, а доля спокойной и повышенной активации в сумме превышала всего в 1,3 раза долю стресса (таблица).

Анализируя графическую динамику K^{AC}/C на этапах лечения больных МРРШМ $T_{1b2-2b}N_{0-1}M_0$ стадий, можно убедиться, что проведение ПА оказывает сдерживание глубокого стрессогенного, в том числе интоксикационного, влияния ХТ на организм больной. Значения K^{AC}/C в 1-й и 2-й группах с проведением ПА перед ХТ и химиоиммунотерапией выше, чем в контрольной, в 2,8–3,2 раза, что позволяет говорить о том, что компонента упреждающей детоксикационной процедуры является необходимым звеном при местнораспространенном злокачественном росте, обеспечивая дальнейшую позитивную динамику адаптивных процессов (рисунок).



Динамика соотношения антистрессорных реакций и стресса на этапах проведения ПА, ХТ и химиоиммунотерапии у больных МРРШМ и их последствия

Включение иммунотерапии в комплекс неoadъювантного лечения способствует сохранению стабильности адаптивного статуса, удерживая количественные сигнальные параметры ОНАР антистрессорного типа до уровня 37–40 % лимфоцитов, что, по-видимому, не исключает качественного иммуностропного влияния на субпопуляционном и молекулярном уровнях. Это регуляторное влияние проявляется на фоне возрастающей частоты переходов в напряженные реакции активационного типа, особенно в переактивацию с уровнем лимфоцитов до 53–55 % у больных с ПА и ХТ без иммунотерапии.

12. Выводы

Таким образом, характеризуя переходную динамику реагирования организма на детоксикационные, цитотоксические и иммуномодулирующие воздействия, можно заключить, что проведение НАХТ боль-

ным МРРШМ IB-IIIВ стадий с включением в программу лечения ПА и неспецифической иммунотерапии обеспечивает синергизм и пролонгирование активности механизмов антистрессорной защиты, а также повышение противоопухолевой сопротивляемости организма больной.

Литература

1. Мерабишвили В.М., Бахидзе Е.В., Лалианци Э.И., Урманчеева А.Ф., Красильников И.А. Распространенность гинекологического рака и выживаемость больных // Вопросы онкологии. 2014. Т. 60, № 3. С. 288–297.
2. Косенко И.А., Матылевич О.П., Дударев В.С., Литвинова Т.М., Орехов В.Ф., Фомина И.Н., Курчина Т.М., Осипова Т.В. Эффективность комплексного лечения местнораспространенного рака шейки матки с использованием химиоэмболизации маточных артерий // Онкология. 2012. № 1. С. 15–19.

