# MATHEMATICS

UDC 517.983.2

## COMPLEX pOWERS OF A cERTAIN dIFFERENTIAL OPERATOR IN $L_p$-sPACES

*© 2014 г.* ***A.V. Gil, V.A. Nogin***

*Gil Alexey Viktorovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Differential and Integral Equations, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: gil-alexey@yandex.ru.*

*Nogin Vladimir Alexandrovich – Candidate of Physical and Mathematical Science, Associate Professor, Department of Differential and Integral Equations, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: vnogin@math.sfedu.ru.*

***Ключевые слова:*** *потенциал, комплексные степени, аппроксимативные обратные операторы, мультипликатор.*

*We study complex powers of the differential operator (in $R^n$) $m^2 I + i\frac{\partial}{\partial x_n} + \sum_{k=1}^{n-1}(1-i\lambda_k)\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$, $\lambda_k > 0$. Complex powers of this operator with negative real parts are realized as anisotropic potentials $H_\lambda^\alpha \varphi$ with nonstandard metric. These potentials generalize well known Jones – Sampson parabolic potentials which are widely used in various problems of analysis and mathematical physics. We obtain $L_p - L_q$-estimates for the operator $H_\lambda^\alpha$. Within the framework of the method of approximative inverse operators we construct the inversion of potentials $H_\lambda^\alpha \varphi$ with densities in $L_p$. We also describe the range $H_\lambda^\alpha(L_p)$ in terms of the operator left inverse to $H_\lambda^\alpha$.*

***Keywords:*** *potential, complex powers, approximative inverse operators, multiplier.*

### Литература

1. *Samko S.G.* Hypersingular Integrals and Their Applications. Analytical Methods and Special Functions. L.; N.Y., 2002. Vol. 5. 376 p.
2. *Nogin V.A., Samko S.G.* Method of approximating inverse operators and its applications to the inversion of potential-type integral transforms // Integral Transforms and Special Functions. 1999. Vol. 6, № 2. P. 89–104.
3. *Ногин В.А., Сухинин Е.В.* Обращение и описание гиперболических потенциалов с $L_p$-плотностями // Докл. РАН. 1993. Т. 329, № 5. С. 550.
4. *Abramyan A.V., Nogin V.A.* Fractional power of differential operators of the second order with constant coefficients in $L_p$-spaces // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 3. С. 295.
5. *Ногин В.А., Сухинин Е.В.* Дробные степени оператора Клейна – Гордона // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 2. С. 166.
6. *Karasev D.N., Nogin V.A.* On the boundedness of some potential-type operators with oscillating kernels // Mathematische Nachrichten. 2005. Vol. 278, № 5. S. 554–574.
7. *Заволженский М.М., Ногин В.А.* Аппроксимативный подход к обращению обобщенных потенциалов Рисса // Докл. РАН. 1992. Т. 324, № 4. С. 738.
8. *Abramyan A.V., Nogin V.A.* Integral transforms, connected with fractional powers of nonhomogeneous differential operators in L_p-spases // Integral Transforms and Special Functions. 1994. Vol. 2, № 1. P. 1.
9. *Betilgiriev M.A., Karasev D.N., Nogin V.A.* L_p-L_q-estimates for some potential type operators with oscillating kernels // Fractional Calculus & Applied Analysis. 2004. Vol. 7, № 2. P. 213–241.
10. *Chegolin A.P., Nogin V.A.* Integral transforms related to complex powers of the generalized Schrödinger operator // Integral Transforms and Special Functions. 2006. Vol. 6, № 17. P. 409–420.

11. *Вожжов Д.В., Ногин В.А.* Комплексные степени некоторых вырождающихся дифференциальных операторов, связанных с оператором Гельмгольца // Диф. уравнения. 2009. Т. 45, № 3. С. 382–390.
12. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Специальные функции. М., 1983. 800 с.
13. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1983. 752 с.
14. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М., 1966. 630 с.
15. *Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987. 688 с.

***Поступила в редакцию*** ***22 сентября 2014 г.***

УДК 517.983

# ABOUT FOURIER tRANSFORM OF THE oNE oSCILLATING fUNCTION

***© 2014 г. M.N. Gurov***

*Gurov Mikhail Nikolaevich – Junior Researcher, Southern Institute of Mathematics, Marcus St., 22, Vladikavkaz, 362027; Post-Graduate Student, Department of Differential and Integral Equations, Faculty of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences, Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov-on-Don, 344090, Russia, e-mail: mgurov@inbox.ru.*

*The aim of this paper is to establish formulas for the Fourier transforms of functions that can be represented as the product of a homogeneous function of degree zero on an oscillating exponential. To obtain the above formulas the technique of means on the sections of the unit sphere by hyperplanes and the asymptotic representations for some oscillatory integrals are used. Said technique allows to obtain formulas for the Fourier transforms of these functions as integrals over a finite interval.*