3. Zola P., Tripodi E., Zanfagnin V., Balima Poma C., Perotto S., Modafarri P., Marta F., Fuso L. Treatment of early cervical cancer: survival, complication and economical aspects // Сиб. онкол. журн. 2012. № 3 (51). С. 5–13. С. 14–21.
4. Меньшенина А.П., Моисеенко Т.И., Ушакова Н.Д. Возможности оптимизации предоперационной полихимиотерапии у больных инвазивным раком шейки матки // Злокачественные опухоли: материалы XVIII Рос. онкол. конгр. Москва, 11–13 ноября 2014 г. М., 2014. С. 30–36.
5. Бондарь Г.В., Олейников К.Н., Комендант В.В., Лисовская Н.Ю. Патогенетические обоснование и методические аспекты лечебного плазмафереза у больных, получающих противоопухолевую лекарственную терапию // Новообразование. 2007. № 2. С. 28–38.
6. Bambauer R., Latzo R., Schiel R. Therapeutic plasma exchange and selective plasma separation methods // Fundamental technologies, pathology and clinical results. 2013. P. 395–402.
7. Неродо Г.А., Ушакова Н.Д., Горошинская И.А., Мкртчян Э.Т., Меньшенина А.П. Применение плазмафереза в комплексном лечении распространенного рака яичников III–IV стадий // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2014. № 1. С. 98–102.
8. Ушакова Н.Д., Неродо Г.А., Горошинская И.А., Златник Е.Ю., Мкртчян Э.Т., Меньшенина А.П. Оценка эффективности плазмафереза в лечении больных раком яичников // Рос. мед. журн. 2014. № 3. С. 21–26.
9. Ковчур П.И., Бахидзе Е.В., Волкова Т.О. Влияние иммуномодулирующей терапии на показатели клеточного иммунитета и активность апоптоза лимфоцитов периферической крови у больных с преинвазивным и микроинвазивным раком шейки матки // Молекул. диагностика. 2014. Т. 2. С. 202–203.
10. Гаркави Л.Х., Квакуина Е.Б., Кузьменко Т.С., Шихлярова А.И. Антистрессорные реакции и активационная терапия. Реакция активации как путь к здоровью через процессы саморегуляции. Екатеринбург, 2002. 196 с.
11. Шихлярова А.И., Максимов Г.К. Новый интегральный показатель состояния адаптивных процессов при проведении хирургического, лучевого и лекарственного лечения рака с использованием аутосред организма // Актуальные вопросы теоретической, экспериментальной и клинической онкологии. М., 2006. С. 407–416.
3. Zola P., Tripodi E., Zanfagnin V., Balima Poma C., Perotto S., Modafarri P., Marta F., Fuso L. Treatment of early cervical cancer: survival, complication and economical aspects. *Sibirskii onkologicheskii zhurnal*, 2012, no 3 (51), pp. 14–21.
4. Men'shenina A.P., Moiseenko T.I., Ushakova N.D. [Optimization capabilities of preoperative chemotherapy in patients with invasive cervical cancer]. *Zlokachestvennye opukholi: materialy XVIII Rossiiskogo onkologicheskogo kongressa* [Malignant tumors: Proceedings of XVIII Russian Cancer Congress]. Moscow, 2014, pp. 30–36.
5. Bondar' G.V., Oleinikov K.N., Komendant V.V., Lisovskaya N.Yu. Patogeneticheskie obosnovanie i metodicheskie aspekty lechebnogo plazmaferesa u bol'nykh, poluchayushchikh protivopukhlevuyu lekarstvennuyu terapiyu [Pathogenetic substantiation and methodological aspects of therapeutic plasmapheresis in patients receiving anti-tumor drug therapy]. *Novoutvoreniya*, 2007, no 2, pp. 28–38.
6. Bambauer R., Latzo R., Schiel R. Therapeutic plasma exchange and selective plasma separation methods. *Fundamental technologies, pathology and clinical results*, 2013, pp. 395–402.
7. Nerodo G.A., Ushakova N.D., Goroshinskaya I.A., Mkrtchyan E.T., Men'shenina A.P. Primenenie plazmaferesa v kompleksnom lechenii rasprostranennogo raka yaichnikov III–IV stadii [The use of plasmapheresis in the complex treatment of advanced ovarian cancer stage III–IV]. *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskii region. Estestvennye nauki*, 2014, no 1, pp. 98–102.
8. Ushakova N.D., Nerodo G.A., Goroshinskaya I.A., Zlatnik E.Yu., Mkrtchyan E.T., Men'shenina A.P. Otsenka effektivnosti plazmaferesa v lechenii bol'nykh rakom yaichnikov [Evaluating the effectiveness of plasmapheresis in the treatment of patients with ovarian cancer]. *Rossiiskii meditsinskii zhurnal*, 2014, no 3, pp. 21–26.
9. Kovchur P.I., Bakhidze E.V., Volkova T.O. Vliyanie immunomoduliruyushchei terapii na pokazateli kletochного иммунитета i aktivnost' apoptoza limfotsitov perifericheskoi krovi u bol'nykh s preinvazivnym i mikroinvazivnym rakom sheiki matki [Influence of immunomodulatory therapy on cellular immunity and activity of apoptosis of peripheral blood lymphocytes in patients with preinvasive and microinvasive cervical cancer]. *Molekulyarnaya diagnostika*, 2014, vol. 2, pp. 202–203.
10. Garkavi L.Kh., Kvakina E.B., Kuz'menko T.S., Shikhlyarova A.I. Antistressornye reaktsii i aktivatsionnaya terapiya. Reaktsiya aktivatsii kak put' k zdorov'yu cherez protsessy samoregulyatsii [Antistress reactions and activation therapy. Activation reaction as a way to health through the processes of self-regulation]. *Ekaterinburg*, 2002, 196 p.
11. Shikhlyarova A.I., Maksimov G.K. Novyi integral'nyi pokazatel' sostoyaniya adaptivnykh protsessov pri provedenii khirurgicheskogo, lucheвого i lekarstvennogo lecheniya raka s ispol'zovaniem autosred organizma [New integral indicator of adaptive processes during surgery, radiotherapy and drug treatment of cancer using autologous environment of the organism]. *Aktual'nye voprosy teoreticheskoi, eksperimental'noi i klinicheskoi onkologii*. Moscow, 2006, pp. 407–416.

References

1. Merabishvili V.M., Bakhidze E.V., Laliantsi E.I., Urmancheeva A.F., Krasil'nikov I.A. Rasprostranennost' gineko-logicheskogo raka i vyzhivaemost' bol'nykh [The prevalence of gynecological cancer and survival of patients]. *Vo-prosy onkologii*, 2014, vol. 60, no 3, pp. 288–297.
2. Kosenko I.A., Matylevich O.P., Dudarev V.S., Litvinova T.M., Orekhov V.F., Fomina I.N., Kurchina T.M., Osipova T.V. Effektivnost' kompleksnogo lecheniya mestnorasprostranennogo raka sheiki matki s ispol'zovaniem imioembolizatsii matochnykh arterii [Efficiency of complex treatment of locally advanced cervical cancer using uterine artery imioembolization]. *Onkologiya*, 2012, no 1, pp. 15–19.

ШТРИХИ К ПОРТРЕТУ

ВЛАДИМИР ИСААКОВИЧ МИНКИН (к 80-летию со дня рождения)

4 марта 1935 г. в г. Ростове-на-Дону родился Владимир Исаакович Минкин, российский химик, академик РАН, директор НИИ физической органической химии ЮФУ, заведующий кафедрой природных соединений химического факультета ЮФУ. Владимир Исаакович окончил химический факультет Ростовского государственного университета в 1957 г., с тех пор его трудовая жизнь связана с этим учебным заведением. С 1967 г. он – профессор кафедры химии природных и высокомолекулярных природных соединений, с 1981 г. – директор НИИ физической органической химии РГУ, с 2003 г. – одновременно заместитель председателя Южного научного центра РАН, с 2004 г. – заведующий кафедрой природных и высокомолекулярных соединений Южного федерального университета. С 2012 г. – научный руководитель ЮФУ. Кроме того, В.И. Минкин – действительный член РАН (1994, отделение общей и технической химии), член Королевского химического общества Великобритании (1994).

Основные его работы посвящены физической органической и квантовой химии, изучению строения и молекулярной динамики органических и металлоорганических соединений. В 1974 г. Владимир Исаакович открыл (совместно с Л.П. Олехновичем и Ю.А. Ждановым) явление ацилотропии – быстрой обратимой миграции ацильных групп между нуклеофильными центрами в органических молекулах. Исследовал таутомерию и фотохромизм органических соединений, стереодинамику координационных соединений, неклассические органические и элементарорганические структуры, бистабильные молекулярные системы с управляемыми светом обратимыми перегруппировками.

В.И. Минкин – член редсовета журнала «Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки», член редколлегий журналов *Advances in Heterocyclic Chemistry*, *Mendeleev Communications*, «Успехи химии», «Журнал общей химии», «Журнал органической химии», «Известия АН. Серия химическая», «Химия гетероциклических соединений». Автор многих монографий и статей в отечественной и зарубежной печати, а также российских и международных патентов. Один из наиболее цитируемых российских учёных. Лауреат Государственной премии СССР (1989), премий РАН им. А.М. Бутлерова (2000), им. Л.А. Чугаева (2003) и им. А.Н. Несмеянова (2009). LXII менделеевский чтец («Полифункциональные материалы для молекулярной электроники»).