***Keywords:*** *Fourier transform, homogeneous function, means of functions on the unit sphere.*

## Литература

1. *Samko S.G.* Hypersingular integrals and their applications // Analytical Methods and Special Functions: Internat. Series. L., 2002. Vol. 5.
2. *Бетилгириев М.А., Карасев Д.Н., Ногин В.А.* $L_p - L_q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки. 2004. № 2. С. 27–30.
3. *Карапетянц А.Н., Карасев Д.Н., Ногин В.А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. НАН Армении. 2003. Т. 38, № 2. С. 37–62.
4. *Ногин В.А., Сухинин Е.В.* Дробные степени оператора Клейна – Гордона // Докл. РАН. 1995. Т. 341, № 2. С. 166–168.
5. *Abramyan A.V., Nogin V.A.* Integral transorms, connected with fractional powers of nonhomogeneous differential operators in $L_p$-spaces // Integral Transforms and Special Functions. 1994. Vol. 2, № 1. P. 1–14.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции / пер. Н.Я. Виленкина : 2-е изд. М., 1973. Т. 1. 296 с.
7. *Miyachi A.* On some estimates for the wave equation in $L^p$ and $H^p$ // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo., Sec. IA. 1980. Vol. 27. P. 331–354.
8. *Гуров М.Н.* О гельдеровости обобщенных потенциалов Стрихарца по единичному шару. // Итоги науки. Юг России : материалы мат. форума. Владикавказ, 2013. Т. 8. С. 239–250.
9. *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. Элементарные функции. М., 1981. 489 с.

***Поступила в редакцию*** ***22 сентября 2014 г.***

УДК 517.9

# A PRIORI ESTIMATES FOR SINGULAR INTEGRAL OPERATORS WITH PIECEWISE CONTINUOUS COEFFICIENTS IN THE VARIABLE EXPONENT SPACES

***© 2014 г. V.S. Pilidi***

*Pilidi Vladimir Stavrovich – Doctor of Physical and Mathematical Science, Professor, Head of the Department of Computer Science and Computational Experiment, Institute of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences of the Southern Federal University, Milchakov St., 8a, Rostov- on-Don, 344090, Russia, e-mail: pilidi@sfedu.ru.*

*For a singular integral operator with piecewise continuos coefficients acting in the variable exponent space there is proved equivalence of the Fredholm property and existence of two a priori $L_p$-estimates. The proof is based on the local approach which permits to deduce invcrtibiiity of the local representa-tives (in the sense of 1.B. Simonenko) of the operator under consideration from a priori estimates.*

***Keywords:*** *singular integral operator, piecewise continuous coefficients, variable exponent space, Fredholm property, a priori estimate.*

## Литература

1. *Пилиди В.С.* Априорные оценки для одномерных сингулярных интегральных операторов с непрерывными коэффициентами // Мат. зам. 1975. Вып. 17, № 6. С. 851–856.
2. *Пилиди В.С.* Априорные оценки для некоторого класса одномерных сингулярных интегральных операторов с разрывными коэффициентами // Мат. зам. 1979. Вып. 26, № 2. С. 227–234.
3. *Пилиди В.С.* Априорные оценки для бисингулярных операторов с непрерывными коэффициентами // Мат. зам. 1991. Вып. 49, № 4. С. 105–109.
4. *Пилиди В.С.* Обобщенная фредгольмовость и априорные оценки для линейных операторов в тензорных произведениях гильбертовых пространств // Мат. зам. 1998. Вып. 64, № 6. С. 902–912.
5. *Пилиди В.С.* Априорные оценки для одномерных сингулярных интегральных операторов в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью. М., 2010. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 24.08.2010. № 497-В2010.
6. *Пилиди В.С.* Априорные оценки для сингулярных интегральных операторов в пространствах функций, суммируемых с переменной степенью // Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения: тез. докл. междунар. конф. Ростов н/Д, 2012. С. 23–24.
7. *Крейн С.Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М., 1971. 104 с.
8. *Diening L., Harjulehto P., Hästö P., Růžička M.* Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents. Springer-Verlag, 2011. 526 p.
9. *Kováčik O., Rákosník J.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ // Czechoslovak Math. J. 1991. Vol. 41 (116). P. 592–618.
10. *Гохберг И. Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев, 1973. 426 с.
11. *Kokilashvili V., Samko S.* Singular Integral Equations in the Lebesgue Spaces with Variable Exponent // Proc. A. Razmadze Math. Inst. 2003. Vol. 131. P. 61–78.

***Поступила в редакцию*** ***2 октября 2014 г.***