Л.С. Ворович

Коллектив редколлегии и редакции журнала от всей души поздравляют юбиляра, желают ему крепкого здоровья на долгие годы, благополучия семье, новых свершений во всех сферах деятельности.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ОФОРМЛЕНИЮ ТРАНСЛИТЕРАЦИИ (REFERENCES)

Непосредственно транслитерацию можно сделать на сайте <http://translit.net/>, выбрав вкладку Варианты – BSI. Примеры для ее оформления даны ниже.

Монографии, книги целиком

Naimark M.A. *Lineinye differentsial'nye operatory* [Linear differential operators]. Moscow, 1969, 526 p.

Flora Nizhnego Dona [Flora of the Lower Don]. Ed. G.M. Zozulin, V.V. Fedyaeva. Rostov-on-Don, 1984, Ch. 1; 1985, Ch. 2.

Статьи в журналах

Pechentsov A.S. Kraevye zadachi dlya differentsial'nykh uravnenii, sodержashchikh parametr, s kratnymi kornyami kharakteristicheskogo uravneniya [Boundary value problems for differential equations containing a parameter with multiple roots of the characteristic equation]. *Dif. uravneniya*, 1984, vol. 20, no 2, pp. 263-273.

Диссертации, авторефераты

Saakian N.S. *Kraevye zadachi dlya differentsial'nogo uravneniya chetvertogo poryadka v sluchae kratnykh kornei kharakteristicheskogo uravneniya: dis. ... kand. fiz.-mat. nauk* [Boundary value problems for differential equations of the fourth order in the case of multiple roots of the characteristic equation]. Baku, 1985, 135 p.

Авторские свидетельства, патенты

Grezin V.S., Novosyadlyi V.A. *Programmnoe sredstvo avtomaticheskogo opredeleniya vozrasta uchastnika sotsial'noi seti Ageception. Versiya 1.1* [The software tool automatically determine the age of the participant social network Ageception. Version 1.1]. Certificate, no 2014614425, 24.04.2013.

Электронные источники, интернет-сайты

Available at: www.ecoternopil.gov.ua (accessed 11.10.2014).

Ivanov S.E. *Morskaya industriya i global'nyi krizis - nablyudeniya sudobrokera* [Marine industry and the global crisis - monitoring of codebroker]. Available at: http://www.korabel.ru/news/comments/morskaya_industriya_i_globalniy_krizis_-_nablyudeniya_sudobrokera.html (accessed 11.12.2013).

Нормативные документы

Ob utverzhdenii normativov kachestva vody vodnykh ob'ektov rybokhozyaistvennogo znacheniya, v tom chisle normativov predel'no dopustimyykh kontsentratsii vrednykh veshchestv v vodakh vodnykh ob'ektov rybokhozyaistvennogo znacheniya [On approval of the water quality standards fishery water bodies, including the maximum permissible concentrations of harmful substances in the waters of fishery water bodies]: prikaz Rosrybolovstva № 20 ot 18.01.2010. Moscow, 2010.

GOST 10444.9-88. *Produkty pishchevye. Metod opredeleniya Clostridium perfringens* [GOST 10444.9-88. Food products. Method for determination of Clostridium perfringens]. Moscow, 2010.

Материалы конференций, семинаров, сборников

Nazar'ko O.V., Pavlov I.V., Chernov A.V. [Deformation and deformed stochastic basis]. *Matematicheskie metody v sovremennykh i klassicheskikh modelyakh ekonomiki i estestvoznaniya: materialy region. nauch.-prakt. konf. professorsko-prepodavatel'skogo sostava i molodykh uchenykh* [Mathematical methods in modern and classic models of economics and science: proceedings of the region. scientific and practical. conf.]. Rostov-on-Don, 2012, pp. 37-54.

